

## Devoir libre de Sciences Physiques n°1 du 10-09-2011

— Solutions —

### Problème n° 1 – Modélisation d'une fibre nerveuse

Centrale TSI 2000

#### A. Étude des caractéristiques d'un modèle de segment d'axone de longueur $\Delta x$

1. L'expression générale de la résistance d'un élément cylindrique fournit  $R_1 = \rho_a \frac{\Delta x}{\pi r^2}$ . La conductance de fuite  $\frac{1}{R_2}$  est proportionnelle à la surface  $2\pi r \Delta x$  de membrane étudiée, donc  $R_2 = \frac{1}{G_m 2\pi r \Delta x}$ . Enfin, la capacité est elle aussi proportionnelle à la surface de la membrane puisque augmenter cette surface revient à associer des condensateurs en parallèle, donc à ajouter leurs capacités. On a donc  $C = C_m 2\pi r \Delta x$ .

2.  $R_1 = 3,54 \times 10^8 \Omega$ ,  $R_2 = 1,06 \times 10^6 \Omega$ ,  $C = 1,88 \times 10^{-9} \text{ F}$  pour un axone non myélinisé.

$R_1 = 3,54 \times 10^8 \Omega$ ,  $R_2 = 3,17 \times 10^8 \Omega$ ,  $C = 1,13 \times 10^{-11} \text{ F}$  pour un axone myélinisé.

3. La condition  $R_1 = R_2$  impose  $\lambda = \sqrt{\frac{r}{2\rho_a G_m}}$  soit  $\lambda = 0,55 \text{ mm}$  pour un axone non myélinisé et

$\lambda = 9,48 \text{ mm}$  pour un axone myélinisé.

4.  $\lambda$  est une longueur caractéristique de la fibre nerveuse. Pour  $\Delta x < \lambda$ ,  $R_1 < R_2$  et l'axone privilégie la transmission « série » le long de la fibre : on peut parler de conduction électrique longitudinale. Au contraire, pour  $\Delta x > \lambda$ ,  $R_1 > R_2$  et l'axone privilégie la transmission « parallèle » entre le cœur et l'extérieur de la fibre : on peut parler d'isolant dans le sens longitudinal. On remarque que  $\lambda_{\text{sans myéline}} \ll \lambda_{\text{avec myéline}}$  : la présence de myéline réduit la conductance de fuite et permet le transport du courant électrique sur une longueur plus grande.

5. La loi des mailles impose  $V_0 = V(t) + R_1 i_a = V(t) + R_1 \left[ \frac{V(t)}{R_2} + C \frac{dV}{dt} \right]$ , compte tenu de la loi des nœuds  $i_a = i_f + \frac{dq}{dt}$ . Cette équation différentielle a pour solution  $V(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$  avec  $\tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C$ , compte tenu des conditions initiales  $V(0) = 0$ .

6. Pour un axone sans myéline,  $\tau = 2,0 \text{ ms}$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{V}{V_0} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 3 \times 10^{-3}$  tandis que, pour un axone avec myéline,  $\tau = 1,9 \text{ ms}$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{V}{V_0} = 0,47$ . La présence de myéline a peu d'influence sur la constante de temps mais une influence énorme sur le transfert du signal électrique d'un bout à l'autre de l'axone.

#### B. Modèle simplifié d'axone

7. À droite de (de), la résistance est égale à  $R_T$ , valeur qu'on retrouve aussi à droite de (ab) ; on peut donc écrire  $R_T = R_1 + \frac{R_2 R_T}{R_2 + R_T}$ , ce qui impose encore  $R_T^2 - R_1 R_T - R_1 R_2 = 0$  ; la seule racine positive de cette équation est la résistance totale  $R_T = \frac{R_1 + \sqrt{R_1^2 + 4R_1 R_2}}{2}$ .

8. On a affaire à un diviseur de tension avec  $V_{de} = V_0 \frac{R_{\parallel}}{R_{\parallel} + R_1}$ , qu'on écrira  $V_{de} = \frac{V_0}{1 + \beta}$  avec  $\beta = R_1 \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_T} \right)$ .

9. Du fait de l'invariance par translation de long de la ligne électrique,  $V_n = \frac{V_0}{(1 + \beta)^n}$ .

10. Si  $R_2 = R_1$ ,  $R_T = R_1 \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  donc  $\beta = \frac{3 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \simeq 1,62$ . On aura  $\frac{V_n}{V_0} \leq 10^{-2}$  pour  $n \geq \frac{\ln 10^2}{\ln(1 + \beta)} = 4,78$  : il suffit de cinq cellules de ce type pour obtenir une chute d'un facteur 100.

