

Corrigé de l'épreuve de physique du concours ENS Lyon Cachan PC 2001 (diffusion de la lumière par une suspension de billes)

Vos observations sur ce corrigé seront les bienvenues à jean.drocourt@wanadoo.fr.

Ce problème fait la théorie d'une expérience relatée par un article de Gilbert Jarry, Elisa Steimer, Vivien Damaschini,

Marc Jurczak et Robin Kaiser (J. Opt. 1997 83-89).

I.A.1 Les relations de passage sont : $\vec{E}_{2T} = \vec{E}_{1T}$ $n_2^2 E_{2N} = n_1^2 E_{1N}$ $\vec{B}_2 = \vec{B}_1$.

I.A.2 Appliquons ces relations sur le plan $z = 0$, en tenant compte que pour une onde plane progressive $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$:

$$\begin{cases} \vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{E}_t \\ \vec{B}_i + \vec{B}_r = \vec{B}_t \end{cases}$$

Comme les ondes électromagnétiques sont transversales et comme les ondes considérées sont polarisées selon Oy, $k_{i,y} = k_{r,y} = k_{t,y} = 0$, donc la première loi de Descartes, qui dit que les rayons incident, réfléchi et réfracté et la normale au dioptre sont dans un même plan, est automatiquement vérifiée. Il reste à vérifier que quel que soit x :

$$E_0 \exp[i(\omega t - xk_{i,x})] + RE_0 \exp[i(\omega t - xk_{r,x})] = TE_0 \exp[i(\omega t - xk_{t,x})]$$

$$\frac{\vec{k}_i \wedge \vec{e}_y E_0}{\omega} \exp[i(\omega t - xk_{i,x})] + \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{e}_y RE_0}{\omega} \exp[i(\omega t - xk_{r,x})] = \frac{\vec{k}_t \wedge \vec{e}_y TE_0}{\omega} \exp[i(\omega t - xk_{t,x})]$$

Par conséquent : $k_{i,x} = k_{r,x} = k_{t,x}$. Or, $k_x = \frac{n\omega}{c} \sin(Oz, \vec{k})$. Donc l'égalité de ces composantes sur l'axe des x signifie que les rayons incident et réfléchi font des angles opposés avec l'axe Oz et que $n_1 \sin i = n_2 \sin i'$.

I.A.3 La continuité de \vec{E} donne $1 + R = T$; celle de \vec{B} s'écrit

$$\frac{(\vec{k}_i + R\vec{k}_r - T\vec{k}_t) \wedge \vec{e}_y E_0}{\omega} = \vec{0}, \text{ soit } (\vec{k}_i + R\vec{k}_r - T\vec{k}_t)_z = 0 \text{ et } (\vec{k}_i + R\vec{k}_r - T\vec{k}_t)_x = 0$$

La première de ces deux relations donne $n_1 \cos i - n_1 \cos i' R = n_2 \cos i' T$ et la seconde redonne $1 + R = T$.

En résumé, les conditions de passage imposent :

$$\begin{cases} 1 + R = T \\ (1 - R)n_1 \cos i = Tn_2 \cos i' \end{cases} \Rightarrow R = \frac{n_1 \cos i - n_2 \cos i'}{n_1 \cos i + n_2 \cos i'}$$

I.A.4 Si n_1 et n_2 sont voisins,

$$n_1 \cos i + n_2 \cos i' \approx 2n \sin \theta$$

$$n_1 \cos i - n_2 \cos i' = n_1 \cos i - n_2 \sqrt{1 - \frac{n_1^2 \sin^2 i}{n_2^2}} = n \cos i - \sqrt{(n + \delta n)^2 - n^2 \sin^2 i} = n \cos i - \sqrt{n^2 \cos^2 i + 2n\delta n + \delta n^2}$$

$$= n \cos i \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2n\delta n + \delta n^2}{n^2 \cos^2 i}} \right) \approx -\frac{\delta n}{\cos i} = -\frac{\delta n}{\sin \theta}$$

$$R \approx -\frac{\delta n}{2n \sin^2 \theta}$$

I.B.1

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \vec{r}' - Vt\vec{e}_z$$

$$\vec{E} = E_0 \exp[i(\omega t + k_z Vt - \vec{k} \cdot \vec{r}')] \vec{e}_y$$

qui est de la forme demandée si $\omega' = \omega + k_z V$, $\vec{k}' = \vec{k}$.

