

Les erreurs d'énoncé repérées et les imprécisions sont signalées en bleu.

- 1 *Attention erreur de signe dans l'introduction ; le TMD est soumis à la force de rappel élastique $f_1 = -k_1 u$.*

L'application du théorème de la quantité de mouvement, dans la référentiel terrestre (galiléen), au système {tour,TMD} donne la première équation de [A], et son application au système {TMD} donne la seconde équation (il faut considérer que la force extérieure $f_0(t)$ est appliquée à la tour).

Ce système se met bien sous la forme [B] en posant $\alpha = \frac{m_1}{m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $a_0(t) = \frac{f_0(t)}{m}$, $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$, et $\eta_1 = \frac{h_1}{2\sqrt{k_1 m_1}}$.

ω_0 et ω_1 sont les pulsations propres d'oscillateurs harmoniques formés respectivement d'un ressort de raideur k et d'une masse m , et d'un ressort de raideur k_1 et d'une masse m_1 .

- 2 *Attention erreur d'énoncé : $\beta = \frac{\omega_1}{\omega_0} = \sqrt{\frac{k_1}{\alpha k}}$. De plus $\underline{H_1}$ s'exprime en fonction de β , de z , et de η_1 .*

L'écriture de (B2) en notation complexe mène à $\underline{H_1}(z) = \frac{U}{X} = \frac{z^2}{-z^2 + 2i\eta_1\beta z + \beta^2}$.

Nature de cette fonction : passe-haut d'ordre 2.

$|\underline{H_1}|$: plutôt grand car on souhaite des oscillations de la tour d'amplitude faible.

- 3 L'écriture de (B1) en notation complexe, dans laquelle on injecte $\underline{U} = \underline{H_1 X}$ et $\underline{X} = -\frac{1}{\omega^2} \underline{B}$, donne l'expression demandée.

$|\underline{H_2}|$: plutôt petit car, pour une excitation $a_0(t)$ donnée, on souhaite que l'accélération de la tour $b(t)$ soit la plus faible possible.

- 4 Si $\eta_1 = 0$, alors
- $$(1 + \alpha)\ddot{x} + \alpha\ddot{u} + \omega_0^2 x = a_0(t) \tag{B1}$$
- $$\ddot{x} + \ddot{u} + \omega_1^2 u = 0 \tag{B2}$$

Remarque : contrairement à ce que dit l'énoncé, on a laissé le terme d'excitation $a_0(t)$ car sinon la fonction de transfert $\underline{H_2}$ n'a plus grand sens.

Et on a $\underline{H_1}(z) = \frac{U}{X} = \frac{z^2}{-z^2 + \beta^2}$ et $\underline{H_2}(z) = \frac{z^2(-z^2 + \beta^2)}{z^2(-z^2 + (1+\alpha)\beta^2 + 1) - \beta^2}$.

Choix de α le plus grand possible : pour avoir $|\underline{H_2}|$ le plus petit possible. En pratique, il ne semble pas que le TMD puisse avoir une masse prépondérante dans l'ensemble de la tour ("c'est un oscillateur généralement dissimulé au sommet de la structure"); α est vraisemblablement limité à quelques pourcents (voir valeurs numériques plus loin dans l'énoncé).

- 5 Lorsque $\alpha \rightarrow 0$, alors
- $$\ddot{x} + \omega_0^2 x = a_0(t) \tag{B1}$$
- $$\ddot{x} + \ddot{u} + \omega_1^2 u = 0 \tag{B2}$$

On voit sur (B1) que le TMD n'a dans ce cas aucun rôle sur le mouvement propre de la tour (et donc ce dispositif n'a aucun intérêt); et sur (B2) que le rôle de la tour est fondamental pour le mouvement propre du TMD : $\ddot{x}(t)$ apparaît comme un terme d'excitation pour

$u(t)$.

Par ailleurs, lorsque $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow +\infty$ et donc $\underline{H}_1 \rightarrow 0$ et $\underline{H}_2(z) \rightarrow \frac{z^2}{z^2-1}$.

Enfin, on voit sur l'expression de \underline{H}_1 obtenue au 4) que c'est un réel positif si $z < \beta$ (ce qui équivaut à $\omega < \omega_1$) : le mouvement du TMD est alors en phase avec celui de la tour (on parle ici du mouvement *relatif* du TMD par rapport à la tour, celui qui est décrit par $u(t)$). Inversement, si $\omega > \omega_1$, alors \underline{H}_1 est un réel négatif et le mouvement du TMD est en opposition de phase avec celui de la tour.

