CCP PC – 04 – Maths 1 -

Partie I –

1 Noyaux et images de deux matrices :

a Remarque préliminaire : les colonnes de la matrices M vérifient : $C_1 = C_2 = C_3$ et puisque le rang de M est le rang de ses vecteurs colonnes, rg(M) = rg(C_1, C_4) ; or ces deux colonnes ne sont pas proportionnelles : rg(M) = 2 = rg(^{t}M).

En appliquant la formule du rang, on obtient alors : dim(Ker(M)) = dim(Ker(^{t}M)). Intérêt pratique : il suffira d'en connaître une famille libre de deux vecteurs pour en connaître une base.

Soit X = ^{t}(x, y, z, t) ; $X \in$ Ker(M) $\Leftrightarrow$ MX = 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z-2t=0 \\ x+y+z=0 \\ 2t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ t=0 \end{cases}$ Il reste à présent à déterminer une base de Ker(M) ;

i Soit on utilise la remarque du départ : la famille des deux vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une famille libre de deux vecteurs de Ker(M) ; c'est donc une base de Ker(M).

ii Soit : on écrit une coordonnée en fonction des autres en utilisant la 1° équation :

$X \in$ Ker(M) $\Leftrightarrow$ X = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; la famille des colonnes $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une famille libre et génératrice de Ker(M) ; c'est une base de Ker(M).

On fait ensuite de même pour déterminer Ker(^{t}M) :

$X \in$ Ker(^{t}M) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ -x+y+t=0 \end{cases} \Leftrightarrow$ X = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \\ x-y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ Cette famille de deux vecteurs est une base de Ker(^{t}M).

Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, élément de Ker(M), ne vérifie pas la deuxième équation caractérisant Ker(^{t}M) ; il n'appartient pas à Ker(^{t}M), ce qui signifie que Ker(M) $\not\subset$ Ker(^{t}M).

De même le vecteur ^{t}(0, 1, 0, -1), élément de Ker(^{t}M), ne vérifie pas l'équation : t = 0, donc n'appartient pas à Ker(M). Conclusion : Ker(^{t}M) $\not\subset$ Ker(M).

b Im(M) est de dimension 2 et est engendré par la famille des colonnes de M ; comme rg(M) = dim(Im(M)) = 2 et que les trois premières colonnes de M sont égales : Im(M) a pour base la famille des deux vecteurs colonnes : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ (on peut aussi diviser le dernier vecteur par 2).

De même $\mathrm{Im}({}^t M)$ a pour base la famille $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Si le vecteur $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, vecteur de Im(M), appartenait à $\mathrm{Im}({}^t M)$, alors $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ a et b étant deux réel ; on aurait alors : 1 = a, 0 = a. : inutile d'écrire les autres équations. C'est impossible.

Conclusion : $\mathrm{Im}(M) \not\subset \mathrm{Im}({}^t M)$.

Si $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, vecteur de $\mathrm{Im}({}^t M)$, était élément de Im(M), il s'écrirait : $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-2\\2\\0\\2\end{pmatrix}$; en particulier : a = 0 (3° équation), b = 0 (2° équation) et 1 = 2b : impossible.

On peut alors conclure : $\mathrm{Im}({}^t M) \not\subset \mathrm{Im}(M)$.

2 Noyau et image de ${}^tAA$ et $A\,{}^tA$:

a Soit $X \in \mathrm{Ker}(A)$; alors $AX = 0$ et ${}^tAAX = {}^tA0 = 0$: $X \in \mathrm{Ker}({}^tAA)$;

on a ainsi prouvé : $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}({}^tA)$.

Réciproquement, soit $X \in \mathrm{Ker}({}^tAA)$; alors ${}^tAAX = 0$, ce qui entraîne : ${}^tX\,{}^tAAX = 0$ soit $\| AX \|^2 = 0$ (norme euclidienne sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$: $AX = 0$ et $X \in \mathrm{Ker}(A)$. Soit : $\mathrm{Ker}({}^tAA) \subset \mathrm{Ker}(A)$.