I.B.2 Soit ω est la pulsation commune à l'onde incidente et à l'onde réfléchie dans le référentiel du dioptre. Le référentiel du laboratoire se meut à la vitesse $V\vec{e}_z$ par rapport au dioptre; dans ce référentiel, l'onde incidente a pour pulsation $\omega_i = \omega - k_{i,z}V = \omega - Vk \sin \theta$ et l'onde réfléchie $\omega_r = \omega - k_{r,z}V = \omega + Vk \sin \theta$, donc

$$\Delta\omega = 2Vk \sin \theta = \frac{2n\omega V \sin \theta}{c}$$

I.C.1 La différence de marche entre l'onde réfléchie en $z = 0$ et celle réfléchie en $z = z_i$ est

$$\delta = n_c(HI + IK) = 2z_i n_c \sin \theta_c = 2n_a \sin \theta_a z_i. \text{ Le déphasage est } \varphi(z_i) = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} = \frac{4\pi n_a \sin \theta_a z_i}{\lambda_0}$$

I.C.2 Si $dR = -\frac{1}{2n_c \sin^2 \theta_c} \frac{\partial n}{\partial z} dz = \frac{\pi \Delta n}{n_c \sin^2 \theta_c \Lambda} \sin \left[2\pi \left(ft + \frac{z}{\Lambda} \right) \right] dz$ est le facteur de réflexion de l'amplitude d'une couche d'épaisseur dz , alors, à un déphasage d'ensemble ψ près,

$$\underline{E} = \int dR E_0 \exp(i(\omega t - \varphi(z))) = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\pi \Delta n E_0 \exp(i\omega t)}{n_c \sin^2 \theta_c \Lambda} \sin \left[2\pi \left(ft + \frac{z}{\Lambda} \right) \right] \exp \left(-i \frac{4\pi n_a \sin \theta_a z}{\lambda_0} \right) dz$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{-y}^y \exp(iaz) \sin(bz + c) dz &= \frac{1}{2i} \int_{-y}^y [\exp(i((a+b)z + c)) - \exp(i((a-b)z - c))] dz \\ &= \frac{1}{2i} \left\{ \left[\frac{\exp(i((a+b)z + c))}{i(a+b)} \right]_{-y}^y - \left[\frac{\exp(i((a-b)z - c))}{i(a-b)} \right]_{-y}^y \right\} \\ &= \frac{\exp(ic) \sin((a+b)y)}{i(a+b)} - \frac{\exp(-ic) \sin((a-b)y)}{i(a-b)} = \frac{y}{i} [\exp(ic) \text{sinc}((a+b)y) - \exp(-ic) \text{sinc}((a-b)y)] \end{aligned}$$

D'où

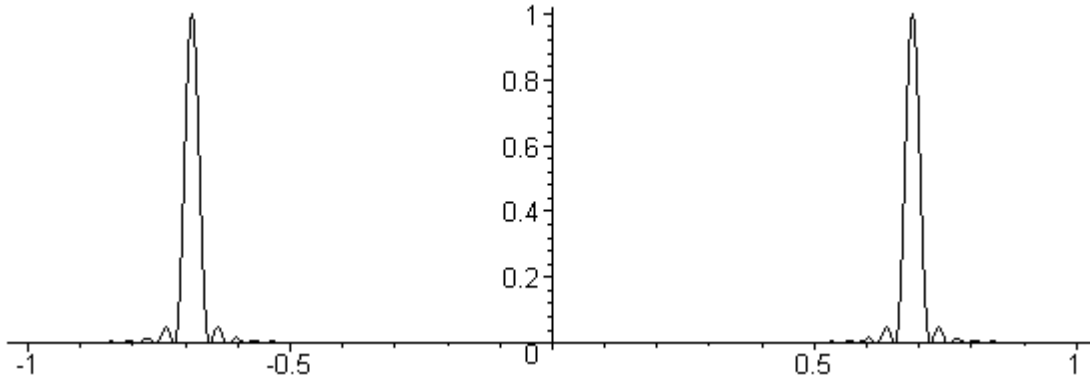
$$\underline{E} = \frac{\pi \Delta n L E_0 \exp(i\omega t)}{2i n_c \sin^2 \theta_c \Lambda} \left\{ \exp(i2\pi ft) \text{sinc} \left[\pi L \left(\frac{1}{\Lambda} - \frac{2n_a \sin \theta_a}{\lambda_0} \right) \right] - \exp(-i2\pi ft) \text{sinc} \left[\pi L \left(\frac{1}{\Lambda} + \frac{2n_a \sin \theta_a}{\lambda_0} \right) \right] \right\}$$

$$K = \frac{\pi \Delta n L E_0}{2n_c \sin^2 \theta_c \Lambda} \quad \alpha(t) = 2\pi ft$$

