Correction Ecricome 2007

Voie scientifique

La correction comporte 20 pages.

Exercice 1

1. On rappelle que lorsque x est au voisinage de 0 :

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right)$$
$$\exp x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right)$$

Ainsi par *composition* des développements limités, lorsque x est au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}
\ln(2-e^x) &= \ln\left(2 - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right) + o\left(x^2\right)\right) \\
&= \ln\left(1 - x - \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right)\right) \\
&= \left(-x - \frac{1}{2}x^2\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}x^2\right)^2 + o\left(x^2\right) \\
&= -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right) \text{ par troncature} \\
&= \boxed{-x - x^2 + o\left(x^2\right)} \qquad (1)
\end{aligned}$$

2. –

(a) Pour tout k supérieur ou égal à 2, nous avons les implications suivantes :

$$\begin{aligned}
0 < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2} &\implies 1 < e^{\frac{1}{k}} < e^{\frac{1}{2}} \text{ par croissance de } \exp \\
&\implies -e^{\frac{1}{2}} < -e^{\frac{1}{k}} < -1 \\
&\implies 2 - e^{\frac{1}{2}} < 2 - e^{\frac{1}{k}} < 1 \\
&\implies 2 - \sqrt{e} < 2 - e^{\frac{1}{k}} < 1 \\
&\implies 0 < 2 - e^{\frac{1}{k}} < 1
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall k \geq 2, \quad 0 < 2 - e^{\frac{1}{k}} < 1} \qquad (2)$$

(b) D'après (2) :

$$\forall k \geq 2, \quad \ln\left(2 - e^{\frac{1}{2}}\right) < \ln\left(2 - e^{\frac{1}{k}}\right) < 0$$

par croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$ donc :

$$\boxed{\forall k \geq 2, \quad \ln\left(2 - e^{\frac{1}{k}}\right) < 0}$$

(c) Puisque $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{k} = 0$ alors selon (1) :

$$-\ln\left(2 - e^{\frac{1}{k}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{k}$$

où $\sum_k \frac{1}{k}$ diverge en tant que *série harmonique* (*série de Riemann de paramètre 1*). En utilisant le *critère d'équivalence appliqué aux séries à termes positifs* nous pouvons dire que la série $\sum_k -\ln\left(2-e^{\frac{1}{k}}\right)$ diverge aussi.

Conclusion :

$$\boxed{\sum_k \ln\left(2-e^{\frac{1}{k}}\right) \text{ diverge}}$$

(d) La suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}_2}$ est décroissante car V_n représente une somme de termes négatifs alors comme la série de terme général $\ln\left(2-e^{\frac{1}{k}}\right)$ diverge :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} V_n = -\infty}$$

Enfin comme nous savons $\lim_{t\to-\infty} e^t = 0$ nous pouvons conclure que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

3. _

(a) Nous avons :

$$\begin{aligned} \forall n\geq 2,\ \ln(nu_n) &= \ln n + \ln u_n \ (u_n>0)\\ &= \ln n + V_n\\ &= \ln n + \sum_{k=2}^{n} \ln\left(2-e^{\frac{1}{k}}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n} -\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=2}^{n} -\ln\left(\frac{k-1}{k}\right)\\ &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k}{k-1}\right)\\ &= \sum_{k=2}^{n} (\ln k - \ln(k-1))\\ &= \sum_{k=2}^{n} \ln k - \sum_{k=1}^{n-1} \ln k\\ &= \ln n - \ln 1\\ &= \ln n \end{aligned} \tag{4}$$

Conclusion : selon (3) et (4)

$$\forall n\geq 2,\ \ln(nu_n) = \sum_{k=2}^{n} -\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) + \sum_{k=2}^{n} \ln\left(2-e^{\frac{1}{k}}\right)$$

d'où :

$$\boxed{\forall n\geq 2,\quad \ln(nu_n) = \sum_{k=2}^{n}\left[\ln\left(2-e^{\frac{1}{k}}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right]}$$

(b) Pour obtenir un équivalent de $\ln\left(2-e^{\frac{1}{k}}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$ (qui est une différence) quand k tend vers $+\infty$ nous aurons recours à un *développement limité* au voisinage de l'infini qui s'impose. Posons pour $k \geq 2$, $u=\frac{1}{k}$, on a :

$$\begin{aligned}\ln(2-e^u)-\ln(1-u) &= \left(-u-u^2\right)-\left(-u-\frac{1}{2}u^2\right)+o\left(u^2\right)\\ &= -\frac{1}{2}u^2+o\left(u^2\right)\end{aligned}$$

et par substitution de $\frac{1}{x}$ à u :

$$\ln\left(2-e^{\frac{1}{k}}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)=-\frac{1}{2k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

Comme la *partie principale* du développement limité vaut $-\frac{1}{2k^2}$ alors :

$$\boxed{\ln\left(2-e^{\frac{1}{k}}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\underset{+\infty}{\sim}-\frac{1}{2k^2}} \qquad (5)$$

(c) D'après le résultat (5) de la question précédente nous pouvons affirmer que la série de terme général $-\left(\ln\left(2-e^{\frac{1}{k}}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)$ converge en utilisant le *critère d'équivalence appliqué aux séries à termes positifs* puisque $\sum_k \frac{1}{2k^2}$ converge en tant que série proportionnelle à la *série de Riemann* de paramètre $2>1$. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty}-\sum_{k=2}^{n}\left[\ln\left(2-e^{\frac{1}{k}}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right]$$

est constante et donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}\left[\ln\left(2-e^{\frac{1}{k}}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right]$$

est constante aussi. Autrement dit il existe un réel α tel que :

$$\lim_{n\to+\infty}\ln(nu_n)=\alpha$$

autrement dit :

$$\lim_{n\to+\infty}nu_n=e^{\alpha}>0$$

ce qui équivaut à dire que (c'est la *caractérisation de l'équivalence*) :

$$\exists K>0 \mid \quad nu_n\underset{+\infty}{\sim}K$$

autrement dit :

$$\boxed{\exists K>0 \mid \quad u_n\underset{+\infty}{\sim}\frac{K}{n}}$$

Comme $\frac{K}{n}$ est un terme général proportionnel à la *série harmonique* divergente, le *critère d'équivalence appliqué aux séries à termes positifs* permet de conclure que :

$$\boxed{\text{la série de terme général } u_n \text{ est divergente}}$$

4. Posons pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $S_n=\sum_{k=2}^{n}(-1)^k u_k$.

(a) Nous avons :

$$\forall n \geq 2, \quad u_{n+1} - u_n = \exp V_{n+1} - \exp V_n$$

Or comme tous les termes de la somme définissant V_n sont négatifs, la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante dans ce cas :

$$\begin{array}{rcl} \forall n \geq 2,\ \exp V_{n+1} & \leq & \exp V_n \text{ par croissance de } \exp \\ \text{soit } u_{n+1} & \leq & u_n \end{array}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geq 2} \text{ est décroissante}}$$