Conclusion : $\mathrm{Ker}({}^tAA) = \mathrm{Ker}(A)$

En remplaçant A par ${}^tA$, ${}^tA$ est remplacée par ${}^t({}^tA) = A$, ce qui donne : $\mathrm{Ker}(A\,{}^tA) = \mathrm{Ker}({}^tA)$.

b Par définition : $\mathrm{rg}({}^tA\,A) = \dim(\mathrm{Im}({}^tA\,A))$; puisque ${}^tAA$ est une matrice carrée de taille p, c'est la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ dans lui-même ; la formule du rang permet d'écrire :

$\mathrm{rg}({}^tA\,A) = p - \dim(\mathrm{Ker}({}^tA\,A)) = p - \dim(\mathrm{Ker}(A))$

Or A est une matrice de taille (n, p) : c'est la matrice d'une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$; l'espace vectoriel de départ est de dimension p et (formule du rang) : $p - \dim(\mathrm{Ker}(A)) = \dim(\mathrm{Im}(A))$. Finalement : $\mathrm{rg}({}^tAA) = \mathrm{rg}(A)$.

De même, en remplaçant A par ${}^tA$: $\mathrm{rg}(A\,{}^tA) = \mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A)$.

c La question b indique que $\mathrm{Im}({}^tAA)$ et $\mathrm{Im}({}^tA)$ ont même dimension ; soit $X \in \mathrm{Im}({}^tAA)$; alors $\exists\, Y \in M_{p,1}(\mathbb{R}) \,/\, X = {}^tAAY = {}^tA\,(AY) \in \mathrm{Im}({}^tA)$: $\mathrm{Im}({}^tAA) \subset \mathrm{Im}({}^tA)$; puisque ces deux espaces vectoriels ont même dimension (finie) ils sont égaux. $\mathrm{Im}({}^tAA) = \mathrm{Im}({}^tA)$. De même, en remplaçant A par ${}^tA$: $\mathrm{Im}(A\,{}^tA) = \mathrm{Im}(A)$.

3 Propriétés de la matrice G :

a La base $(e_1, \ldots, e_r)$ étant orthonormale, $< x_i, x_j> = \sum_{k=1}^{r} b_{k,i} b_{k,j} = g_{i,j}$

En utilisant la formule donnant le produit de deux matrices : $({}^tB\,B)_{i,j} = \sum_{k=1}^{r} \left({}^tB\right)_{i,k} B_{k,j} = \sum_{k=1}^{r} b_{k,i} b_{k,j}$

les deux matrices G et ${}^tBB$ ont même taille (carrées de taille q) et mêmes coefficients ; elles sont égales. On utilise alors la question I2b pour A = B : $\mathrm{rg}(G) = \mathrm{rg}({}^tBB) = \mathrm{rg}(B)$; le rang de B est égal au rang de ses vecteurs colonnes, qui est le rang du système S : $\boxed{\mathrm{rg}(G) = \mathrm{rg}(S) = r}$.

b La matrice G est réelle, symétrique car ${}^tG = {}^tB\,{}^t({}^tB) = {}^tBB = G$, donc diagonalisable (plus précisément, il existe une matrice P orthogonale : $P^{-1} = {}^tP$ et une matrice D diagonale telles que $G = PDP^{-1}$). Soit a une valeur propre de G, X un vecteur propre associé (ce qui implique : $X \neq 0$) ; alors

$GX = aX = {}^tB\,BX$; on multiplie à gauche par ${}^tX$: $a\,\| X \|^2 = {}^tX{}^tB\,BX = {}^t(BX)\,BX = \| BX \|^2 \geq 0$
Puisque le vecteur X est non nul, $\| X \|^2 > 0$ et $a \geq 0$. Conclusion : les valeurs propres de G sont positives.

c En reprenant les notations de la question b : $G = PD.P^{-1}$; G et D sont semblables : det(G) = det(D) ; mais D est diagonale ; son déterminant est le produit de ses termes diagonaux, qui sont les valeurs propres de G, positives : $\det(G) = \det(D) = \gamma(x_1, \ldots, x_q) \geq 0$
$\gamma(x_1, \ldots, x_q) = 0 \Leftrightarrow$ G non inversible $\Leftrightarrow \mathrm{rg}(G) = r < q \Leftrightarrow \{ x_1, \ldots, x_q\}$ est liée.