I.C.3 La fonction $\text{sinc}(x)$ est maximum pour $x = 0$, donc les modules des deux termes entre accolades sont maxima, le premier pour $\theta_a = \theta_B = \arcsin \frac{\lambda_0}{2n_a \Lambda}$, le second pour $\theta_a = -\theta_B$.

La fonction $\text{sinc}(x)$ s'annule pour $x = \pm\pi$, donc les modules des deux termes sont nuls, l'un pour

$\sin \theta_a = \frac{\lambda_0}{2n_a} \left(\frac{1}{\Lambda} \pm \frac{1}{L} \right)$, l'autre pour les valeurs opposées. Comme $L \gg \Lambda \gg \lambda_0$, l'intensité émergente présente deux pics très étroits pour deux valeurs petites et opposées de θ_a . Voici le graphe de l'intensité en fonction de θ_a exprimé en degrés :



I.C.4 A l'incidence de Bragg, $\delta(z_i + \Lambda) - \delta(z_i) = 2n_a \sin \theta_a \Lambda = \lambda_0$, qui est la condition d'interférence constructive.

I.C.5 D'après l'expression démontrée à la question I.C.2, pour $\theta_a = \theta_B$, le terme principal de \underline{E} est proportionnel à $\exp(i(\omega + 2\pi f)t)$, donc est décalé en pulsation de $\Delta\omega = +2\pi f$; pour $\theta_a = -\theta_B$, le terme principal de \underline{E} est proportionnel à $\exp(i(\omega - 2\pi f)t)$, donc est décalé en pulsation de $\Delta\omega = -2\pi f$.

Dans le premier cas, la question B.2 prévoit un décalage $\Delta\omega = \frac{2n_c \sin(\theta_c) V \omega}{c} = \frac{\lambda_0}{2\Lambda} \frac{2V\omega}{c} = 2\pi \frac{V}{\Lambda} = 2\pi f$. Dans le deuxième cas, elle prévoit le décalage opposé, puisque la vitesse du miroir équivalent est dans la disposition contraire.

II.A.1 Sur le détecteur, $\vec{k}_0 \cdot \vec{r} = \vec{k}_1 \cdot \vec{r} = 0$, donc, en moyennant sur un intervalle de temps grand par rapport à la période de la lumière et petit par rapport à la période acoustique :

$$s = \eta b^2 \frac{1}{\mu_0 c} \left\langle [E_0 \cos((\omega + \Delta\omega)t + \varphi_0) + E_1 \cos(\omega t + \varphi_1)]^2 \right\rangle$$

$$= \eta b^2 \frac{1}{\mu_0 c} \left[\frac{E_0^2 + E_1^2}{2} + 2E_0 E_1 \langle \cos((\omega + \Delta\omega)t + \varphi_0) \cos(\omega t + \varphi_1) \rangle \right]$$

Or $\langle \cos((\omega + \Delta\omega)t + \varphi_0) \cos(\omega t + \varphi_1) \rangle = \frac{1}{2} [\cos(\Delta\omega t + \varphi_0 - \varphi_1)]$

D'où: $s = \eta b^2 [I_0 + I_1 + 2\sqrt{I_0 I_1} \cos(\Delta\omega t + \varphi_0 - \varphi_1)]$

II.A.2 Supposons les deux ondes polarisées suivant \vec{e}_y , et que dans le plan du détecteur $\vec{k}_0 \cdot \vec{r} = 0$ et $\vec{k}_1 \cdot \vec{r} = kx\alpha$.