(b) Nous avons :

$$\begin{array}{rcl} \forall n \geq 1,\ S_{2n+2} - S_{2n} & = & \displaystyle\sum_{k=2}^{2n+2} (-1)^k u_k - \sum_{k=2}^{2n} (-1)^k u_k \\ & = & (-1)^{2n+2} u_{2n+2} + (-1)^{2n+1} u_{2n+1} \\ & = & u_{2n+2} - u_{2n+1} \\ & \leq & 0 \text{ car } (u_n)_{n\geq 2} \text{ est décroissante} \end{array}$$

et :

$$(S_{2n})_{n\geq 1} \text{ est décroissante}$$

De même :

$$\begin{array}{rcl} \forall n \geq 1,\ S_{2n+3} - S_{2n+1} & = & \displaystyle\sum_{k=2}^{2n+3} (-1)^k u_k - \sum_{k=2}^{2n+1} (-1)^k u_k \\ & = & (-1)^{2n+3} u_{2n+3} + (-1)^{2n+2} u_{2n+2} \\ & = & -u_{2n+3} + u_{2n+2} \\ & \geq & 0 \text{ car } (u_n)_{n\geq 2} \text{ est décroissante} \end{array}$$

et :

$$(S_{2n+1})_{n\geq 1} \text{ est croissante}$$

Enfin :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} |S_{2n+2} - S_{2n+1}| & = & \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_{2n+2} \\ & = & 0 \end{array}$$

car $(u_{2n+2})_{n\geq 0}$ converge vers 0 en tant que *suite extraite* de $(u_n)_{n\geq 1}$ qui converge elle-même vers 0 selon la **question 2.d**.
Conclusion : comme

- $(S_{2n})_{n\geq 1}$ est décroissante,
- $(S_{2n+1})_{n\geq 1}$ est croissante,
- $\lim_{n\to+\infty} |S_{2n+2} - S_{2n+1}| = 0$

$$\boxed{(S_{2n})_{n\geq 1} \text{ et } (S_{2n+1})_{n\geq 1} \text{ sont adjacentes}}$$

(c) Les deux sous-suites $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 1}$, d'ordre pair et d'ordre impair, sont adjacentes, elles convergent vers une limite commune qui fait que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$, dont elles sont extraites, est convergente. Autrement dit par définition de la convergence d'une série :

$$\boxed{\text{la série } \sum_n (-1)^n u_n \text{ est convergente}}$$

Exercice 2

1. Pour fixer les idées notons :

   - $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in([|1,n|])^2}$,
   - ${}^tA = (c_{i,j})_{(i,j)\in([|1,n|])^2}$ où $\forall (i,j) \in ([|1,n|])^2$, $c_{i,j} = a_{j,i}$
   - $B = (b_{i,j})_{(i,j)\in([|1,n|])^2}$
   - ${}^tAB = (d_{i,j})_{(i,j)\in([|1,n|])^2}$ où $\forall (i,j) \in ([|1,n|])^2$, $d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} c_{i,k}b_{k,j}$.

     Ainsi :

$$\begin{aligned}
\varphi(A,B) &= Tr\left({}^tAB\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} d_{i,i} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{i,k}b_{k,i} \\
&= \boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}b_{k,i}}
\end{aligned}$$

   - Montrons que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
     - Tout d'abord φ est une *forme* car $Tr\left({}^tAB\right) \in \mathbb{R}$,
     - Soit a et b deux réels, A, B et C trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors :

$$\begin{aligned}
\varphi(aA+bB,C) &= Tr\left({}^t(aA+bB)\,C\right) \\
&= Tr\left(\left(a\left({}^tA\right)+b\left({}^tB\right)\right)C\right) \text{ par linéarité de la transposition} \\
&= Tr\left(a\left({}^tAC\right)+b\left({}^tBC\right)\right) \text{ en développant} \\
&= aTr\left({}^tAC\right)+bTr\left({}^tBC\right) \text{ par linéarité } Tr \\
&= a\varphi(A,C)+b\varphi(B,C)
\end{aligned}$$

       cela permet de dire φ est *linéaire à gauche* ou *linéaire par rapport à la première place.*
     - Nous avons :

$$\begin{aligned}
\varphi(A,B) &= Tr\left({}^tAB\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}b_{k,i} \qquad (6) \\
\text{et } \varphi(B,A) &= Tr\left({}^tBA\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{k,i}a_{k,i} \qquad (7)
\end{aligned}$$

       Selon (6) et (7) par *commutativité du produit dans* $\mathbb{R}$:

$$\varphi \text{ est symétrique}$$

     - Nous avons :

$$\begin{aligned}
\varphi(A,A) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,i} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (a_{k,i})^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

$$\varphi \text{ est positive}$$

– Enfin :

$$\begin{aligned}\varphi(A,A)=0 &\implies \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{i,j})^2=0\\ &\implies \forall (i,j)\in [|1,n|]^2,\ (a_{i,j})^2=0 \text{ car tous les termes de la somme sont positifs}\\ &\implies \forall (i,j)\in [|1,n|]^2,\ a_{i,j}=0\\ &\implies A=0\end{aligned}$$

Conclusion : comme φ est une forme bilinéaire symétrique définie et positive

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire}}$$

2. _

(a) Comme

$$\begin{aligned}{}^t\left({}^tAA\right) &= {}^tA^t\left({}^tA\right)\\ &= {}^tAA\end{aligned}$$

${}^tAA$ est une *matrice symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormale*, c'est pourquoi il existe une matrice $P\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *orthogonale* et une matrice $D\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *diagonale* telles que ${}^tAA=PD^tP$ ce qui équivaut à :

$$\boxed{{}^tP\left({}^tAA\right)P=D}$$

(b) Soit λ une valeur propre de ${}^tAA$ et X un vecteur propre associé. Alors :

$$\begin{aligned}{}^tX^tAAX &= {}^tX\lambda X\\ &= \lambda^tXX\\ &= \lambda\|X\|^2 \text{ où } \|\centerdot\| \text{ désigne la } \textit{norme euclidienne canonique} \text{ de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad (8)\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}{}^tX^tAAX &= {}^t(AX)AX\\ &= \|AX\|^2 \qquad (9)\end{aligned}$$

Selon (8) et (9) nous avons :

$$\|AX\|^2=\lambda\|X\|^2 \iff \lambda=\frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} \text{ car } \|X\|\neq 0 \text{ puisque } X \text{ est un vecteur propre}$$