d Dans le cas q = 2, la matrice G est $G = \begin{pmatrix} \|x_1\|^2 & < x_1, x_2 > \\ < x_1, x_2 > & \|x_2\|^2 \end{pmatrix}$
$\det(G) = \| x_1 \|^2 .\| x_2 \|^2 - < x_1, x_2>^2 \leq 0$, soit $\left| <x_1, x_2> \right| \leq \| x_1 \|.\| x_2 \|$ (inégalité de Cauchy-Schwarz) et il y a égalité si et seulement si det(G) = 0 ie (question c) $\{x_1, x_2\}$ est liée (cas d'égalité)

4 Quitte à répéter l'opération plusieurs fois, on se ramène au cas où l'on ajoute à l'un des vecteurs x_i un multiple d'un autre, par exemple (les vecteurs jouent des rôles symétriques) : $x_1 \leftarrow x_1 + ax_2$. La nouvelle matrice G' diffère de G par ses premières ligne et colonne soit :

$$G' = \begin{pmatrix} < x_1, x_1 > +2a < x_1, x_2 > +a^2 < x_2, x_2 > & < x_1, x_2 > +a < x_2, x_2 > & \cdots & < x_1, x_n > +a < x_2, x_n > \\ < x_1, x_2 > +a < x_2, x_2 > & < x_2, x_2 > & \cdots & < x_2, x_n > \\ < x_1, x_3 > +a < x_2, x_3 > & < x_2, x_3 > & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ < x_1, x_n > +a < x_2, x_n > & < x_2, x_n > & \cdots & < x_n, x_n > \end{pmatrix}$$

On calcule det(G') en effectuant l'opération élémentaire suivante sur les lignes : $L_1 \leftarrow L_1 - aL_2$:

$$\det(G') = \det \begin{pmatrix} < x_1, x_1 > +a < x_1, x_2 > & < x_1, x_2 > & \cdots & < x_1, x_n > \\ < x_1, x_2 > +a < x_2, x_2 > & < x_2, x_2 > & \cdots & < x_2, x_n > \\ < x_1, x_3 > +a < x_2, x_3 > & < x_2, x_3 > & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ < x_1, x_n > +a < x_2, x_n > & < x_2, x_n > & \cdots & < x_n, x_n > \end{pmatrix}$$ puis $C_1 \leftarrow C_1 - aC_2$:

$$\det(G') = \det \begin{pmatrix} < x_1, x_1 > & < x_1, x_2 > & \cdots & < x_1, x_n > \\ < x_1, x_2 > & < x_2, x_2 > & \cdots & < x_2, x_n > \\ < x_1, x_3 > & < x_2, x_3 > & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ < x_1, x_n > & < x_2, x_n > & \cdots & < x_n, x_n > \end{pmatrix} = \det(G)$$: le déterminant n'est pas modifié.

Conclusion : $\gamma(x_1, \ldots, x_q)$ reste inchangé en ajoutant à un vecteur une combinaison linéaire des autres.

5 On suppose $q \geq 2$:

a Puisque $p_L(x_1)$ appartient à L, il est combinaison linéaire des vecteurs $x_2, \ldots, x_q$; on peut appliquer le résultat précédent en enlevant à x_1 le vecteur $p_L(x_1)$, combinaison linéaire des autres vecteurs : $\gamma(x_1, \ldots, x_q) = \gamma(x_1 - p_L(x_1), \ldots, x_q) = \gamma(h_1, \ldots, x_q)$ Par construction (la projection est orthogonale) le vecteur h_1 est orthogonal à tout vecteur de L : $< h_1, x_k> = 0$ pour $k \geq 2$; on note G' la matrice obtenue en supprimant la 1° ligne et la 1° colonne de G ;
$$\gamma(h_1, \ldots, x_q) = \begin{vmatrix} < h_1, h_1 > & O_{1,q-1} \\ O_{q-1,1} & G' \end{vmatrix} = \| h_1 \|^2 \det(G') = \| h_1 \|^2 \gamma(x_2, \ldots, x_q).$$

b $\boxed{\text{On suppose } r = q}$, ie la famille $\{x_1, \ldots, x_q\}$ est libre.

