Concours communs polytechniques 2004
Filière PC – Physique 2

Problème I- Optique géométrique et physique.

A. Optique géométrique

A.1.

A.1.1. cf. cours

A.1.2. cf. cours

A.1.3. cf. cours

A.2.

A.2.1. L'indice du prisme est supérieur à celui de l'air donc le rayon pénètre nécessairement dans le prisme.

A.2.2. $\sin(i_1) = n\sin(r_1)$; $\sin(i_2) = n\sin(r_2)$

A.2.3. comme angles à côtés perpendiculaires : $A = r_1 + r_2$

A.2.4. $D = (i_1 - r_1) + (i_2 - r_2) = i_1 + i_2 - A$

A.2.5. $\frac{dD}{di_1} = 1 + \frac{di_2}{di_1}$ il y a donc un extremum pour D lorsque : $di_1 = -di_2$. En différenciant les lois de Descartes : $\cos(i_2)di_2 = n\cos(r_2)dr_2$ et $\cos(i_1)di_1 = n\cos(r_1)dr_1$, de plus la relation $A = r_1 + r_2$ donne : $dr_1 = -dr_2$. On tire de ces relations : $\frac{\cos(i_1)}{\cos(i_2)} = \frac{\cos(r_1)}{\cos(r_2)}$ ce qui, compte tenu des lois de Descartes n'a pour seule solution que : $i_1 = i_2 = i_m$ et $r_2 = r_1 = r_m$ avec $\sin(i_m) = n\sin(r_m)$.

La valeur de D est alors $D_m = 2i_m - A$ et $A = r_1 + r_2 = 2r_m$ d'où :

$$n = \frac{\sin(i_m)}{\sin(r_m)} = \frac{\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

A.3.

A.3.1. On sait que, pour un rayon incident fixe, le rayon réfléchi tourne de 2β lorsque le miroir tourne de β. Ici on peut considérer un miroir qui tourne de A donc le rayon réfléchi tourne de 2A ce qui permet d'écrire : $\alpha_2 - \alpha_1 = 2A$; A = 60° 03' = 60,05°

A.3.2. $\beta_2 - \beta_1 = 2D_m$ d'où D_m = 38° 43' = 38,72°

A.3.3. n = 1,51702

A.3.4. Nota : les calculs d'incertitudes ne figurent pas dans les programmes !!

$$\frac{dn}{n} = \frac{1}{2}\left[\frac{\cos\left(\frac{D_m + A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)}(dD_m + dA) - \frac{\cos\left(\frac{A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}(dA)\right] \text{ d'où :}$$

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{1}{2}\left[\left|\frac{\cos\left(\frac{D_m + A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)}\right|\Delta D_m + \left|\frac{\cos\left(\frac{D_m + A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}\right|\Delta A\right]$$

A.N. : $\frac{\Delta n}{n} = 5{,}035.10^{-4}$ et $\Delta n = 7{,}3.10^{-4}$

B. Théorie électromagnétique de la lumière.

B.1.

B.1.1. cf. cours

B.1.2. $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ idem pour $\vec{B}$. Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont couplés par les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère. Les solutions générales des équations sont des superpositions d'ondes progressives.

B.1.3. Les équations sont valables dans n'importe quel référentiel galiléen, ce qui correspond au fait que la vitesse de propagation de la lumière est la même dans tous ces référentiels. Il en découle la théorie de la relativité restreinte.

B.2.

B.2.1. Onde plane, progressive dans le sens de l'axe Oz, monochromatique, polarisée rectilignement suivant $\mathbf{e_y}$, se propageant à la vitesse : $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$

B.2.2. En remplaçant dans l'équation **B.1.2.** il vient : $-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$ et $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{e}_z$. On en déduit : $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c$ indépendant de ω, le milieu est donc non dispersif.

B.2.3. $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$, le trièdre $\vec{k}, \vec{E}, \vec{B}$ est trirectangle et direct.

$\vec{B} = -\frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kz - \varphi)\vec{e}_x$

B.2.4. $\vec{R} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ soit : $\vec{R} = \frac{{E_0}^2}{\mu_0 c}\left(\cos(\omega t - kz - \varphi)\right)^2 \vec{e}_z$

B.2.5. Il s'agit de la puissance électromagnétique moyenne (temporelle) qui traverse la surface. $P = \frac{1}{2}\varepsilon_0 {E_0}^2 c S$

B.3.