Ainsi :

$$\boxed{\lambda\geq 0}$$

(c) _

- Nous avons :

$$\begin{aligned}[N(A)]^2 &= \varphi(A,A)\\ &= Tr\left({}^tAA\right)\\ &= Tr\left(A^tA\right) \text{ car } Tr(AB)=Tr(BA)\\ &= Tr\left(AP^tP^tA\right) \text{ car } P^tP=I_n\\ &= Tr\left({}^tP^tAAP\right) \text{ car } Tr(AB)=Tr(BA)\\ &= Tr\left({}^tP\left({}^tAA\right)P\right) \text{ par } \textit{associativité du produit matriciel}\\ &= \boxed{Tr(D)} \qquad (10)\end{aligned}$$

- De même :

$$\begin{aligned}
[N(B)]^2 &= \varphi(B,B) \\
&= Tr\left({}^tBB\right) \\
&= Tr\left({}^tBP{}^tPB\right) \text{ car } P{}^tP = I_n \\
&= Tr\left({}^tPB{}^tBP\right) \text{ car } Tr(AB) = Tr(BA) \\
&= Tr\left({}^tP\left(B{}^tB\right)P\right) \text{ par } \textit{associativité du produit matriciel} \\
&= \boxed{Tr(S)} \qquad (11)
\end{aligned}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned}
[N(AB)]^2 &= \varphi(AB,AB) \\
&= Tr\left({}^t(AB)AB\right) \\
&= Tr\left({}^tB{}^tAAB\right) \\
&= Tr\left(AB{}^tB{}^tA\right) \text{ car } Tr(AB) = Tr(BA) \\
&= Tr\left(\left(AB{}^tB\right){}^tA\right) \text{ par } \textit{associativité du produit matriciel} \\
&= Tr\left({}^tA\left(AB{}^tB\right)\right) \text{ car } Tr(AB) = Tr(BA) \\
&= Tr\left(\left({}^tAA\right)\left(B{}^tB\right)\right) \text{ par } \textit{associativité du produit matriciel} \\
&= Tr\left(B{}^tB{}^tAA\right) \text{ car } Tr(AB) = Tr(BA) \\
&= Tr\left(B{}^tB{}^tAAP{}^tP\right) \text{ car } P{}^tP = I_n \\
&= Tr\left(\left(B{}^tB{}^tAAP\right){}^tP\right) \text{ par } \textit{associativité du produit matriciel} \\
&= Tr\left({}^tPB{}^tB{}^tAAP\right) \text{ car } Tr(AB) = Tr(BA) \qquad (12)
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
Tr(SD) &= Tr\left({}^tPB{}^tBP{}^tP{}^tAAP\right) \\
&= Tr\left({}^tPB{}^tB{}^tAAP\right) \qquad (13)
\end{aligned}$$

Selon (12) et (13) :

$$\boxed{[N(AB)]^2 = Tr(SD)} \qquad (14)$$

(d) Nous avons :

$$\begin{aligned}
Tr(SD) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_{i,j}d_{i,j} \\
&= \sum_{\left\{\substack{(i,j)\in([|1,n|])^2 \\ i=j}\right.} s_{i,j}d_{i,j} + \sum_{\left\{\substack{(i,j)\in([|1,n|])^2 \\ i\neq j}\right.} s_{i,j}d_{i,j} \qquad (15) \\
&= \sum_{i=1}^{n} s_{i,i}d_{i,i} + \sum_{\left\{\substack{(i,j)\in([|1,n|])^2 \\ i\neq j}\right.} s_{i,j}d_{i,j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} s_{i,i}d_{i,i} + 0 \text{ car } d_{i,j} = 0 \text{ quand } i \neq j \\
&= \boxed{\sum_{i=1}^{n} s_{i,i}\lambda_i} \qquad (16)
\end{aligned}$$

(e) Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
{}^tE_iSE_i &= {}^tE_i{}^tPB{}^tBPE_i \\
&= {}^t\left({}^tBPE_i\right)\left({}^tBPE_i\right) \\
&= \boxed{\left\|{}^tBPE_i\right\|^2} \qquad (17)
\end{aligned}$$

Puis sachant que :

$$E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix} \longleftarrow i^{\text{ème}} \text{ ligne}$$

$$\boxed{\forall i \in [|1,n|]\,, \quad {}^tE_iSE_i = s_{i,i}} \tag{18}$$

car en détaillant étape par étape :

$$\begin{aligned}
{}^tE_iSE_i &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} s_{k,l}e_ke_l \\
&= \sum_{\left\{\substack{(k,l)\in([|1,n|])^2 \\ k=l}\right.} s_{k,l}e_ke_l + \sum_{\left\{\substack{(k,l)\in([|1,n|])^2 \\ k\neq l}\right.} s_{k,l}e_ke_l \\
&= \sum_{k=1}^{n} s_{k,k}\left(e_k\right)^2 + \sum_{\left\{\substack{(k,l)\in([|1,n|])^2 \\ k\neq l}\right.} s_{k,l}e_ke_l \\
&= \sum_{k=1}^{n} s_{k,k}\left(e_k\right)^2 + \sum_{\left\{\substack{(k,l)\in([|1,n|])^2 \\ k\neq l}\right.} s_{k,l}\times 0 \text{ car } e_ke_l = 0 \text{ quand } k\neq l \\
&= \sum_{k=1}^{n} s_{k,k}\left(e_k\right)^2 \\
&= \sum_{\left\{\substack{k\in[|1,n|] \\ k=i}\right.} s_{k,k}\left(e_k\right)^2 + \sum_{\left\{\substack{k\in[|1,n|] \\ k\neq i}\right.} s_{k,k}\left(e_k\right)^2 \\
&= s_{i,i}\left(e_i\right)^2 + \sum_{\left\{\substack{k\in[|1,n|] \\ k\neq i}\right.} s_{k,k}\times 0 \text{ car } e_k = 0 \text{ quand } k\neq i \\
&= s_{i,i}\times 1 \\
&= s_{i,i}
\end{aligned}$$

Nous en déduisons selon (17) et (18) que :

$$\boxed{\forall i \in [|1,n|]\,, \quad s_{i,i} \geq 0}$$

(f) Montrons par *récurrence finie* que pour tout entier k non nul, la proposition $\mathcal{P}_k$:

$$\text{"}\sum_{i=1}^{k} \lambda_i s_{i,i} \leq \left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k} s_{i,i}\right)\text{"}$$

est vraie pour tout $k \in [|1,n|]$.

- L'initialisation est vérifiée pour $k=1$ car d'évidence :

$$\sum_{i=1}^{1} \lambda_i s_{i,i} \leq \left(\sum_{i=1}^{1}\lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{1} s_{i,i}\right)$$

  puisque :

$$\lambda_1 s_{1,1} \leq \lambda_1 s_{1,1}$$

- Supposons que $\mathcal{P}_k$ soit vraie pour k fixé dans $[|1,n-1|]\,,\ n\geq 2$.

- Nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i s_{i,i} &= \sum_{i=1}^{k}\lambda_i s_{i,i}+\lambda_{k+1}s_{k+1,k+1}\\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k}s_{i,i}\right)+\lambda_{k+1}s_{k+1,k+1} \text{ selon l'hypothèse de récurrence}\\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k}s_{i,i}\right)+\lambda_{k+1}s_{k+1,k+1}+\lambda_{k+1}\sum_{i=1}^{k}s_{i,i}+s_{k+1}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1}s_{i,i}\right)
\end{aligned}$$

car par <u>positivité</u> des coefficients λ_i et $s_{i,i}$:

$$\lambda_{k+1}\sum_{i=1}^{k}s_{i,i}+s_{k+1}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\geq 0$$

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout k de $[|1,n|]$ et donc en particulier $\mathcal{P}_n$ vraie, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i s_{i,i}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}s_{i,i}\right)} \tag{19}$$

Enfin nous avons vu que :

$$\begin{aligned}
[N(A,B)]^2 &= Tr(SD) \text{ selon (14)}\\
&= \sum_{i=1}^{n}s_{i,i}\lambda_i \text{ selon (15)}\\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}s_{i,i}\right) \text{ selon (19)}\\
&\leq Tr(D)\,Tr(S)\\
&\leq [N(A)]^2[N(B)]^2 \text{ selon (10) et (11)}
\end{aligned}$$

Conclusion : en prenant la racine de tous les réels en jeu

$$\boxed{[N(A,B)]\leq[N(A)][N(B)]}$$

Problème

3.1. Préliminaire

1. C'est une question de cours classique. Pour tout réel λ :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\lambda X+Y) &= \mathbb{E}\left([(\lambda X+Y)-\mathbb{E}(\lambda X+Y)]^2\right) \text{ par définition}\\
&= \mathbb{E}\left([\lambda(X-\mathbb{E}(X))+(Y-\mathbb{E}(Y))]^2\right) \text{ par linéarité de l'espérance}\\
&= \mathbb{E}\left(\lambda^2(X-\mathbb{E}(X))^2+2\lambda(X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))+(Y-\mathbb{E}(Y))^2\right) \text{ en développant}\\
&= \lambda^2\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right)+2\lambda\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\right)+\mathbb{E}\left((Y-\mathbb{E}(Y))^2\right) \text{ par lin. de } \mathbb{E}\\
&= \lambda^2\mathbb{V}(X)+2\lambda Cov(X,Y)+\mathbb{V}(Y) \text{ par définition de la variance et de la covariance}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall\lambda\in\mathbb{R},\quad \mathbb{V}(\lambda X+Y)=\lambda^2\mathbb{V}(X)+2\lambda Cov(X,Y)+\mathbb{V}(Y)}$$

2. Encore une question de cours ! Nous avons la célèbre équivalence :

$$\begin{aligned}(Cov\,(X,Y))^2 = \mathbb{V}\,(X)\,\mathbb{V}\,(Y) &\iff X, Y \textit{ sont presque sûrement liées par une } \textbf{\textit{relation affine}} \\ &\iff \exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{P}\,([Y = aX + b]) = 1\end{aligned}$$

Démontrons ce résultat.

- Supposons que $Y = aX + b$ p.s. alors :

$$\begin{aligned}(Cov\,(X, aX+b))^2 &= (aCov\,(X,X))^2 \\ &= (a\mathbb{V}\,(X))^2 \qquad (20)\\ \text{et } \mathbb{V}\,(X)\,\mathbb{V}\,(Y) &= \mathbb{V}\,(X)\,\mathbb{V}\,(aX+b) \\ &= a^2\mathbb{V}\,(X)\,\mathbb{V}\,(X) \\ &= (a\mathbb{V}\,(X))^2 \qquad (21)\end{aligned}$$

Selon (20) et (21) l'égalité est vérifiée.

- Réciproquement, introduisons pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$P : \lambda \to P\,(\lambda) = \mathbb{V}\,(-\lambda X + Y) = \lambda^2\mathbb{V}\,(X) - 2\lambda Cov\,(X,Y) + \mathbb{V}\,(Y)$$

C'est un trinôme du second degré en λ. Son discriminant réduit vaut :

$$\begin{aligned}\Delta' &= (Cov\,(X,Y))^2 - \mathbb{V}\,(X)\,\mathbb{V}\,(Y) \\ &= 0\end{aligned}$$

P admet donc une racine double $\lambda = \dfrac{Cov\,(X,Y)}{\mathbb{V}\,(X)}$ et dans ce cas :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\left(-\frac{Cov\,(X,Y)}{\mathbb{V}\,(X)}X + Y\right) = 0 &\implies -\frac{Cov\,(X,Y)}{\mathbb{V}\,(X)}X + Y \text{ est une variable certaine} \\ &\implies \exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid aX + Y \text{ est une variable certaine}\end{aligned}$$

3.2. Partie I : Etude d'une fonction de deux variables

1. On donne :

$$L_n\,(a,b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b^n}\exp\left(-\dfrac{1}{b}\,(-na+S)\right) & \text{si} \quad 0 \le a \le A \\ 0 & \text{si} \quad a > A \end{cases}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, A et S deux réels positifs ou nuls vérifiant $S > nA$.
L_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $]0, A[\times]0, +\infty[$ puisque :

- $l_1 : (a,b) \longmapsto -\dfrac{1}{b}\,(-na+S)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, A[\times]0, +\infty[$, en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas, et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- $l_2 : t \longmapsto \exp t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
- $l_3 : (a,b) \longmapsto \dfrac{1}{b^n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, A[\times]0, +\infty[$, en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.
  - Ainsi $l_2 \circ l_1 : (a,b) \longmapsto \exp\left(-\dfrac{1}{b}\,(-na+S)\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, A[\times]0, +\infty[$ en tant que fonction composée
  - et $L_n = l_3 \times (l_2 \circ l_1)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, A[\times]0, +\infty[$, en tant que produit de telles fonctions.
- Comme nous travaillons sur un ouvert, si L_n admet un extremum, c'est forcément en un *point critique* (a_0, b_0) vérifiant :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} \dfrac{\partial L_n}{\partial a}\,(a_0, b_0) = 0 \\ \dfrac{\partial L_n}{\partial b}\,(a_0, b_0) = 0 \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_n}{\partial a}(a,b) &= \frac{n}{b^{n+1}}\exp\left(-\frac{1}{b}(-na+S)\right)\\ \frac{\partial L_n}{\partial b}(a,b) &= -\left(\frac{(a+b)\,n-S}{b^{n+2}}\right)\exp\left(-\frac{1}{b}(-na+S)\right)\end{aligned}$$