i Puisque h_1 est la projection orthogonale de x_1 sur $L^\perp$: $\| h_1 \| \leq \| x_1 \|$ ce qui entraîne :
$\gamma(x_1, \ldots, x_q) \leq \| h_1 \|^2 \gamma(x_2, \ldots, x_q)$
Il y a égalité si et seulement si $\| h_1 \|^2 \gamma(x_2, \ldots, x_q) = \| x_1 \|^2 \gamma(x_2, \ldots, x_q)$. Puisque $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est libre, la famille extraite $\{x_2, \ldots, x_n\}$ l'est aussi et (question I3c) $\gamma(x_2, \ldots, x_q) \neq 0$. Il y a

donc égalité si et seulement si $\| h_1 \|^2 = \| x_1 \|^2$ soit (théorème de Pythagore :
$\| h_1 \|^2 + \| p_L(x_1) \|^2 = \| x_1 \|^2$) $p_L(x_1) = 0$: équivalent à x_1 est orthogonal à L.

ii Se fait en montrant par une récurrence immédiate sur $k \le r$:
$\gamma(x_1, \ldots, x_q) \le \gamma(x_1)\ldots\gamma(x_k)\, \gamma(x_{k+1}, \ldots, x_q)$ (remarque : $\gamma(x) = \| x \|^2$)
Il y a égalité si et seulement si il y a égalité dans chacune des inégalités précédentes:
(1) x_1 est orthogonal à $x_2, \ldots, x_q$,
(2) x_2 est orthogonal à $x_3, \ldots , x_q$
(3) …
(4) x_{q-1} orthogonal à x_q
ie les x_i sont deux à deux orthogonaux.

6 Majoration d'un déterminant :

a Soit $S = \{C_1, \ldots, C_n\}$, où C_i est la i° colonne de A. Puisque A est inversible, rg(S) = rg(A) = n.
Soit G la matrice carrée de taille n définie par : $g_{i,j} = < C_i, C_j>$; alors (question I3a) $G = {}^tBB$, où B est la matrice définie dans cette question. Mais puisque B est la matrice des vecteurs colonnes de A dans la base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ $A = PBP^{-1}$, où P est la matrice de passage de la base canonique à la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. A et B sont semblables, donc ont même déterminant.

Comme $G = {}^tBB$, $\det(G) = \det(B^2) = \det(A)^2 = \gamma(C_1, \ldots, C_q) \le \gamma(C_1)\ldots\gamma(C_n) = \prod_{k=1}^{n} \|C_k\|^2$, ce qui donne l'inégalité demandée.

Il y a égalité si et seulement si $\gamma(C_1, \ldots, C_q) \le \gamma(C_1)\ldots\gamma(C_n)$ ie les vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux (on peut appliquer la question précédente car la famille $\{C_1, \ldots, C_n\}$est libre.

b $\| C_k \|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}^2 \le n$ et $\left|\det(A)\right| \le (\sqrt{n})^n = n^{n/2}$.

Il y a égalité si et seulement il y a égalité dans toutes les inégalités utilisées, ie tous les vecteurs colonnes ont pour norme $\sqrt{n}$ et les vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux. Soit : pour chaque i et k variant de 1 à n $a_{i,k}^2 = 1$ (A est une matrice à coefficients dans {-1 , 1}) et les vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux.

Partie II –

1 Il y a 4 possibilités pour la 1° colonne :

a Si $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a$, alors $C_2 = \pm b$, avec $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b De même si $C_1 = -a$, $C_2 = \pm b$

c Et si $C_1 = \pm b$, $C_2 = \pm a$.