- 6 Comment peut-on ici *conclure* sur le rôle du paramètre h_1 ??? On a seulement supposé que $h_1 = 0$, ce qui est un peu maigre pour deviner ce qui se passerait si h_1 était non nul !!! Faut-il répondre que h_1 va contribuer à amortir les oscillations de la tour en dissipant de l'énergie ??? ce n'est en tous les cas pas une *conclusion* que l'on peut tirer de ce qui précède...
- 7 Lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$, $\beta \rightarrow 0$ et donc $\underline{H}_1 \rightarrow -1$ et $\underline{H}_2 \rightarrow \frac{-z^2}{-z^2 + \frac{k_1}{k} + 1}$. Interprétation de $\underline{H}_1 \rightarrow -1$: $u(t) = -x(t)$ et donc en réalité le TMD est immobile dans le référentiel terrestre.
- 8 $\underline{H}_1(z)$ est infinie pour la valeur $z_{AR} = \beta$. Et alors $\underline{H}_2(z_{AR}) = 0$; antirésonance classique : l'accélération $b(t)$ de la tour est nulle pour une excitation non nulle, son déplacement $x(t)$ est donc nul aussi.

9

$$G_2 = |\underline{H}_2| = +\infty \iff z^2 = \frac{1}{1 + \alpha + \alpha \frac{z^2}{\beta^2 - z^2}}$$

$$\iff z^4 - [1 + (1 + \alpha)\beta^2] z^2 + \beta^2 = 0$$

On a donc une équation bicarrée en z ; il est possible de mettre son discriminant sous la forme $\Delta = [(1 - \beta)^2 + \alpha\beta^2] [1 + (1 + \alpha)\beta^2 + 2\beta]$, ce qui montre qu'il est strictement positif; l'équation admet donc deux racines réelles pour z^2 , toutes deux strictement positives (car leur produit $z_{R1}^2 z_{R2}^2 = \beta^2$ est strictement positif et leur somme $z_{R1}^2 + z_{R2}^2 = 1 + (1 + \alpha)\beta^2$ également). z_{R1} et z_{R2} sont donc seulement les racines carrées respectives de ces deux racines de l'équation (et on note z_{R1} la plus petite des deux).

On a $z_{R1}^2 - \beta^2 = \frac{1 + (\alpha - 1)\beta^2 - \sqrt{\Delta}}{2}$, et l'on souhaite prouver que cette quantité est négative. $z_{R1}^2 - \beta^2 < 0 \iff 1 + (\alpha - 1)\beta^2 < \sqrt{\Delta}$. Soit $1 + (\alpha - 1)\beta^2 \leq 0$ et l'inégalité est vérifiée, soit $1 + (\alpha - 1)\beta^2 > 0$ et alors $z_{R1}^2 - \beta^2 < 0 \iff (\alpha - 1)^2 \beta^4 < (\alpha + 1)^2 \beta^4 \iff |\alpha - 1| < \alpha + 1$ (en élevant l'inégalité au carré et après simplifications). Cette dernière inégalité est vérifiée (d'après l'inégalité triangulaire) et on a donc bien démontré que $z_{R1} < \beta$.

Une démonstration similaire permet de démontrer que $z_{R2} > \beta$.

On a donc bien $z_{R1} < z_{AR} < z_{R2}$.

A.N. : $z_{R1} = 0,834$, $z_{AR} = 0,95$, $z_{R2} = 1,139$.

L'allure de la courbe représentative de $G_2(z)$ est donnée figure 1. Remarque : $G_2(z) \rightarrow 1$ lorsque $z \rightarrow \infty$.