B.3.1. a) $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

b) ?? le terme (**k r** - ω t) caractérise la propagation d'une onde plane.

c) ?? φ supposée constante ?

B.3.2. a) $\underline{s}(P,t) = s_0\left(\exp\left(i\left(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t + \varphi_1\right)\right) + \exp\left(i\left(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t + \varphi_2\right)\right)\right)$

b) $\underline{s}\,\underline{s}^* = 2{s_0}^2\left(1 + \cos\left(\left(\vec{k}_1 - \vec{k}_2\right)\cdot \vec{r} - (\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2)\right)\right)$ et $I = \langle \underline{s}\,\underline{s}^* \rangle$ Le résultat de ce calcul dépend des hypothèses faites sur les phases à l'origine. On supposera que $(\varphi_1 - \varphi_2)$ est indépendant du temps (sources cohérentes).

c) Si $\omega_2 \neq \omega_1$ alors I est nulle. Dons il ne peut y avoir des interférences qu'avec des sources synchrones. On sait qu'il faut aussi qu'elles soient cohérentes.

$\omega_1 = \omega_2 = \omega$ donc $k_1 = k_2 = k = \frac{2\pi}{\lambda_0} n$

d) $I = 2I_0\left(1 + \cos\left(\left(\vec{k}_1 - \vec{k}_2\right)\cdot \vec{r} + (\varphi_1 - \varphi_2)\right)\right)$

ou $I = 2I_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} n(S_1P - S_2P) + (\varphi_1 - \varphi_2)\right)\right)$

C. Interférences

C.1.

C.1.1. Calcul classique : $I = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} n \frac{aX}{D}\right)\right)$

C.1.2. interfrange = périodicité spatiale de I donc $i = \frac{\lambda_0 D}{na}$

C.1.3. a) $r_1 = \sqrt{\left(r^2 + \frac{a^2}{4} - 2\frac{ra}{2}\cos\theta\right)} = r\sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{4r^2} - \frac{a}{r}\cos\theta\right)}$ soit au premier ordre :

$r_1 = r\left(1 - \frac{a}{2r}\cos\theta\right)$ et $r_2 = r\left(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta\right)$ donc $\delta = n(r_2 - r_1) = na\cos\theta$

b) Pour θ petit on a : $\delta = na\left(1 - \frac{\rho^2}{2D^2}\right)$ on voit donc que les franges d'interférences sont des cercles centrés en O, ce qui était prévisible compte tenu de la symétrie de révolution autour de S_2S_1 .

c) $I = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} na\left(1 - \frac{\rho^2}{2D^2}\right)\right)\right)$

D. Applications.

D.1.

D.1.1. a) Cercles centrés en O.

b) $(SP)_1 = \sqrt{(d+D)^2 + \rho^2} + \frac{\lambda_0}{2}$

c) **Nota :** le calcul est très délicat et long dans ce cas, or le texte demande un calcul approché et sans doute rapide compte tenu de la longueur du problème, je propose donc une expression approchée, sans garantie : $(SP)_2 = \sqrt{(d+D+2e)^2 + \rho^2} + 2(n-1)e$

d) On fait des développement au premier ordre en considérant ρ << (d+D) d'où :

$(SP)_1 \approx (d+D)\left(1 + \frac{\rho^2}{2(d+D)^2}\right) + \frac{\lambda_0}{2}$ et $(SP)_2 = (d+D+2e)\left(1 + \frac{\rho^2}{2(d+D+2e)^2}\right) + 2(n-1)e$

$\delta = (SP)_2 - (SP)_1 \approx 2e + \frac{\rho^2}{2}\left(\frac{1}{(d+D+2e)} - \frac{1}{(d+D)}\right) + 2(n-1)e - \frac{\lambda_0}{2}$