Il y a en tout 8 matrices éléments de H_2 (4 possibilités pour C_1, 2 pour C_2 une fois C_1 choisie)

2 Propriétés des matrices de H_n :

a Soit $A \in H_n$; alors $({}^tAA)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,j}$ (cf calcul de la question I3) ie $({}^tAA)_{i,j} = < C_{i,} C_j>$

i Si $i \ne j$, les colonnes C_i et C_j sont orthogonales et $({}^tAA)_{i,j} = 0$: la matrice ${}^tAA$ est diagonale.

ii Si i = j, $({}^tAA)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2 = n$ ($a_{i,k}^2 = 1$)

Conclusion: $\boxed{{}^tAA = n\, I_n}$

b La matrice $A = \sqrt{n}\, I_n$ vérifie cette dernière propriété mais n'est pas dans H_n (ses coefficients sont 0 et $\sqrt{n}$)

c Si A vérifie ${}^tAA = nI_n$ alors pour tous i et j compris entre 1 et n $< C_i, C_j> = n\,\delta_{i,j}$; en particulier lorsque i et j sont distincts, les colonnes C_i et C_j sont orthogonales et A appartient à H_n puisque ses coefficients sont à valeurs dans {-1 , 1}.

Remarque : l'égalité : ${}^tAA = nI_n$ est équivalente à ${}^t(A/\sqrt{n})\,(A/\sqrt{n}) = I_n$ ie $A/\sqrt{n}$ est une matrice orthogonale.

3 Etude de quelques produits :

a $({}^tP^{(\sigma)}A)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} ({}^tP^{(\sigma)})_{i,k}(A)_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{k,\sigma(i)}a_{k,j}$; or $\delta_{k,\sigma(i)} = 0$ lorsque $k \neq \sigma(i)$. Il ne reste dans la somme que le terme correspondant à $k = \sigma(i)$, ce qui donne : $({}^tP^{(\sigma)}A)_{i,j} = a_{\sigma(i),j}$.

Conclusion : la ligne i de la matrice ${}^tP^{(\sigma)}A$ est la ligne $\sigma(i)$ de la matrice A.

b De la même manière $(AP^{(\sigma)})_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\delta_{k,\sigma(j)} = a_{i,\sigma(j)}$: la colonne j de $AP^{(\sigma)}$ est la colonne $\sigma(j)$ de la matrice A.

c Soit A appartenant à H_n.

i Puisque A est à coefficients dans {-1, 1}, il en est de même de ${}^tA$. De plus : ${}^tAA = nI_n$ entraîne ${}^tA = nA^{-1}$ et ${}^t({}^tA)\,{}^tA = A.{}^tA = A(nA^{-1}) = nI_n$. En utilisant II 2c : ${}^tA \in H_n$.

ii La matrice ${}^tP^{(\sigma)}A$ est obtenue en permutant des lignes de la matrice A ; elle est à coefficients dans {-1, 1}. De plus permuter des lignes de la matrice A revient en fait à écrire les vecteurs-colonnes de A : $C_1, \dots, C_n$ dans la base $\{e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}\}$. Les colonnes de ${}^tP^{(\sigma)}A$ sont donc deux à deux orthogonales. On peut conclure : ${}^tP^{(\sigma)}A \in H_n$.

<u>Autre méthode</u> : par un calcul direct. ${}^t({}^tP^{(\sigma)}A)\,{}^tP^{(\sigma)}A = {}^tA\,P^{(\sigma)}\,{}^tP^{(\sigma)}A$. On est amené à calculer la matrice $Q = P^{(\sigma)}\,{}^tP^{(\sigma)}$; par définition $q_{i,j} = \sum_{k=1}^{n}\delta_{i,\sigma(k)}\delta_{j,\sigma(k)} = \delta_{i,j}$ (car le seul terme $\delta_{j,\sigma(k)}$ non nul est obtenu pour $\sigma(k) = j$. Conséquence : $P^{(\sigma)}\,{}^tP^{(\sigma)} = I_n$ et ${}^t({}^tP^{(\sigma)}A)\,{}^tP^{(\sigma)}A = {}^tAA = nI_n$. On retrouve le résultat précédent.

iii La matrice $AP^{(\sigma)}$ est obtenue en permutant des colonnes de A ; ses coefficients sont à valeur dans {-1, 1}. Et puisque les colonnes de la matrice A sont deux à deux orthogonales, celles de $AP^{(\sigma)}$) également . Conséquence : $AP^{(\sigma)} \in H_n$