$$s = \eta b \int_{-b/2}^{b/2} \frac{1}{\mu_0 c} \left\langle [E_0 \cos((\omega + \Delta\omega)t + \varphi_0) + E_1 \cos(\omega t - kx\alpha + \varphi_1)]^2 \right\rangle dx$$

$$= \eta b \frac{1}{\mu_0 c} \left[b \frac{E_0^2 + E_1^2}{2} + \int_{-b/2}^{b/2} 2E_0 E_1 \langle \cos((\omega + \Delta\omega)t + \varphi_0) \cos(\omega t - kx\alpha + \varphi_1) \rangle dx \right]$$

$$\langle \cos((\omega + \Delta\omega)t + \varphi_0) \cos(\omega t - kx\alpha + \varphi_1) \rangle = \frac{1}{2} \cos(\Delta\omega t - kx\alpha + \varphi_0 - \varphi_1)$$

Comme $\int_{-y}^y \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} [\sin(ax + b)]_{-y}^y = \frac{\sin(ay + b) - \sin(-ay + b)}{a} = \frac{2 \sin ay \cos b}{a} = 2y \operatorname{sinc}(ay) \cos b$

$$s = \eta b^2 \left\{ I_0 + I_1 + 2\sqrt{I_0 I_1} \cos(\Delta\omega t + \varphi_0 - \varphi_1) \operatorname{sinc}\left(\frac{k\alpha b}{2}\right) \right\}$$

Si α n'est pas très petit, l'amplitude du terme de battement est très petite.

II.A.3 Le battement est observable si l'argument de la fonction sinc est inférieur à $\frac{\pi}{2}$, donc si $\alpha < \frac{\lambda_0}{2\pi b}$, soit

$$\alpha < 10^{-4} \text{ rad.}$$

II.B.1 $s(t)m(t) = \eta b^2 \left\{ I_0 + I_1 + 2\sqrt{I_0 I_1} \cos(2\pi ft + \varphi_0 - \varphi_1) \right\} m_0 \cos(2\pi ft)$

Comme $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, la composante continue de $s(t)$ est $s'(t) = \eta b^2 \sqrt{I_0 I_1} m_0 \cos(\varphi_0 - \varphi_1)$;

$$S_1 = \eta^2 b^4 I_0 I_1 m_0^2 \cos^2(\varphi_0 - \varphi_1) \text{ est proportionnel à } I_1.$$

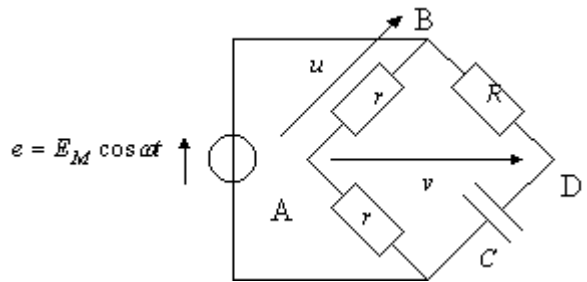
II.B.2 Un déplacement très faible d'un miroir de renvoi modifie de façon importante $\varphi_0 - \varphi_1$.

II.B.3 Considérons le montage de droite. Les montages diviseurs de tension r, r et R, C montrent que

$$u = \frac{e}{2} = \frac{E_M}{2} \cos \omega t \text{ et } \frac{u-v}{R} = \frac{e}{R + \frac{1}{jC\omega}}, \text{ soit, si}$$

$$RC\omega = 1, \underline{v} = \underline{u} - \frac{e}{1-j} = \underline{u} - \frac{2\underline{u}}{1-j} = \underline{u} - (1+j)\underline{u} = -j\underline{u}$$

$$v = \operatorname{Re} \left\{ -j \frac{E_M}{2} e^{j\omega t} \right\} = \frac{E_M}{2} \sin \omega t. \text{ Les tensions } u, v$$



fournissent donc les tensions m, m' recherchées, de même amplitude et déphasées de 90° , la masse étant reliée à A et les tensions prélevées en B et D éventuellement à l'aide de montages suiveurs pour ne pas les perturber. Si la masse est située à une des bornes de e , il faut interposer un transformateur d'isolement. Ce montage ne fonctionne que pour une fréquence déterminée, mais on peut supposer la fréquence acoustique fixe sans restreindre son utilisation.

II.B.4 $S_2 = \langle s(t)m'(t) \rangle^2 = \eta^2 b^4 I_0 I_1 m_0^2 \sin^2(\varphi_0 - \varphi_1)$. En formant $S_1 + S_2$ (montage sommateur), on obtient un signal proportionnel à I_1 et insensible aux variations de déphasage.