11.  $R_T = 2,0 \times 10^7 \Omega$  et  $\beta = 1,8 \times 10^{-2}$ . Pour  $x = 2 \text{ mm}$ ,  $n = \frac{x}{\Delta x} = 200$  donc  $\frac{1}{(1 + \beta)^n} = 2,8 \times 10^{-2}$ .

Sur une longueur  $\ell = 1 \text{ m}$ , donc après 50 fois la longueur  $x$ , l'atténuation  $(2,8 \times 10^{-2})^{50}$  est beaucoup trop faible pour permettre le transport d'atténuation.

12. On a ici  $R_T = 3,3 \times 10^8 \Omega$  donc  $\beta = 1,0 \times 10^{-3}$  donc, avec  $n = 200$ ,  $\frac{1}{(1 + \beta)^n} = 0,81$ . Le signal électrique peut se propager d'un nœud de RANVIER au suivant dans l'axone myélinisé.

13. Ici,  $\tau = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2} \simeq R_1 C$  puisque  $R_1 \ll R_2$ ; la vitesse de propagation du signal électrique est  $v = \frac{x}{\tau} = \frac{x}{R_1 C}$  soit encore  $v = \frac{x}{2\rho_a C_m \Delta x^2 r}$ . On trouve  $v \simeq 5 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

14. L'aller-et-retour est parcouru en un temps  $\frac{2\ell}{v} = 4,8 \mu\text{s}$ .

15. L'énergie mise en jeu est de l'ordre de  $W_e = \frac{1}{2} C U^2$  avec  $C = C_m 2\pi r \ell$  et  $U = 100 \text{ mV}$ ; on en déduit donc  $W_e = 6,8 \times 10^{-12} \text{ J}$ ; cette énergie est plutôt d'un ordre de grandeur microscopique (42 MeV) que macroscopique : la transmission du signal nerveux n'exige quasiment aucun effort.

### Problème n° 2 – Variomètre à affichage électronique

Centrale PC 2006

#### A. Étude du système de capacités différentielles

1. L'épaisseur des condensateurs est à gauche  $e_0 + x$  et à droite  $e_0 - x$ . À partir de la formule donnée, on arrive à  $C_{1a} = C_{1b} = \frac{\epsilon S}{e_0 + x}$  et  $C_{2a} = C_{2b} = \frac{\epsilon S}{e_0 - x}$ .

2. Pour  $x = 0$ , on trouve :  $C = 4,8 \text{ nF}$ .

#### B. Oscillateur à pont de Wien

3. L'amplificateur opérationnel idéal possède des impédances d'entrée infinies :  $i_+ = i_- = 0$ , un gain infini qui a pour conséquence  $V_+ = V_- = 0$ . À partir de cela, les deux résistances  $R_1$  et  $R_2$  sont en série et par un diviseur de tension, on trouve que  $e = \frac{R_1}{R_1 + R_2} s$  ce qui permet de voir qu'on a affaire à un amplificateur non inverseur :  $s = (1 + \frac{R_2}{R_1}) e = F e$  valable jusqu'à ce que l'on atteigne la saturation et plutôt en basse fréquence puisque lorsque la fréquence augmente, le gain de l'amplificateur opérationnel diminue remettant en cause l'hypothèse du gain infini et par là l'hypothèse  $V_+ = V_- = 0$ . La caractéristique est représentée sur la figure 1.

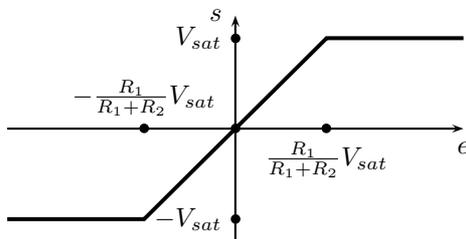


FIG. 1 – Caractéristique de l'amplificateur

4. L'association en parallèle de la résistance et du condensateur correspond à une impédance équivalente  $\frac{R \frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$ . On observe alors que la structure est en série. Par un diviseur de tension, on trouve que  $G = \frac{\frac{R}{1 + jRC\omega}}{R + \frac{R}{1 + jRC\omega}}$ . Après calculs, la fonction de transfert peut s'écrire soit  $G = \frac{jRC\omega}{1 + j3RC\omega + (jRC\omega)^2}$  soit  $G = \frac{G_{max}}{1 + jQ(RC\omega - \frac{1}{RC\omega})}$  avec  $G_{max} = \frac{1}{3}$  et  $Q = \frac{1}{3}$ . On a un filtre passe bande de pulsation centrale  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ .

5. Les diagramme de BODE (gain et phase) associé à  $G$  sont représentés sur la figure 2. On a représenté en fonction de la variable réduite  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  à gauche  $G_{dB} = 20 \log |G| = -20 \log 3 - 10 \log [1 + \frac{1}{9}(x - \frac{1}{x})^2]$  et à droite  $\varphi = -\arctan \frac{1}{3}(x - \frac{1}{x})$ .

6. On a  $e' = F s'$  et en même temps  $s' = G e'$ . Par conséquent, le montage impose  $F G = 1$  d'où la relation  $(1 + \frac{R_2}{R_1}) \frac{1}{3} = 1 + j \frac{1}{3}(x - \frac{1}{x})$ . Cette relation ne peut être satisfaite que si le membre de droite est réel donc pour  $x = 1$  c'est-à-dire pour  $\omega = \omega_0$ . La fréquence des oscillations ne peut qu'être :  $f = \frac{1}{2\pi RC}$ . Ceci ne suffit pas, il faut encore que  $1 + \frac{R_2}{R_1} = 3$  donc :  $\frac{R_2}{R_1} = 2$ .

7. En reprenant la première expression de la fonction de transfert  $G$ , on arrive à :  $jRC\omega e' = s'(1 + j3RC\omega + (jRC\omega)^2)$ . Nous savons qu'une multiplication par  $j\omega$  correspond à une opération de dérivation par rapport au temps. On peut donc écrire l'équation différentielle qui lie  $e'$  et  $s'$  :  $R^2 C^2 \frac{d^2 s'}{dt^2} + 3RC \frac{ds'}{dt} + s' = RC \frac{de'}{dt}$ . Comme

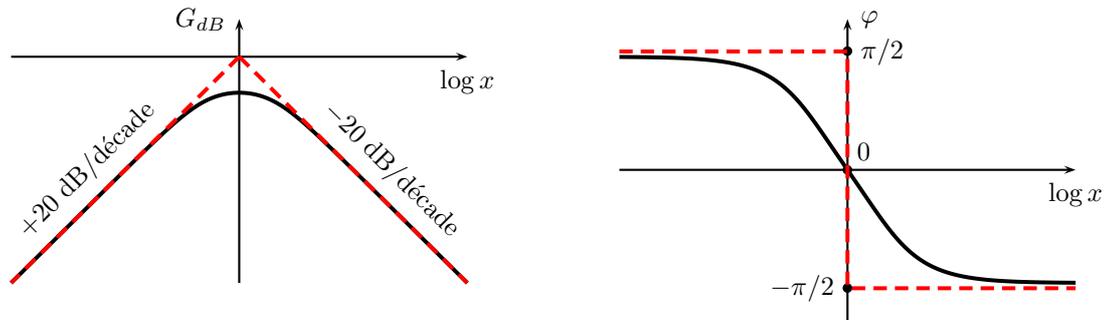


FIG. 2 – Diagramme de BODE

on a toujours la relation :  $e' = (1 + \frac{R_2}{R_1})s'$ , on peut conclure sur l'équation différentielle :  $R^2C^2\frac{d^2s'}{dt^2} + RC(2 - \frac{R_2}{R_1})\frac{ds'}{dt} + s' = 0$ . La solution est sinusoïdale lorsqu'il n'y a pas de terme du premier ordre. On retrouve la condition :  $\frac{R_2}{R_1} = 2$  et la fréquence est numériquement :  $f = \frac{1}{2\pi RC} = 3\,320 \text{ Hz}$ .

8. Les racines de l'équation caractéristique vont posséder une partie réelle qui sera du signe opposé au coefficient de la dérivée première dans l'équation différentielle. Par conséquent, si  $2 - \frac{R_2}{R_1} > 0$  alors les solutions comporteront une exponentielle réelle décroissante, le régime ne peut qu'être amorti. Au contraire, si  $2 - \frac{R_2}{R_1} < 0$ , la solution fera apparaître une exponentielle réelle croissante qui va diverger. C'est dans ces conditions qu'on pourra obtenir des oscillations entretenues mais du fait de la divergence de  $s'$ , l'amplificateur opérationnel va être en saturation en sortie d'où une forme des oscillations qui ne sera pas sinusoïdale. La condition sera donc  $\frac{R_2}{R_1} > 2$ , on choisira  $R_1 = 4,7 \text{ k}\Omega$ .