Le système $(\mathcal{S})$ nous donne alors :

$$\begin{cases} \dfrac{n}{b_0^{n+1}}\exp\left(-\dfrac{1}{b_0}(-na_0+S)\right)=0\\ \left(\dfrac{S-(a_0+b_0)\,n}{b_0^{n+2}}\right)\exp\left(-\dfrac{1}{b_0}(-na_0+S)\right)=0\end{cases}$$

et comme la première équation est impossible :

$$\boxed{L_n \text{ n'admet pas d'extremum sur l'ouvert }]0,A[\times]0,+\infty[}$$

2. Nous avons pour tout $a\in[0,A[$ et pour tout $b\in]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned} a<A &\Longrightarrow -na>-nA\\ &\Longrightarrow -na+S>-nA+S\\ &\Longrightarrow -\frac{1}{b}(-na+S)<-\frac{1}{b}(-nA+S)\\ &\Longrightarrow \exp\left(-\frac{1}{b}(-na+S)\right)<\exp\left(-\frac{1}{b}(-nA+S)\right)\ \text{ car exp est croissante sur } \mathbb{R}\\ &\Longrightarrow \boxed{L_n(a,b)<L_n(A,b)}\end{aligned}$$

Maintenant si $a>A$ on sait que par définition $L_n(a,b)=0$ et comme :

$$\begin{aligned} L_n(A,b) &= \frac{1}{b^n}\exp\left(-\frac{1}{b}(-nA+S)\right)\\ &> 0\end{aligned}$$

alors nous avons encore :

$$\boxed{\forall a\in]A,+\infty[,\quad \forall b\in]0,+\infty[,\quad L_n(a,b)<L_n(A,b)}$$

3. Soit g une fonction d'une seule variable b définie par :

$$\forall b\in]0,+\infty[,\quad g(b)=L_n(A,b)=\frac{1}{b^n}\exp\left(-\frac{1}{b}(-nA+S)\right)$$

g est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle ouvert $]0,+\infty[$ avec :

$$g'(b)=\left(\frac{S-An-bn}{b^{n+2}}\right)\exp\left(-\frac{1}{b}(-na+S)\right)$$

La dérivée est du signe de $S-An-bn$ et

b	0		$\frac{S-An}{n}$		$+\infty$
$g'(b)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Ainis nous déduisons que g est strictement croissante sur $\left]0,\dfrac{S-An}{n}\right]$, strictement décroissante sur $\left[\dfrac{S-An}{n},+\infty\right[$. Donc g admet un maximum absolu sur $\mathbb{R}_+^*$ atteint en un unique point b_0 où :

$$\boxed{b_0=\frac{S-An}{n}}$$

4. Faisons un peu le bilan :

   - pour tout $a \in [0, +\infty[- \{A\}$ et pour tout $b \in]0, +\infty[$:
$$L_n(a,b) < L_n(A,b) \tag{22}$$
   - pour $a = A$ et pour tout $b \in]0, +\infty[$:
$$\begin{aligned} L_n(a,b) &= L_n(A,b) \\ &= g(b) \\ &\leq L_n\left(A, \frac{S - An}{n}\right) \end{aligned} \tag{23}$$

   Conclusion : selon (22) et (23) :
$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \quad \forall b \in \mathbb{R}_+^*, \; L_n(a,b) \leq L_n\left(A, \frac{S - An}{n}\right)$$
   et
$$\boxed{L_n \text{ admet sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \text{ un maximum absolu atteint en un unique point } \left(A, \frac{S - An}{n}\right)}$$

3.3. Partie II : Etude d'une loi

1. Pour $a \geq 0$ et $b > 0$ on considère la fonction $f_{a,b}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b} \exp\left(-\dfrac{(x-a)}{b}\right) & \text{si} \quad x \geq a \\ 0 & \text{si} \quad x < a \end{cases}$$

   - Tout d'abord constatons avec joie que $\mathcal{D}_{f_{a,b}} = \mathbb{R}$,
   - D'autre part on voit facilement que $f_{a,b}$ est continue sur $[a, +\infty[$ en tant que fonction composée et aussi continue sur $]-\infty, a[$ puisque sur cet intervalle $f_{a,b}$ coïncide avec la fonction nulle. Notez que $f_{a,b}$ n'est pas continue en a puisque $\lim\limits_{a^+} f_{a,b} = f_{a,b}(a) \neq 0$ alors que $\lim\limits_{a^-} f_{a,b} = 0$.
   - $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_{a,b}$ converge et vaut 1 puisque :
     – $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f_{a,b}$ converge car $f_{a,b}$ coïncide avec la fonction nulle sur $]-\infty, a[$,
     – $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f_{a,b}$ converge du fait que :
$$\begin{aligned} \lim_{\beta \to +\infty} \int_a^\beta \frac{1}{b} \exp\left(-\frac{x-a}{b}\right) dx &= \lim_{\beta \to +\infty} \left[-\exp\left(-\frac{x-a}{b}\right)\right]_a^\beta \\ &= \lim_{\beta \to +\infty} \left(1 - \exp\left(-\frac{\beta - a}{b}\right)\right) \\ &= 1 \text{ puisque } \lim_{t \to +\infty} e^{-t} = 0 \end{aligned}$$

   Conclusion :
$$\boxed{f_{a,b} \text{ est bien une densité de probabilité}}$$

2. Notons F_X la fonction de répartition de X définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{a,b}(t)\, dt$$

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{a} f_{a,b}(t)\,dt + \int_a^x f_{a,b}(t)\,dt & \text{si} \quad x \geq a \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ \displaystyle\int_a^x \frac{1}{b}\exp\left(-\frac{t-a}{b}\right)dt & \text{si} \quad x \geq a \end{cases} \\
&= \boxed{\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ 1 - \exp\left(-\dfrac{x-a}{b}\right) & \text{si} \quad x \geq a \end{cases}}
\end{aligned}$$

3. Tout d'abord mentionnons que *toute transformation affine appliquée sur une variable à densité redonne encore une variable à densité*. Ainsi :

$$\boxed{Y \text{ est une variable à densité}}$$

Pour obtenir une densité de Y commençons par rechercher sa fonction de répartition F_Y définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) = \mathbf{P}([Y \leq x])$$

Pour commencer signalons que :

$$Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$$

- Si $x < 0$,
$$F_Y(x) = 0 \tag{24}$$
- Si $x \geq 0$,
$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= \mathbf{P}([Y \leq x]) \\
&= \mathbf{P}([X - a \leq x]) \\
&= \mathbf{P}([X \leq x + a]) \\
&= F_X(x+a) \\
&= 1 - \exp\left(-\frac{x+a-a}{b}\right) \\
&= 1 - \exp\left(-\frac{x}{b}\right)
\end{aligned} \tag{25}$$