$p = \frac{\delta}{\lambda_0} \approx \frac{2ne}{\lambda_0} - \frac{\rho^2 e}{\lambda_0 (d+D)^2} - \frac{1}{2}$

e) $I = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta\right)\right)$

D.1.2. a) $p_0 = \frac{\delta}{\lambda_0} \approx \frac{2ne}{\lambda_0} - \frac{1}{2} = 72$

b) $p_1 = p_0 - 1$ car p_0 est entier. $\rho = (d+D)\sqrt{\left(\frac{p_0 - p}{e}\lambda_0\right)}$ d'où : ρ_1 = 0,264 m (on remarque que l'approximation ρ << (d+D) n'est pas vraiment justifiée).

c) $\rho_m = (d+D)\sqrt{\left(\frac{m}{e}\lambda_0\right)}$ car p_0 est entier d'où :

ρ_5 = 0,590 m et ρ_6 = 0,647 m (approximations !!!)

d) premier anneau sombre : $p'_1 = p_0 - \frac{1}{2}$ d'où ρ'_1 = 0,187 m

D.1.3. a) la figure est translatée de la même façon.

b) dans la direction de la largeur de la fente, chaque point de la fente donne un système d'anneaux centrés sur la perpendiculaire à l'écran passant par ce point. Pour deux points différents de la source les deux systèmes d'anneaux décalés vont provoquer un brouillage des franges. Pour une source étendue il y aura absence de brouillage si le décalage des systèmes d'anneaux de deux points extrêmes de la source est très inférieur à un demi interfrange. Soit l la distance entre ces points extrêmes : $l < \frac{\rho_6 - \rho_5}{2}$ = 0,057 m

c) on voit que cette largeur l est proportionnelle à (d+D) donc elle peut devenir très grande pour un écran très éloigné. (situation que l'on rencontre avec le Michelson en lame à faces parallèles avec une source étendue, les interférences sont alors localisées à l'infini).

d) Il suffit de placer une lentille convergente entre la lame et l'écran et de placer l'écran dans le plan focal de la lentille. Dans ces conditions on fait interférer deux rayons provenant d'un même point source qui sont parallèles entre eux, dans le trajet entre la lame et la lentille. La différence de marche pour des rayons d'une inclinaison donnée est alors indépendante du point source, il n'y a pas brouillage.

Concours communs polytechniques 2004
Filière PC – Physique 2

Problème II- Propagation dans une ligne coaxiale.

Préliminaire :

a) **Nota :** la notion de puissance « active » n'est absolument pas au programme, pourquoi ne pas utiliser le terme de puissance moyenne ?

$\underline{I} = E_m \exp(j\omega t)\dfrac{1}{Z_0 + Z_u}$ et $P = \dfrac{R_u}{\sqrt{2}} I_m{}^2 = \dfrac{R_u}{\sqrt{2}} \dfrac{E_m{}^2}{(Z_0 + Z_u)^2}$

b) La discussion classique donne : $Z_u = Z_0^*$ pour le maximum de puissance

1. Étude en continu

1.1.

1.1.a. cf. cours

1.1.b. En éteignant U(X) la résistance équivalente vue de la sortie est :

$R(x+dx) = rdx + \dfrac{R(x)\dfrac{1}{gdx}}{R(x)+\dfrac{1}{gdx}} = rdx + \dfrac{R(x)}{R(x)gdx+1}$ au premier ordre :

$R(x+dx) = rdx + R(x)(1 - R(x)gdx)$ soit $dR(x) = (r - R(x)^2 g)dx = g(R_c{}^2 - R(x)^2)dx$ en intégrant entre x = 0 et x on obtient : $\ln\left(\dfrac{R_c - R_0}{R_c - R(x)}\dfrac{R_c + R(x)}{R_c + R_0}\right) = 2gR_c x$ d'où

$R(x) = R_c \dfrac{A\exp(2bx)-1}{A\exp(2bx)+1}$ avec $A = \dfrac{R_c + R_0}{R_c - R_0}$ on obtient bien l'expression donnée avec :

$b = gR_c$, $a_1 = R_c + R_0$, $a_2 = R_0 - R_c$

1.1.c. Le différence de potentiel en circuit ouvert donne, en utilisant le diviseur de tension : $U(x+dx) = U(x)\dfrac{\dfrac{1}{gdx}}{R(x)+\dfrac{1}{gdx}} = U(x)\dfrac{1}{R(x)gdx+1}$ soit au premier ordre :