II.C.1 La lumière diffractée ou réfractée par les billes a changé de direction et donc d'après II.A donne un signal négligeable dans le détecteur.

II.C.2 Une tranche de la cuve de section S et d'épaisseur dz contient $\nu S dz$ billes qui soumises à l'intensité $I_c(z)$ diffusent la puissance $\sigma_d \nu S dz I_c(z)$, d'où le bilan énergétique pour la lumière cohérente

$I_c(z)S = I_c(z + dz)S + vS dz \sigma_d I_c(z)$ et l'équation différentielle $\frac{dI_c}{dz} = -\sigma v I_c$, à variables séparables, qui s'intègre

comme $\int_{I_{c0}}^{I_c(D)} \frac{dI}{I} = -\sigma v D \Rightarrow \ln \frac{I_c(D)}{I_{c0}} = -\sigma v D \Rightarrow I_c(D) = I_{c0} \exp(-\sigma v D)$, où I_{c0} est l'intensité pénétrant dans la cuve

(en pratique c'est plutôt l'intensité que reçoit le détecteur en l'absence de billes, car il faut tenir compte de la réflexion de la lumière par les faces de la cuve, de l'absorption de la lumière par l'eau...).

II.C.3 Soit V le volume d'une bille et x la fraction volumique des billes dans la cuve ; $x = vV$; le rapport

$-\frac{1}{x} \ln \frac{I_c(D)}{I_{c0}}$ prend les valeurs 19800, 19200, 19070 et 19400. Le caractère sensiblement constant de ce rapport

montre que la loi de Beer-Lambert est vérifiée.

$$-\ln \frac{I_c(D)}{I_{c0}} = v\sigma D = \frac{x}{V} \frac{24\pi^3 V^2}{\lambda_0^4} \left(\frac{(n_p/n_e)^2 - 1}{(n_p/n_e)^2 + 2} \right)^2 D$$

$$V = \frac{\lambda_0^4}{24\pi^3 D x} \left(-\ln \frac{I_c(D)}{I_{c0}} \right) \left(\frac{(n_p/n_e)^2 + 2}{(n_p/n_e)^2 - 1} \right)^2 = \frac{(6,328 \cdot 10^{-7})^4}{24\pi^3 \times 0,1} \times 19400 \times \left(\frac{(1,59/1,33)^2 + 2}{(1,59/1,33)^2 - 1} \right)^2 = 2,67 \cdot 10^{-21} \text{ m}^3$$

$$a = \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}} = 8,6 \cdot 10^{-8} \text{ m} \quad (a \ll \lambda_0)$$

II.C.4 La précision avancée implique que l'incertitude relative sur $y = -\frac{1}{x} \ln \frac{I_c(D)}{I_{c0}}$ soit

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x}{x} + \left(\frac{\Delta I_c(D)}{I_c(D)} + \frac{\Delta I_{c0}}{I_{c0}} \right) \frac{1}{\left| \ln \frac{I_c(D)}{I_{c0}} \right|} = 0,005 + (0,01 + 0,01) / (de 4,95 \text{ à } 19,4) = \text{de } 0,6 \text{ à } 0,9 \% \text{ alors que la dispersion}$$

des valeurs de $-\frac{1}{x} \ln \frac{I_c(D)}{I_{c0}}$ est un peu supérieure. D'autre part, il n'est pas facile de mesurer à 1 % près deux intensités dont le rapport est $3 \cdot 10^8$.

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{1}{3} \frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta \ln \frac{I_c(D)}{I_{c0}}}{\left| \ln \frac{I_c(D)}{I_{c0}} \right|} + \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{\frac{\Delta I_c(D)}{I_c(D)} + \frac{\Delta I_{c0}}{I_{c0}}}{\left| \ln \frac{I_c(D)}{I_{c0}} \right|} + \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{0,01 + 0,01}{19,4} + 0,005 \right) = 0,2 \%$$

Pour réaliser cette expérience telle quelle, il faut des billes extrêmement semblables ; l'exploitation de cette méthode permet de déterminer avec précision le rayon des billes ou la répartition de ces rayons.