Conclusion : selon (24) et (25)

$$\boxed{Y \hookrightarrow \varepsilon\left(\frac{1}{b}\right)}$$

D'après le cours :

$$\mathbb{E}(Y) = b \quad \mathbb{V}(Y) = b^2$$

Enfin comme $X = Y + a$ où Y admet une espérance et une variance, nous pouvons conclure que X admet aussi une espérance et une variance respectivement égales à :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(Y) + a \\
&= \boxed{b + a} \\
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{V}(Y) \\
&= \boxed{b^2}
\end{aligned}$$

4. Soit $p \in \mathbb{N}$. X admet un moment d'ordre p si et seulement si $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} x^p f_{a,b}(x)\,dx$ est absolument convergente. En cas de convergence le moment d'ordre p de X est le nombre réel noté $\mathbb{E}(X^p)$ défini par :

$$\mathbb{E}(X^p) = \int_{\mathbb{R}} x^p f_{a,b}(x)\,dx$$

Or :

$$\int_{\mathbb{R}} x^p f_{a,b}(x)\,dx \text{ est absolument convergente} \iff \int_a^{+\infty} \frac{x^p}{b} \exp\left(-\frac{(x-a)}{b}\right) dx \text{ converge}$$

car $f_{a,b}$ coïncide avec la fonction nulle sur $]-\infty, a[$. Or :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x^2 \times \frac{x^p}{b} \exp\left(-\frac{(x-a)}{b}\right) &= \lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{a}{b}\right) \frac{x^{p+2}}{b} \exp\left(-\frac{x}{b}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} b^{p+1} \exp\left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{x}{b}\right)^{p+2} \exp\left(-\frac{x}{b}\right) \\
&= 0 \text{ par } \textit{croissances comparées exponentielle-puissance} \quad (26)
\end{aligned}$$

car n'oubliez pas que :

$$\forall \alpha > 0, \quad \lim_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$$

Selon (26) nous pouvons écrire que :

$$\frac{x^p}{b} \exp\left(-\frac{(x-a)}{b}\right) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

où $\displaystyle\int_{c>a\geq 0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge en tant qu'*intégrale de Riemann* de paramètre $2 > 1$. Alors par *critère de négligeabilité appliqué aux fonctions positives* :

$$\int_{c>a\geq 0}^{+\infty} \frac{x^p}{b} \exp\left(-\frac{(x-a)}{b}\right) dx \text{ converge} \tag{27}$$

Enfin par continuité de l'intégrande sur $[a, c]$, en tant que produit de telles fonctions, nous pouvons dire que :

$$\int_a^c \frac{x^p}{b} \exp\left(-\frac{(x-a)}{b}\right) dx \text{ converge} \tag{28}$$

Conclusion : selon (27) et (28)

$$\begin{aligned}
& \int_a^{+\infty} \frac{x^p}{b} \exp\left(-\frac{(x-a)}{b}\right) dx \text{ converge} \\
\iff & \int_{\mathbb{R}} x^p f_{a,b}(x)\,dx \text{ est absolument convergente} \\
\iff & \boxed{X \text{ admet un moment d'ordre } p}
\end{aligned}$$

Pour établir une rélation entre $\mathbb{E}(X^p)$ et $\mathbb{E}(X^{p-1})$ procédons par *intégration par parties*, en partialisant en introduisant pour $\beta > a$: $I_\beta = \displaystyle\int_a^\beta \frac{x^p}{b} \exp\left(-\frac{(x-a)}{b}\right) dx$.

Posons :

$$\begin{aligned}
u(x) = x^p &\implies u'(x) = p x^{p-1} \\
v(x) = -\exp\left(-\frac{(x-a)}{b}\right) &\impliedby v'(x) = \frac{1}{b} \exp\left(-\frac{(x-a)}{b}\right)
\end{aligned}$$

avec u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, \beta]$. Cela donne :

$$\begin{aligned}
\forall \beta > a,\ I_\beta &= \int_a^\beta \frac{x^p}{b} \exp\left(-\frac{(x-a)}{b}\right) dx \\
&= \left[-\frac{x^p}{b} \exp\left(-\frac{(x-a)}{b}\right)\right]_a^\beta + \int_a^\beta p x^{p-1} \exp\left(-\frac{(x-a)}{b}\right) dx \\
&= \frac{a^p}{b} - \frac{\beta^p}{b} \exp\left(-\frac{(\beta-a)}{b}\right) + p \int_a^\beta x^{p-1} \exp\left(-\frac{(x-a)}{b}\right) dx
\end{aligned}$$

Par passage à la limite quand β tend vers $+\infty$, les *croissances comparées expo-puissance* et l'existence de $\mathbb{E}\left(X^{p-1}\right)$, donc la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} x^{p-1}\exp\left(-\frac{(x-a)}{b}\right)dx$, permettent d'écrire que :

$$\boxed{\mathbb{E}\left(X^{p-1}\right)=\frac{a^p}{b}+p\mathbb{E}\left(X^{p-1}\right)}$$

5. _

(a) Comme la fonction $x\longmapsto -b\ln(1-x)+a$ réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée non nulle sur $U(\Omega)=[0,1[$, nous pouvons affirmer que :

$$\boxed{-b\ln(1-U)+a \text{ reste une variable à densité}}$$

Nous avons $(-b\ln(1-U)+a)(\Omega)=[a,+\infty[$ car quand pour tout issue ω de l'univers : $U(\omega)\in[0,1[$,

$$\begin{aligned}\ln(1-U(\omega))\in\mathbb{R}_- &\implies -\ln(1-U(\omega))\in\mathbb{R}_+\\ &\implies (-\ln(1-U(\omega))+a)\in[a,+\infty[\end{aligned}$$

Notons W la variable $-b\ln(1-U)+a$ et cherchons F_W sa fonction de répartition définie par:

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F_W(x)=\mathbf{P}([W\leq x])$$

- Si $x<a$:
$$F_W(x)=0$$
- Si $x\geq a$:
$$\begin{aligned}F_W(x)&=\mathbf{P}([W\leq x])\\&=\mathbf{P}([-b\ln(1-U)+a\leq x])\\&=\mathbf{P}([-b\ln(1-U)\leq x-a])\\&=\mathbf{P}\left(\left[\ln(1-U)\geq-\frac{(x-a)}{b}\right]\right)\\&=\mathbf{P}\left(\left[1-U\geq\exp\left(-\frac{(x-a)}{b}\right)\right]\right)\\&=\mathbf{P}\left(\left[U\leq1-\exp\left(-\frac{(x-a)}{b}\right)\right]\right)\\&=F_U\left(1-\exp\left(-\frac{(x-a)}{b}\right)\right)\\&=1-\exp\left(-\frac{(x-a)}{b}\right)\text{ car }1-\exp\left(-\frac{x-a}{b}\right)\in[0,1[\text{ quand }x\geq a\end{aligned}$$