- 10 Pour $\eta_1 \rightarrow +\infty$, $\underline{H}_1 \rightarrow 0$ ce qui veut dire que $u(t) = 0$: la tour et le TMD sont immobiles l'un par rapport à l'autre et ne forment qu'un solide. $\underline{H}_2 \rightarrow \frac{1}{1 + \alpha - \frac{1}{z^2}}$; G_2 est donc maximum (et infini) pour $z = z_\infty = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha}} = 0,953$. L'allure de la courbe représentative de $G_2(z)$ est

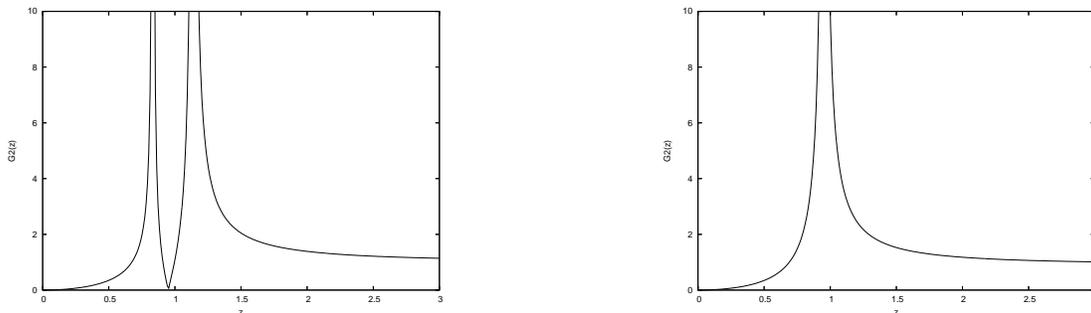


FIG. 1 – Fonction $G_2(z)$ pour la question 9 et la question 10.

donnée figure 1. Remarque : $G_2(z) \rightarrow \frac{1}{1+\alpha} = 0,909$ lorsque $z \rightarrow \infty$. On n'a plus qu'une seule résonance, et plus d'antirésonance, ce qui est normal puisqu'il n'y a plus en réalité qu'un seul oscillateur.

11 Pourquoi prend-on $\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}$? pour se situer près de l'antirésonance ? On ne l'a établie que pour $\eta_1 = 0$, on peut supposer que cela reste approximativement valable pour η_1 faible. $\beta = \sqrt{\frac{k_1}{\alpha k}} = \sqrt{\frac{k_1 m}{k m_1}}$; on peut supposer que m et k sont imposés par le choix des architectes (matériaux utilisés en particulier, dimensions de la tour). On peut donc jouer sur m_1 (mais en gardant $m_1 \ll m$), et sur k_1 pour fixer β .

12 Par comparaison avec les cas limites obtenus aux questions 9 et 10 (pour $\eta_1 = 0, 1$ on retrouve les deux résonances à z_{R1} et z_{R2} et pour les deux autres valeurs de η_1 , on se rapproche de la résonance unique à z_∞), on peut faire les associations suivantes : $A \leftrightarrow \eta_1 = 0, 1$, $B \leftrightarrow \eta_1 = 0, 3$, $C \leftrightarrow \eta_1 = 0, 6$.

13 Pour établir cette propriété, il faudrait résoudre en z l'équation $\frac{\partial G_2}{\partial \eta_1} = 0$. On trouve $z_A = 0,866$ et $z_B = 1,075$.

14 On veut G_2 le plus petit possible. On peut donc proposer comme critère que le maximum de $G_2(z)$ sur \mathbb{R} soit le plus petit possible, pour que l'amplitude de vibration lors des résonances soit la plus limitée possible. La courbe en pointillés remplit presque ce critère.

15 $\omega = \omega_1$ et donc $z = \beta$, d'où l'on tire $\underline{H}_1 = \frac{-i}{2\eta_1}$ et $\underline{H}_2 = \frac{2i\eta_1\beta^2}{1-\beta^2}$. En combinant les expressions de \underline{H}_1 et de \underline{H}_2 , et en tenant compte de $\underline{B} = -\omega_1^2 \underline{X}$, on arrive à $\underline{U} = \frac{A_0}{\omega_0^2(\beta^2-1)} = -\frac{1+\alpha}{\alpha} \frac{A_0}{\omega_0^2}$. Et donc $u(t) = -\frac{1+\alpha}{\alpha} \frac{A_0}{\omega_0^2} \cos(\omega_1 t)$. Son amplitude (l'énoncé semble appeler "amplitude maximale" l'amplitude tout court) est alors $\frac{1+\alpha}{\alpha} \frac{A_0}{\omega_0^2}$ et vaut donc $10,0A_0$.