Remarque : on peut aussi calculer ${}^t(AP^{(\sigma)})AP^{(\sigma)} = {}^tP^{(\sigma)}\,{}^tAA\,P^{(\sigma)} = nI_n$

iv Soit Δ matrice diagonale dont les coefficients sont les termes d_i, éléments de {-1 , 1}. Soient a et δ les endomorphismes de matrices respectives A et Δ relativement à la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Alors $(a\circ\delta)(e_i) = a(\delta(e_i)) = a(d_ie_i) = d_ia(e_i)$; la matrice $A\Delta$ de l'endomorphisme $a\circ\delta$ est obtenue en multipliant chaque colonne C_i de A par d_i. Puisque $d_i = \pm 1$, les coefficients de $A\Delta$ sont à valeur dans {-1, 1} et les colonnes restent orthogonales deux à deux. $A\Delta \in H_n$.

v De même $(\delta\circ a)(e_j) = \delta\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}d_ie_i$: chaque i° ligne $C_{i'}$ de ΔA (matrice de l'endomorphisme ΔA) est obtenue en multipliant la ligne C_i correspondante de A par d_i. Les coefficients de ΔA sont à valeur dans {-1 , 1} ; de plus

$< C_i', C_j'> = \sum_{k=1}^{n}\left(d_ka_{k,i}\right)\left(d_k, a_{k,j}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,j}$ (car $d_k = \pm 1$) soit $< C_i', C_j'> = < C_i, C_j> = 0$: les colonnes sont deux à deux orthogonales : $\Delta A \in H_n$.

4 Construction de matrices de H_{2n} :

a On effectue le produit par blocs :

$${}^t(A\otimes B)\,(A\otimes B) = \begin{pmatrix} a_{1,1}{}^tB & a_{2,1}{}^tB \\ a_{1,2}{}^tB & a_{2,2}{}^tB \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2)\,{}^tBB & (a_{1,2}a_{1,1} + a_{2,2}a_{2,1})\,{}^tBB \\ (a_{1,2}a_{1,1} + a_{2,2}a_{2,1})\,{}^tBB & (a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2)\,{}^tBB \end{pmatrix}$$

Or $a_{1,2}a_{1,1} + a_{2,2}a_{2,1}$ est le produit scalaire des deux colonnes de A, donc vaut 0 ; de plus $a_{1,1}^2 = a_{2,2}^2 = 1$, ce qui donne : ${}^t(A\otimes B)\,(A\otimes B) = \begin{pmatrix} 2\,{}^tBB & O \\ O & 2\,{}^tBB \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} nI_n & O \\ O & nI_n \end{pmatrix} = 2nI_{2n}$: $A\otimes B \in H_{2n}$.

b H_2 est non vide ; soit $n \geq 1$ tel que $E_{2^n} \neq \varnothing$; en utilisant le procédé de la question a, $E_{2^{n+1}} \neq \varnothing$.
Conclusion : pour tout $n \geq 1$: $E_{2^n} \neq \varnothing$ ie E contient toutes les puissances de 2 (y compris pour n = 0, dans ce cas $A = (1)$ appartient à H_1).

c Le problème est de construire un élément de H_4 qui ne soit pas de cette forme ; on commence avec les deux premières colonnes de cette matrice, de sorte que les deux matrices extraites de taille 2 ne soient pas proportionnelles, par exemple $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & x & a \\ 1 & -1 & y & b \\ \hline 1 & -1 & z & c \\ 1 & 1 & t & d \end{array}\right)$ La 3° colonne doit vérifier :

$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y-z+t=0 \end{cases}$; par exemple x = z = 1, y = t = -1 ; ainsi $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & -1 & b \\ \hline 1 & -1 & 1 & c \\ 1 & 1 & -1 & d \end{array}\right)$. Il ne reste plus qu'à trouver la 4° colonne : $\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ a-b-c+d=0 \\ a-b+c-d=0 \end{cases}$ et par exemple a = b= 1, c = d = -1. Une matrice élément de H_4 non construite d'après le procédé de la question est $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$

5 Choix d'éléments de H_n.

a Soit $A \in H_n$. Si on multiplie une ou plusieurs lignes de A par –1, la nouvelle matrice appartient encore à H_n (cf II3c ; c'est ΔA, avec tous les coefficients diagonaux de Δ égaux à 1 pour les lignes non modifiées et $d_i = -1$ pour les autres). On multiplie alors par –1, chaque ligne dont le premier terme est –1. La nouvelle matrice obtenue est élément H_n, et tous les termes de la 1° colonne sont alors égaux à 1.
Soit p le nombre de 1 (un) dans la colonne 2 et q le nombre de –1 dans cette même colonne. Alors $p+q = n$ (nombre de termes de la colonne) et $< C_1, C_2 > = p - q = 0$: p = q et n = 2p : $\boxed{\text{n est pair}}$.