Par dérivation de F_W sur $\mathbb{R}-\{a\}$ nous obtenons f_W une densité de W sans oublier de donner une valeur de f_W en a. Nous poserons, par exemple, $f_W(a)=\dfrac{1}{b}$. Ainsi :

$$f_W(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b}\exp\left(-\dfrac{(x-a)}{b}\right) & \text{si}\quad x\geq a\\ 0 & \text{si}\quad x<a\end{cases}$$

Conclusion :

$$\boxed{W\hookrightarrow\varepsilon(a,b)}$$

(b)
```
function tirage(a:  real, b:  real):  real
begin
tirage := -b*ln(1-random)+a;
end;
```

3.4. Partie III : Estimation des paramètres a et b

1. ```
begin
randomize;
readln(a, b, n);
X:=tirage(a,b);
S:=X;
Y:=X;
for i:=2 to n do
begin
X:=tirage(a,b);
S:=S+X;
if (X < Y) then
Y:=X;
end;
writeln(S);
writeln(Y);
end.
```

2. La variable $S_n$ est une variable à densité (car obtenue à partir de variables à densité indépendantes) admettant une espérance et une variance puisque s'exprimant comme somme de variables $X_k$ admettant chacune une espérance et une variance, avec :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_n) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) \text{ par linéarité de l'espérance} \\ &= \boxed{n(a+b)} \text{ puisque les variables } X_k \text{ suivent toutes la même loi} \\ \mathbb{V}(S_n) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) \text{ par indépendance des variables} \\ &= \boxed{nb^2}\end{aligned}$$

3. La **question 3.** de la **partie II** nous permet de dire que toutes les variables $X_k - a$ pour $k \in [|1,n|]$ sont iid (*indépendantes et de même loi*) puisque toutes les variables $X_k$ sont iid, où

$$\forall k \in [|1,n|], \quad X_k - a \hookrightarrow \varepsilon\left(\frac{1}{b}\right) = \Gamma(b,1)$$

alors d'après la *stabilité de la loi grand gamma pour la somme de variables indépendantes* :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} (X_k - a) \hookrightarrow \Gamma(b,n)}$$

Pour obtenir une densité de $S_n$ notée $f_{S_n}$, remarquons que $\sum_{k=1}^{n} (X_k - a)$ vaut $S_n - na$.
Tout d'abord $S_n(\Omega) = ]na, +\infty[$ puisque $(S_n - na)(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$.
Soit $F_{S_n}$ la fonction de répartition de $S_n$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{S_n}(x) = \mathbf{P}([S_n \le x])$$

- Si $x \le na$ :

$$F_{S_n}(x) = 0$$

- Si $x \ge na$ :

$$\begin{aligned}F_{S_n}(x) &= \mathbf{P}([S_n \le x]) \\ &= \mathbf{P}([S_n - na \le x - na]) \\ &= F_{S_n - na}(x - na) \text{ où } S_n - na \hookrightarrow \Gamma(b,n)\end{aligned}$$
```

Par dérivation de F_{S_n} sur $\mathbb{R} - \{na\}$ nous obtenons une densité de S_n notée f_{S_n} sans oublier de préciser que $f_{S_n}(na) = 0$, ce qui donne :

$$\boxed{f_{S_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{x-na}{b}}(x-na)^{n-1}}{(n-1)!b^n} & \text{si} \quad x > na \\ 0 & \text{si} \quad x \leq na \end{cases}}$$

4. Notons F_{Y_n} la fonction de répartition de Y_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{Y_n}(x) = \mathbf{P}([Y_n \leq x])$$

pour commencer notons que $Y_n(\Omega) = [a, +\infty[$ puisque pour tout k de $[|1, n|]$, $X_k(\Omega) = [a, +\infty[$.

- Si $x < a$:

$$F_{Y_n}(x) = 0 \tag{29}$$

- Si $x \geq a$:

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(x) &= \mathbf{P}([Y_n \leq x]) \\ &= 1 - \mathbf{P}([Y_n > x]) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k > x]\right) \\ &= 1 - \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}([X_k > x]) \text{ par indépendance des variables } X_k \\ &= 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - F_{X_k}(x)) \\ &= 1 - (1 - F_{X_1}(x))^n \text{ puisque toutes les variables } X_k \text{ suivent la même loi} \\ &= 1 - \left(1 - \left(1 - \exp\left(-\frac{x-a}{b}\right)\right)\right)^n \\ &= 1 - \left(\exp\left(-\frac{x-a}{b}\right)\right)^n \\ &= 1 - \exp\left(-\left(\frac{x-a}{\frac{b}{n}}\right)\right) \end{aligned} \tag{30}$$

Conclusion : selon (29) et (30)

$$\boxed{Y_n \hookrightarrow \varepsilon\left(a, \frac{b}{n}\right)}$$

Selon la **question 3** de la **partie II** :

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_n) = a + \frac{b}{n} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Y_n) = \left(\frac{b}{n}\right)^2}$$

5. _

(a) Par définition :

$$\begin{aligned} B(Y_n, a) &= \mathbb{E}(Y_n - a) \\ &= \mathbb{E}(Y_n) - a \text{ par propréité de l'espérance} \\ &= \boxed{\frac{b}{n}} \end{aligned}$$

Comme Y_n admet une variance le risque quadratique de Y_n existe et vaut par théorème :

$$\begin{aligned} r_{Y_n}(a) &= \mathbb{V}(Y_n) + (B(Y_n, a))^2 \\ &= \boxed{\frac{2b^2}{n^2}} \end{aligned}$$

(b) Soit une variable X positive admettant une espérance alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}([X \geq \varepsilon]) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon}$$

Pour prouver que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ est *convergente en probabilité* vers la variable certaine égale à a, montrons que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}([|Y_n - a| \geq \varepsilon]) = 0$$

Nota bene : l'énoncé préconise d'utiliser à juste titre l'inégalité de Markov plutôt que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev car l'écart en valeur absolue ne met pas en jeu Y_n et son espérance mais Y_n et la limite de son espérance en l'infini. A retenir !