III.A.1 et III.A.2

La contribution d'un volume $d\tau$ est celle d'un dipôle de moment $\vec{P} d\tau$ équivalent à la limite de deux charges $-\rho d\tau$ en A et $\rho d\tau$ en B telles que $\rho \vec{AB} = \vec{P}$. Par conséquent, la sphère polarisée est équivalente à la limite de deux boules de centres O_- et O_+ portant des densités volumiques de charge $-\rho$ et $+\rho$ quand $\rho \rightarrow \infty$, $\rho \vec{O_- O_+} \rightarrow \vec{P}$.

Lors de ce passage à la limite, cette distribution de charge tend vers une charge répartie sur la surface de la sphère. Un élément dS de cette surface est la limite d'un volume $d\tau = \vec{dS} \cdot \vec{O_- O_+}$ qui contient la charge $\rho \vec{dS} \cdot \vec{O_- O_+} = \vec{P} \cdot \vec{dS}$.

Donc, la distribution de charge équivalente à la sphère polarisée est la densité superficielle de charge sur la surface de la sphère $\sigma = P_N = P \cos \theta$.

III.A.3 A l'extérieur, le potentiel est le même que si l'on avait concentré la charge de la sphère en son centre :

$$V_\rho = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi a^3}{4\pi \epsilon_0 r}$$

A l'intérieur, le théorème de Gauss permet de calculer le champ électrique :

$$4\pi r^2 E = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi r^3}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0} \quad -\frac{dV}{dr} = E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \quad V = V(a) - \int_a^r \frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr$$

$$\text{si } r < a, V_\rho = \frac{\rho(3a^2 - r^2)}{6\epsilon_0} \quad \text{si } r > a, V_\rho = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r}$$

III.A.4 En superposant les deux boules de la question II.A.2, on voit que le potentiel est la limite de

$$V_{\vec{P}}(M) = \frac{\rho(O_-M^2 - O_+M^2)}{6\epsilon_0} = \frac{\rho(\overrightarrow{O_-M} - \overrightarrow{O_+M}) \cdot (\overrightarrow{O_-M} + \overrightarrow{O_+M})}{6\epsilon_0} = \frac{\rho \overrightarrow{O_-O_+} \cdot (\overrightarrow{O_-M} + \overrightarrow{O_+M})}{6\epsilon_0}$$

$$V_{\vec{P}}(M) = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{3\epsilon_0} \Rightarrow E_{\vec{P}} = -\overrightarrow{\text{grad}}V = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

L'expression du champ électrique s'obtient plus directement en superposant les champs électriques des deux boules de

$$\text{III.A.2} : \vec{E}_{\vec{P}} = -\frac{\rho \overrightarrow{O_-M}}{3\epsilon_0} + \frac{\rho \overrightarrow{O_+M}}{3\epsilon_0} = -\frac{\rho \overrightarrow{O_-O_+}}{3\epsilon_0} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}.$$

$$\text{III.B.1} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{div} \vec{B} = 0 \quad \text{div} \vec{D} = \rho$$

III.B.2 A la traversée d'une surface, sont continus \vec{E}_T, B_N ; $D_{N2} - D_{N1} = \sigma$ $\vec{H}_{T2} - \vec{H}_{T1} = \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{12}$

III.B.3 Le champ incident et le champ total doivent vérifier les équations de Maxwell dans le vide ; comme les équations de Maxwell sont linéaires, elles sont vérifiées par le champ diffusé qui est la différence du champ total et du champ incident.

III.B.4 et III.B.5 On peut remplacer la polarisation électrique par une distribution de charge sur la sphère

$$\sigma_{\text{lié}} = P_N = P \cos \theta \quad \text{et une distribution de courant dans la sphère} \quad j_{\text{lié}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}.$$

III.B.6 Dans une bille, $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_P \vec{E} \Rightarrow \vec{P} = (\epsilon_P - \epsilon_0) \vec{E}$.

III.C.1 Les potentiels sont proportionnels aux courants et aux charges tels qu'ils étaient antérieurement, le retard considéré étant la durée de propagation de la lumière de la source à l'effet. Ce retard s'exprime par le terme $\exp(-ik\|\vec{r} - \vec{r}'\|)$.