16 En l'absence de précisions de l'énoncé, on suppose que l'excitation est toujours à la pulsation ω_1 . On a $\underline{B} = \frac{2i\eta_1 A_0}{\alpha}$, et donc l'accélération $b(t)$ a une amplitude $\frac{2\eta_1 A_0}{\alpha}$. On doit donc avoir $A_0 \leq \frac{0,015\alpha g}{2\eta_1}$. Si cette valeur est juste atteinte, alors les oscillations du TMD (par rapport à la tour) et de la tour (par rapport au sol) ont pour amplitudes respectives $\frac{0,015g(1+\alpha)}{2\eta_1 \omega_0^2} = 36,9$ cm et $\frac{0,015g(1+\alpha)}{\omega_0^2} = 14,8$ cm.

En l'absence de TMD, l'équation (B1) devient $\ddot{x} + \omega_0^2 x = a_0(t)$ et donc $\underline{X} = \frac{A_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$, d'où l'on tire $\underline{X} = \frac{1+\alpha}{\alpha} \frac{A_0}{\omega_0^2}$, soit la même que celle du TMD lorsqu'il est présent : 36,9 cm. Le TMD a ainsi permis de réduire l'amplitude des oscillations de la tour d'un facteur 2,5.

17 Si on note l la longueur du pendule simple correspondant, on a $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} = \beta\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} \frac{2\pi}{T_0}$. Or $\alpha = 0,014$ d'où l'on tire $l = \frac{(1+\alpha)gT_0^2}{4\pi^2} = 9,07$ m.

En l'absence de précisions de l'énoncé, on suppose que l'excitation est toujours à la pulsation ω_1 . Faudrait-il prendre ω_0 ? (on est en régime libre). Ceci dit $\beta = 0,993$ donc ω_1 et ω_0 sont presque identiques.

On a $\underline{B} = -\omega_1^2 \underline{X}$ donc $\underline{X} = -\frac{1}{\omega_1^2} \underline{B} = -\frac{1+\alpha}{\omega_0^2} \underline{B}$ et donc l'amplitude des oscillations de la tour est $\frac{1+\alpha}{\omega_0^2} B_{max} = \frac{1+\alpha}{\omega_0^2} \cdot 0,015g = 13,6$ cm.

18 En l'absence du TMD, la tour obéit à l'équation différentielle suivante :

$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} \iff \ddot{x} + 2\eta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0$, dont les solutions sont de la forme $x(t) = X_0e^{-\eta\omega_0 t} \cos(\omega_0\sqrt{1-\eta^2}t + \varphi)$ où X_0 et φ sont deux constantes. L'énergie de l'oscillateur évolue donc en $e^{-2\eta\omega_0 t}$. η étant vraisemblablement faible, on peut confondre la pseudo-période et la période propre, et donc on a $e^{-4\pi\eta} = 0,98$ et donc $\eta = 1,61 \cdot 10^{-3}$.

19 Pour se placer en l'absence du TMD, on peut faire les mesures avant que celui-ci ne soit en place? (sans doute difficile en pratique!), ou bien le rendre solidaire de la tour en faisant par exemple $h_1 = +\infty$ (comme la masse du TMD est faible par rapport à celle de la tour, l'ensemble tour+TMD forme alors un solide presque équivalent à la tour seule).

Pour mesurer le taux de dissipation de l'énergie en régime libre (donc par un jour sans vent), il faut alors "ébranler" la tour (comment? ou alors compter sur une rafale de vent?) et mesurer les amplitudes des oscillations successives.

20 On étudie ici la fonction de transfert \underline{H}_1 .

Pour $z \ll \beta$, $\underline{H}_1 \simeq \frac{z^2}{\beta^2}$ et donc $20 \log G_1 = 20 \log |\underline{H}_1| \simeq 40 \log(z^2) - 40 \log(\beta^2) = 40 \log \omega - 40 \log \omega_1$ et $\varphi_1 \simeq 0$ [2 π].

Pour $z \gg \beta$, $\underline{H}_1 \simeq -1$ et donc $20 \log G_1 \simeq 0$ et $\varphi_1 \simeq -\pi$ [2 π] (il convient de prendre la détermination $-\pi$ pour assurer la continuité de la phase en fonction de ω , comme une étude plus précise de celle-ci peut le montrer).

Les diagrammes de Bode asymptotiques pour le gain et pour la phase sont donnés figure 2.