$$\begin{aligned}
\forall \varepsilon > 0,\ \mathbf{P}([|Y_n - a| \geq \varepsilon]) &= \mathbf{P}\left(\left[(Y_n - a)^2 \geq \varepsilon^2\right]\right) \\
&\leq \frac{\mathbb{E}\left((Y_n - a)^2\right)}{\varepsilon^2} \text{ selon Markov } \left(\mathbb{E}\left((Y_n - a)^2\right) \text{ existe}\right) \\
&\leq \frac{\mathbb{V}(Y_n - a) + (\mathbb{E}(Y_n - a))^2}{\varepsilon^2} \text{ par \textit{théorème de Koenig-Huygens}} \\
&\leq \frac{\mathbb{V}(Y_n) + (\mathbb{E}(Y_n - a))^2}{\varepsilon^2} \\
&\leq \frac{\mathbb{V}(Y_n) + (\mathbb{E}(Y_n) - a)^2}{\varepsilon^2}
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \mathbb{V}(Y_n) &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{b}{n}\right)^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

et :

$$\lim_{n\to+\infty} (\mathbb{E}(Y_n) - a)^2 = 0 \quad \text{puisque} \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Y_n) = a$$

Conclusion : comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{V}(Y_n) + (\mathbb{E}(Y_n) - a)^2}{\varepsilon^2} = 0$ le *théorème d'encadrement* permet d'écrire que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}([|Y_n - a| \geq \varepsilon]) = 0$$

et

$$\boxed{(Y_n)_{n\geq 1} \text{ est convergente en probabilité vers la variable certaine égale à } a}$$

6. _

(a) On pose $Z_n = \dfrac{S_n}{n} - Y_n$ admettant une espérance puisque S_n et Y_n en admettent une chacune. Nous avons :

$$\begin{aligned}
B(Z_n, b) &= \mathbb{E}(Z_n - b) \\
&= \mathbb{E}(Z_n) - b \text{ par propriété} \\
&= \frac{1}{n}\mathbb{E}(S_n) - \mathbb{E}(Y_n) - b \text{ par linéarité de l'espérance} \\
&= \frac{n(a+b)}{n} - \left(a + \frac{b}{n}\right) - b \\
&= \boxed{-\frac{b}{n}}
\end{aligned}$$

Nota bene : Z_n *sous-estime en moyenne* b quand n tend vers l'infini puisque la limite du biais est négative.

(b) Le risque quadratique $r_{Z_n}(b)$ existe puisque Z_n admet un moment d'ordre deux en tant que différence de deux variables en admettant une. Nous avons :

$$\begin{aligned}
r_{Z_n}(b) &= \mathbb{V}(Z_n) + (B(Z_n, b))^2 \\
&= \mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n} - Y_n\right) + \left(\frac{b}{n}\right)^2 \\
&= \mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) + \mathbb{V}(Y_n) - 2Cov\left(\frac{S_n}{n}, Y_n\right) + \left(\frac{b}{n}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n^2}\mathbb{V}(S_n) + \mathbb{V}(Y_n) - \frac{2}{n}Cov(S_n, Y_n) + \left(\frac{b}{n}\right)^2 \\
&= \frac{nb^2}{n^2} + \left(\frac{b^2}{n^2}\right) - \frac{2}{n}Cov(S_n, Y_n) + \left(\frac{b}{n}\right)^2 \\
&= \boxed{\frac{2b^2}{n^2} + \frac{b^2}{n} - \frac{2}{n}Cov(S_n, Y_n)}
\end{aligned}$$

(c) D'après le préliminaire :

$$\begin{aligned}
(Cov(S_n, Y_n))^2 &\leq \mathbb{V}(S_n)\mathbb{V}(Y_n) \\
&\leq nb^2\left(\frac{b}{n}\right)^2 \\
&\leq \frac{b^4}{n}
\end{aligned}$$

avec :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b^4}{n} = 0$$

donc par *théorème d'encadrement* :

$$\lim_{n\to+\infty} Cov(S_n, Y_n) = 0$$

et comme :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2b^2}{n^2} + \frac{b^2}{n}\right) = 0$$

Conclusion : selon l'*algèbre des limites*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} r_{Z_n}(b) = 0}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} r_{Z_n}(b) = 0 &\implies \lim_{n\to+\infty} \mathbb{V}(Z_n) + (B(Z_n, b))^2 = 0 \\
&\implies \lim_{n\to+\infty} \mathbb{V}(Z_n) = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} (B(Z_n, b))^2 = 0
\end{aligned}$$

puisque $\mathbb{V}(Z_n)$ et $(B(Z_n, b))^2$ sont positives.
Ainsi par théorème, l'*inégalité de Markov* le démontrant (comme fait à la **question 5.b** de cette partie) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Z_n) = b \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{V}(Z_n) = 0 \implies (Z_n)_{n\geq 1} \xrightarrow{\mathbf{P}} b}$$

7. _

(a) Nous avons :

$$\begin{aligned}
\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*,\ L(a,b) &= \prod_{i=1}^{n} f_{a,b}(x_i) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{b}\exp\left(-\frac{(x_i-a)}{b}\right)\right] \mathbf{1}_{[a,+\infty[}(x_1) \times \cdots \times \mathbf{1}_{[a,+\infty[}(x_n) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{b}\exp\left(-\frac{(x_i-a)}{b}\right)\right] \mathbf{1}_{[a,+\infty[}(\min(x_1,\ldots,x_n)) \\
&= \begin{cases} \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{b}\exp\left(-\frac{(x_i-a)}{b}\right)\right] & \text{si} \quad \min(x_1,\ldots,x_n) \geq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \displaystyle\frac{1}{b^n}\prod_{i=1}^{n} \left[\exp\left(-\frac{(x_i-a)}{b}\right)\right] & \text{si} \quad \min(x_1,\ldots,x_n) \geq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \displaystyle\frac{1}{b^n}\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-a)}{b}\right) & \text{si} \quad \min(x_1,\ldots,x_n) \geq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \displaystyle\frac{1}{b^n}\exp\left(-\frac{1}{b}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i - na\right)\right) & \text{si} \quad \min(x_1,\ldots,x_n) \geq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \boxed{L_n(a,b) \text{ avec } S = \sum_{i=1}^{n} x_i \text{ et } A = \min(x_1,\ldots,x_n)} \qquad (31)
\end{aligned}$$

(b) D'après la **partie 1** et selon (31) nous avons :

$$\begin{aligned}
a_0 &= A \\
&= \min(x_1,\ldots,x_n) \qquad (32) \\
b_0 &= \frac{S - An}{n} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i - n\min(x_1,\ldots,x_n)}{n} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \min(x_1,\ldots,x_n) \qquad (33)
\end{aligned}$$

où $\min(x_1,\ldots,x_n)$ est une réalisation de la variable Y_n et $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \min(x_1,\ldots,x_n)$ est une réalisation de la variable Z_n pour un échantillon donné $(x_1,\ldots,x_n)$.

Conclusion : selon (32) et (33)

les estimations de a et b obtenues à partir de Y_n et Z_n sont les mêmes que celles données par les valeurs a_0 et b_0