9. Appelons  $i_1$  l'intensité qui circule dans la branche contenant les diodes. La loi des nœuds nous permet d'écrire :  $i = \frac{v}{R_2} + i_1$ . Pour déterminer l'expression de  $i_1$  en fonction de  $v$ , il est indispensable d'étudier séparément les cas  $i_1 > 0$  et  $i_1 < 0$ . À l'aide de la caractéristique fournie et en faisant très attention au sens de montage et donc aux signes des tensions prises en compte, on arrive aux deux équations  $v = R_3i_1 + (v_D + v_Z)$  pour  $i_1 > 0$  et  $v = R_3i_1 - (v_D + v_Z)$  pour  $i_1 < 0$ . On a  $v = R_2i - R_2i_1$ . En utilisant l'expression vue précédemment pour l'intensité, on arrive à l'équation suivante pour les deux cas envisagés :  $v = \frac{R_2R_3}{R_2+R_3}i \pm \frac{R_2}{R_3}(v_D + v_Z)$ . On a donc deux fonctions affines décalées par l'ordonnée à l'origine avec le cas  $i > 0$  qui correspond à  $v > v_D + v_Z$  et  $i_1 < 0$  pour  $v < -(v_D + v_Z)$ . Pour  $v$  comprise à l'intérieur de l'intervalle, les diodes bloquent le courant et  $i_1 = 0$ , on en déduit que :  $v = R_2i$ . La résistance équivalente vérifie  $\frac{R_2R_3}{R_2+R_3} < R_2$ , la pente du graphique est donc plus faible pour la partie conductrice des diodes que pour la partie bloquée. La caractéristique du dipôle équivalent est représentée sur la figure 3.

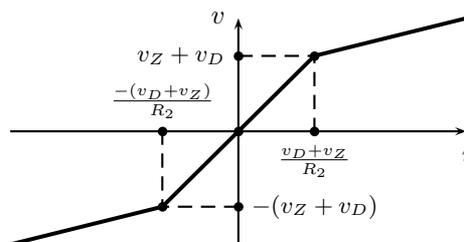


FIG. 3 – Caractéristique du dipôle AB

10. L'introduction du dipôle AB améliore la qualité de l'oscillateur car lorsque la tension  $v$  devient élevée (en valeur absolue), on passe sur la partie de la caractéristique de pente plus faible de résistance  $\frac{R_2R_3}{R_2+R_3}$ . En choisissant correctement la résistance  $R_3$  et  $R_2$ , on peut réaliser à la fois la condition  $\frac{R_2}{R_1} > 2$  pour provoquer les oscillations et la condition  $\frac{R_2R_3}{R_1(R_2+R_3)} < 2$  pour limiter la croissance de l'amplitude. On évite la saturation.

### C. Étude globale du capteur

11. Après calcul, le signal issu du multiplieur est  $v_m = \frac{k_m A^2}{2} [\cos(\omega_1 - \omega_2)t + \cos(\omega_1 + \omega_2)t]$ . Le filtre  $R'C'$  est un filtre passe-bas tel que  $v_{C'} = \frac{v_m}{1 + jR'C'\omega}$ . Note : pour écrire cette expression, il faut supposer que les liaisons avec le fréquencemètre ne prélèvent pas d'intensité et qu'on est donc du point de vue du filtre en sortie ouverte. On ne souhaite laisser passer que la fréquence associée à  $\omega_1 - \omega_2$ . Il faut donc que la pulsation de coupure du filtre soit comprise entre les pulsations de  $v_m$  :  $\omega_1 - \omega_2 < \frac{1}{R'C'} < \omega_1 + \omega_2$ .

12. La capacité  $C_1$  correspond à l'association en parallèle de  $C_{1a}$  et  $C_{1b}$ , la valeur de la capacité est donc la somme de ces deux dernières et comme elles sont égales, il s'agit du double. On a la même chose pour  $C_2$ , on peut

écrire que :  $C_1 = \frac{2\epsilon S}{e_0+x}$  et  $C_2 = \frac{2\epsilon S}{e_0-x}$ . Le fréquencemètre mesure  $f = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R} \left( \frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_2} \right)$ . Après calculs, on trouve :  $f = \frac{x}{2\pi\epsilon SR}$  et en tenant compte des relations fournies par l'énoncé, on peut conclure par :  $f = \frac{\gamma\lambda}{2\pi\epsilon SR} V_z$ .