b Lorsqu'on permute des lignes de la matrice A, la nouvelle matrice est encore élément de H_n. On permute alors les lignes de sorte que les m premiers termes de la colonne 2 soient égaux à 1, les autres sont alors –1. Les termes de la colonne 1 sont toujours égaux à 1 (il n'y avait que 1 sur cette colonne). On note p_1 et p_2 le nombre de 1 et –1 sur les m premiers termes de la colonne 3 (leur somme vaut m) , et p_3 et p_4 le nombre de 1 et –1 sur les m derniers termes de la colonne 3 (id)
Alors $< C_1, C_3 > = p_1 - p_2 + p_3 - p_4 = 0$
$< C_2, C_3 > = p_1 - p_2 - p_3 + p_4 = 0$
En faisant la somme : $p_1 = p_2$; puis $p_3 = p_4$
De plus $p_1 + p_2 = m = p_3 + p_4 = 2p_1$; m est pair et $\boxed{\text{n est multiple de 4.}}$

Partie III –

1 Soit a une valeur propre de s , X un vecteur propre associé à cette valeur propre ; alors ${}^tXSX = {}^tX(aX) = a\,.\|X\|^2 > 0$;$\|X\|^2 > 0$ (X non nul) et a > 0.

Réciproquement, on suppose que toutes les valeurs propres de S sont strictement positives. Puisque S est symétrique réelle, il existe D diagonale et P orthogonale telles que $S = PDP^{-1}$, les coefficients diagonaux d_i de D étant les valeurs propres de S (S et D sont semblables). Les nombres d_i sont donc strictement positifs. Pour $X = 0$ ${}^tXSX = {}^tXPDP^{-1}X = {}^tY\,D\,Y$ avec $Y = P^{-1}X = {}^tPX$ (P orthogonale).

On note $Y = {}^t(y_1, \ldots, y_n)$; ${}^tXSX = \sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2 \geq 0$ car tous les termes d_i sont positifs. De plus, Y est non nul (car X non nul et P inversible) ; il existe i tel que $y_i \neq 0$ et $d_i y_i^2 > 0$: ${}^tXSX > 0$. L'équivalence est ainsi prouvée.

2 <u>Existence de la décomposition</u> :

a ${}^t({}^tMM) = {}^tM\,{}^t({}^tM)) = {}^tMM$: M est symétrique.
Soit $X \neq 0$; ${}^tX\,{}^tM\,MX = \| MX \|^2 > 0$ car M est inversible et X non nul : ${}^tM.M$ est définie positive.

b Etant symétrique réelle, il existe D diagonale et P orthogonale telles que ${}^tMM = PDP^{-1}$, les coefficients diagonaux d_i de D étant strictement positifs. On pose alors $\delta_i = \sqrt{d_i} > 0$ et Δ la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les nombres δ_i. Alors $\Delta^2 = D$ et si on pose $S = P\Delta P^{-1}$:
$S^2 = P\Delta^2P^{-1} = PDP^{-1} = {}^tMM$.
S est symétrique (car P orthogonale : $P^{-1} = {}^tP$ et Δ diagonale), définie positive car ses valeurs propres sont les nombres $\delta_i > 0$ (S et Δ sont semblables).

c 0 n'est pas valeur propre de S (ses valeurs propres sont > 0) : S est inversible.
Enfin ${}^t(MS^{-1})\,MS^{-1} = S^{-1}\,{}^tM\,M\,S^{-1}$ (S est symétrique)
$= S^{-1}\,S^2\,S^{-1} = I_n$: $Q = MS^{-1}$ est orthogonale

d Soit M = Q.S, où Q est orthogonale et S symétrique.