FIG. 2 – Diagrammes de Bode pour le gain $G_1(\omega)$ et la phase $\varphi_1(\omega)$.

Attention erreur d'énoncé, dans cette question et toutes les suivantes : l'énoncé note η ce qui est en fait η_1 .

Pour trouver pour quelles valeurs de η_1 il apparaît un phénomène de résonance d'amplitude, il convient de rechercher à quelle condition $|\underline{H}_1(\omega)|$ admet un maximum sur \mathbb{R}^{+*} ; les calculs sont un peu lourds et mènent à la condition $\eta_1 < \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0,71$.

21 Pour obtenir une fonction de transfert du type de \underline{H}_1 , il faut prendre comme signal de sortie la tension aux bornes de la bobine (voir figure 3). On a alors la fonction de transfert

$$\frac{-\omega^2}{-\omega^2 + i\frac{R}{L}\omega + \frac{1}{LC}}$$

Pour reconstituer \underline{H}_1 , il faut le faire suivre d'un montage amplificateur inverseur de gain -1 (voir figure 3).

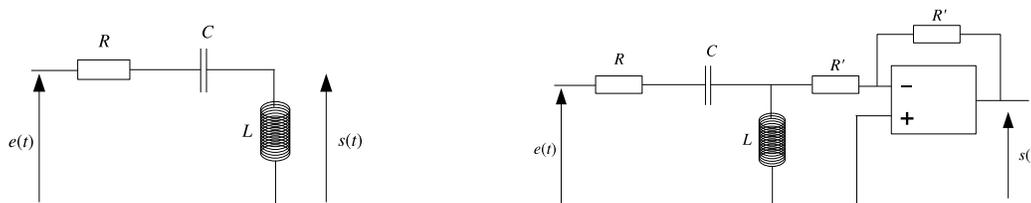


FIG. 3 – Montages de la question 21.

Par identification avec $\underline{H}_1 = \frac{\omega^2}{-\omega^2 + 2i\eta_1\omega_1\omega + \omega_1^2}$, on a alors $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\eta_1 = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$. Pour obtenir les valeurs souhaitées de η_1 et de $\omega_1 = \beta\omega_0$, il faudrait alors avoir $LC \simeq 1$ H.F, ce qui semble difficile vues les valeurs courantes de ces composants (il faudrait d'autre part avoir $R\sqrt{\frac{C}{L}} \simeq 0,4$, ce qui par contre ne semble pas impossible). Pour simuler le comportement, malgré cela, à l'aide d'une maquette électrique, il faut étudier des lois d'échelle (modifier les fréquences mises en jeu en fonction de la valeur des composants utilisés...).

22 Puissance des actions intérieures :

$$P_1 = -k_1 u \dot{u} - h_1 \dot{u}^2 = \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} k_1 u^2 \right) - h_1 \dot{u}^2. \text{ D'où pour la valeur moyenne, en régime sinusoïdal forcé, } \langle P_1 \rangle = -h_1 \langle \dot{u}^2 \rangle.$$

Or $i\omega \underline{U} = i\omega \underline{H}_1 x_0$ et donc $\dot{u}(t) = \omega G_1 x_0 \cos(\omega t + \phi)$ où ϕ est une constante.

$$\text{D'où au final } \langle P_1 \rangle = -\frac{1}{2} h_1 \omega^2 G_1^2 x_0^2.$$

23 On a $p_1 = -\frac{1}{2} h_1 \omega_1^2 u^2 G_1^2(u)$; ce qui est tracé est donc la fonction $u^2 G_1^2(u)$ (c'est $-p_1$ qui est tracé). On observe bien différentes zones dans le tracé : $u^2 G_1^2(u) \rightarrow 0$ pour $u \rightarrow 0$ (normal car alors $G_1 \rightarrow 0$), on voit le comportement en u^2 pour $u \rightarrow +\infty$ (normal car alors $G_1 \rightarrow 1$), et l'on voit également apparaître la résonance à proximité de $u = 1$ (normal car on a bien $\eta_1 < \frac{1}{\sqrt{2}}$, voir question 20).

24 Valeur optimale de φ_1 : $-\pi$? Inconvénients : en cas de panne de courant, ils ne fonctionnent plus ! (et, bien évidemment, ils consomment de l'énergie)