III.C.2 Si on peut négliger le terme de propagation, $\vec{A}_d^{\text{int}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \vec{j}_{\text{lié}}}{4\pi} \iiint_{\text{bille}} \frac{d_3 r'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$ a la même forme que le potentiel

dans une boule uniformément chargée en volume $V(\vec{r}) = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{bille}} \frac{d_3 r'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = \frac{\rho(3a^2 - r^2)}{6\epsilon_0}$. Donc

$$\vec{A}_d^{\text{int}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \vec{j}_{\text{lié}} (3a^2 - r^2)}{6}.$$

III.C.3 La condition de jauge de Lorentz est $\frac{\partial \vec{A}_d^{\text{int}}}{\partial z} + \frac{i\omega V_d}{c^2} = 0$.

$$V_d^{\text{int}} = -\frac{c^2}{i\omega} \frac{\partial \vec{A}_d^{\text{int}}}{\partial z} = \frac{\mu_0 c^2 j_{\text{lié}} z}{3i\omega}$$

$$\vec{E}_d^{\text{int}} = -i\omega \vec{A}_d^{\text{int}} - \overrightarrow{\text{grad}} V_d^{\text{int}} = \frac{-i\omega \mu_0 \vec{j}_{\text{lié}} (3a^2 - r^2)}{6} - \frac{\mu_0 c^2 \vec{j}_{\text{lié}}}{3i\omega} \approx -\frac{\mu_0 c^2 \vec{j}_{\text{lié}}}{3i\omega} = -\frac{\vec{j}_{\text{lié}}}{3\epsilon_0 i\omega}$$

car $a\omega \ll c$ puisque $a \ll \lambda_0$.

$$\vec{B}_d^{\text{int}} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}_d^{\text{int}} = \frac{\mu_0 \overrightarrow{\text{grad}}(3a^2 - r^2) \wedge \vec{j}_{\text{lié}}^{\text{int}}}{6} = \frac{\mu_0 \vec{r} \wedge \vec{j}_{\text{lié}}^{\text{int}}}{3}$$

III.C.4

$$\vec{E}_d^{\text{int}} \approx -\frac{\mu_0 c^2 \vec{j}_{\text{lié}}}{3i\omega} = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} = -\frac{(\epsilon_P - \epsilon_0)(\vec{E}_i + \vec{E}_d^{\text{int}})}{3\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_d^{\text{int}} = \frac{\epsilon_P - \epsilon_0}{\epsilon_P + 2\epsilon_0} \vec{E}_i$$

qui est bien uniforme à l'ordre 0 en ω . Les termes d'ordre supérieur ne sont pas uniformes. $\vec{B}_d^{\text{int}} = \frac{\mu_0 \vec{r} \wedge \vec{j}_{\text{lié}}^{\text{int}}}{3}$ n'est pas

uniforme, mais est d'ordre 1 par rapport à ω et doit donc être négligé : $\vec{B}_d^{\text{int}} = \vec{0}$.

III.D.1 Pour calculer le champ électromagnétique loin de la bille, il faut négliger r' dans l'expression (25), car $r' \ll r$

$$\text{et } r' \ll \lambda_0. \text{ D'où : } \vec{A}_d = \vec{A}_0 \frac{\exp(-ikr)}{r} \quad \vec{A}_0 = \frac{\mu_0 V \vec{j}_{\text{lié}}}{4\pi} \quad V = \frac{4}{3}\pi a^3$$

Il vaut mieux écrire une expression en fonction du volume V de la sphère que de a .

III.D.2

$$V_d = -\frac{c^2}{i\omega} \operatorname{div} \vec{A}_d = -\frac{c^2}{i\omega} \frac{\partial}{\partial z} \left(\underline{A}_0 \frac{\exp(-ikr)}{r} \right)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad 2r dr = 2z dz \quad \frac{\partial f(r)}{\partial z} = \frac{z}{r} \frac{df(r)}{dr} = \cos \theta \frac{df(r)}{dr}$$

$$V_d = -\frac{c^2 \underline{A}_0 \cos \theta}{i\omega} \frac{d}{dr} \left(\frac{\exp(-ikr)}{r} \right)$$

$$\underline{E}_{d,r} = -i\omega \underline{A}_0 \cos \theta \frac{\exp(-ikr)}{r} - \frac{\partial V_d}{\partial r} = \underline{A}_0 \cos \theta \left(-i\omega \frac{\exp(-ikr)}{r} + \frac{c^2}{i\omega} \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{\exp(-ikr)}{r} \right) \right)$$

$$\underline{E}_{d,\theta} = i\omega \underline{A}_0 \sin \theta \frac{\exp(-ikr)}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_d}{\partial \theta} = \underline{A}_0 \sin \theta \left(i\omega \frac{\exp(-ikr)}{r} - \frac{c^2}{i\omega r} \frac{d}{dr} \left(\frac{\exp(-ikr)}{r} \right) \right)$$