3 <u>Recherche d'une borne supérieure</u>.

a Les deux matrices Σ et D sont semblables, donc ont même trace : $tr(\Sigma) = tr(D) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

b Σ étant symétrique réelle, il existe P orthogonale telle que : $\Sigma = PDP^{-1}$.
$tr(\,Q\Sigma) = tr(\,(QPD)\,P^{-1}) = tr(\,P^{-1}\,QPD)$ car tr(AB) = tr(BA) , et $P^{-1}QP$, produit de matrices orthogonales, est une matrice orthogonale Q_1. On note $Q_1 = (q_{i,j})$ et $D = (d_{i,j})$

$$tr(\,Q_1D) = \sum_{i=1}^{n} (Q_1D)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} q_{i,k}\underbrace{d_{k,i}}_{=0 \text{ si } k\neq i} = \sum_{i=1}^{n} q_{i,i}\,d_i$$

Puisque Q_1 est orthogonale, ses colonnes sont normées, ce qui entraîne que chaque coefficient de la colonne est en valeur absolue majoré par 1 ; puisque $d_i \geq 0$ pour tout i:

$tr(Q_1D) \leq \sum_{i=1}^{n} d_i = tr(D) = tr(\Sigma)$. Conclusion : $tr(Q\Sigma) \leq tr(\Sigma)$ pour Q orthogonale.

c L'ensemble sup{ $tr(Q\Sigma)$, $Q \in O_n(\mathbb{R})$ } est un ensemble non vide de $\mathbb{R}$ (car $O_n(\mathbb{R})$ est non vide), majoré par $tr(\Sigma)$, donc admet une borne supérieure a telle que $a \leq tr(\Sigma)$.
Mais I_n est orthogonale, donc $tr(I_n\Sigma) = tr(\Sigma) \in \{ tr(Q\Sigma), Q \in O_n(\mathbb{R}) \}$
Conclusion : $\boxed{\sup\{ tr(Q\Sigma), Q \in O_n(\mathbb{R}) \} = tr(\Sigma)}$ (et cette borne supérieure est en fait un maximum).

4 Une majoration :

a Pour tout (i,j) $a_{i,j} \leq 1$: $f(A) \leq \sum_{1\leq i\leq j\leq n} 1 = \frac{n(n+1)}{2}$ (il y a autant de 1 que de termes sur et au-dessus de la diagonale principale de A) L'application f est bornée, donc admet une borne supérieure.
Remarque : l'ensemble H_n est fini (card(H_n) ≤ 2^n^2 : car pour chaque coefficient de $A \in H_n$ il y a deux possibilités au plus 1 et –1) ; cette borne supérieure est en fait un maximum et la valeur de ce maximum est un entier.

b $\quad \mathrm{tr}(AT) = \sum_{i=1}^{n}(AT)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\underbrace{t_{k,i}}_{=0 \text{ si } k<i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} a_{i,k}.1 = f(A).$

c $\quad$ f(A) = tr(ARS) or (cf remarque de la partie II) A/√n est orthogonale, ie A = √n P, où P est une matrice orthogonale : f(A) = √n . tr(PRS) ; PR, produit de deux matrices orthogonales, est une matrice orthogonale, ce qui entraîne (question III3b) : f(A) ≤ √n tr(S).
Conclusion : $\alpha_n = \sup\{ f(A), A \in H_n \} \leq \sqrt{n}.\mathrm{tr}(S)$.

d $\quad$ Dans le cas n = 2, $\alpha_2 \leq n(n+1)/2 = 3$; soit A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; A appartient à H_2 et f(A) = 3.

Conclusion : $\boxed{\alpha_2 = 3.}$

On applique le procédé de la question III2 pour déterminer S : T = RS, donc $S^2 = {}^tTT = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Le polynôme caractéristique de S^2 est $P(x) = (2-x)(1-x) - 1 = x^2 - 3x + 1$ de racines
$a = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5}) = \frac{1}{4}(6+\sqrt{5}) = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})^2$ et $b = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) = \frac{1}{4}(1-\sqrt{5})^2$
$\mathrm{tr}(S) = \sqrt{a} + \sqrt{b} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) + \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) = \sqrt{5}$ et $\boxed{\sqrt{2}.\ \mathrm{tr}(S) = \sqrt{10}} > 3 = \alpha_2$.