Quand $r \rightarrow \infty$, au premier ordre en $\frac{1}{r}$, $\frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{\exp(-ikr)}{r} \right) \approx -k^2 \frac{\exp(-ikr)}{r}$. Alors, comme $k = \frac{\omega}{c}$, le terme en $\frac{1}{r}$ de

$$\underline{E}_{d,r} \text{ est nul. Donc : } \vec{E}_d \approx i\omega \underline{A}_0 \sin \theta \frac{\exp(-ikr)}{r} \vec{e}_\theta$$

III.D.3 La structure locale du champ électrique est celle d'une onde plane. En effet, les surfaces d'onde sont des sphères de centre l'origine, soit localement les plans perpendiculaires à la direction radiale ; le champ électrique est

perpendiculaire à la propagation et d'amplitude localement constante. L'intensité est $\left\langle \frac{(\vec{E}_d \wedge \vec{B}_d)_r}{\mu_0} \right\rangle = \frac{\varepsilon_0 c |\underline{E}_d|^2}{2}$.

$$\text{III.D.4 } P_d = \iint_{\text{sphère}} \frac{\varepsilon_0 c |\underline{E}_d|^2}{2} dS = \int_0^\pi \frac{\varepsilon_0 c \omega^2 \sin^2 \theta |\underline{A}_0|^2}{2r^2} 2\pi r^2 \sin \theta d\theta = \pi \varepsilon_0 c \omega^2 |\underline{A}_0|^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta$$

Le changement de variable $u = \cos \theta$ permet de calculer $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta = -2 \int_1^0 (1-u^2) du = \frac{4}{3}$.

$$P_d = \frac{4}{3} \pi \varepsilon_0 c \omega^2 |\underline{A}_0|^2.$$

$$\text{III.D.5 En III.D1 : } \vec{A}_0 = \frac{\mu_0 V \vec{j}_{\text{lié}}}{4\pi} ; \text{ en III.C.3 : } \vec{E}_d^{\text{int}} = \frac{\vec{j}_{\text{lié}}}{3\varepsilon_0 i\omega} ; \text{ en III.C.4 : } \vec{E}_d^{\text{int}} = \frac{\varepsilon_P - \varepsilon_0}{\varepsilon_P + 2\varepsilon_0} \vec{E}_i.$$

$$\text{D'où : } P_d = \frac{4\pi \varepsilon_0 c \omega^2}{3} \left(\frac{\mu_0 V}{4\pi} \right)^2 (3\omega \varepsilon_0)^2 \left(\frac{\varepsilon_P - \varepsilon_0}{\varepsilon_P + 2\varepsilon_0} \right)^2 |\vec{E}_i|^2 = \frac{3\varepsilon_0 V^2 \omega^4}{4\pi c^3} \left(\frac{\varepsilon_P - \varepsilon_0}{\varepsilon_P + 2\varepsilon_0} \right)^2 |\vec{E}_i|^2.$$

$$\text{III.D.6 } I_i = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c |\vec{E}_i|^2$$

$$\sigma_d = \frac{P_d}{I_i} = \frac{3V^2 \omega^4}{2\pi c^4} \left(\frac{\varepsilon_P - \varepsilon_0}{\varepsilon_P + 2\varepsilon_0} \right)^2 = \frac{24\pi^3}{\lambda_0^4} \left(\frac{\varepsilon_P - \varepsilon_0}{\varepsilon_P + 2\varepsilon_0} \right)^2 V^2$$

III.D.7 Cette expression est semblable à celle de II.C.3, en y remplaçant $\frac{\varepsilon_P}{\varepsilon_0}$ par $\frac{n_P^2}{n_e^2}$, ce qui se comprend si l'on

considère que l'indice n d'un milieu est $\sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}$ et que seul compte l'indice apparent des billes, c'est-à-dire le rapport de leur indice à celui du milieu où elles baignent.