$dU(x) = -U(x)R(x)gdx$ d'où $dU(x) = -U(x)\dfrac{a_1\exp(bx) + a_2\exp(-bx)}{a_1\exp(bx) - a_2\exp(-bx)} R_c g dx$ et par intégration

$\ln\left(\dfrac{U(x)}{U(0)}\right) = -\ln\left(\dfrac{a_1\exp(bx) - a_2\exp(-bx)}{a_1 - a_2}\right)$ et $U(x) = V_0\dfrac{a_1 - a_2}{a_1\exp(bx) - a_2\exp(-bx)}$

1.2. R(x) indépendant de x correspond à $R(x) = R_c$ d'après **1.1.b.** et donc à $a_2 = 0$ soit $R(x) = R_c = R_0$ et $U(x) = V_0\exp(-bx)$

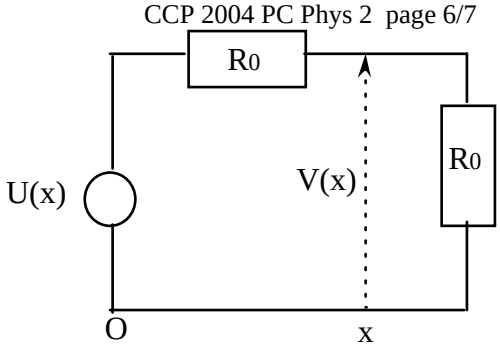
2. Adaptation de charge

D'après le préliminaire il faut : $R_u = R_0 = R_c$

La ligne de longueur X comprend le générateur de fem U(X) et les résistances en série $R(X) = R_0$ et $R_u = R_0$ donc la tension de sortie est : $Us = U(x)\dfrac{R_u}{R_u + R_0} = \dfrac{U(x)}{2}$

On éteint V0 et on se place à l'abscisse x : tout le circuit situé à gauche est équivalent à $R(x) = R_0$ et tout le circuit qui est à droite y compris $R_u = R_0$ est du même type que celui situé à gauche, sa résistance vaut R(X-x) qui ne dépend pas de x elle vaut aussi R_0.

Donc, avec V_0 le circuit est équivalent à :



donc $V(x)=\frac{U(x)}{2}$ soit aussi

$$V(x)=\frac{V_0\exp(-bx)}{2}$$

3. Ligne coaxiale

3.1. $z=r+jl\omega$ et $y=g+jc\omega$

3.2. $Z_c{}^2=\frac{z}{y}=\frac{r+jl\omega}{g+jc\omega}$, d'après ce qui précède il faut $Z_0=Z_c$ et donc $Z(x)=Z_0$

Pour obtenir le maximum de puissance moyenne en sortie il faut donc placer en bout de ligne le dipôle d'impédance : $Z_u=Z_0^*$

3.3. $Z_c{}^2=\frac{r\left(1+\frac{jl\omega}{r}\right)}{g\left(1+\frac{jc\omega}{g}\right)}$ indépendant de ω si $\left(1+\frac{jl\omega}{r}\right)=\left(1+\frac{jc\omega}{g}\right)$ donc $\frac{l}{r}=\frac{c}{g}$ ou $\frac{r}{g}=\frac{l}{c}$ alors

$$Z_c=\sqrt{\frac{r}{g}}=\sqrt{\frac{l}{c}}=Z_0=Z(x)=Z_u \text{ (réel)}$$

3.4. Dans ce qui précédait on avait $V(x)=\frac{V_0\exp(-bx)}{2}$ avec $b=gR_c$; il faut remplacer g par y et R_c par Z_c donc b par $y=(g+jc\omega)Z_c$ ainsi que V_0 par $V_0\exp(j\omega t)$

d'où : $\underline{V}(x,t)=\frac{V_0}{2}\exp(j\omega t)\exp(-(g+jc\omega)Z_0x)$ or $cZ_0=c\sqrt{\frac{l}{c}}=\sqrt{lc}$ d'où :

$\underline{V}(x,t)=\frac{V_0}{2}\exp\left(-\sqrt{gr}\,x\right)\exp\left(j\left(\omega t-\sqrt{lc}\,\omega x\right)\right)$ on reconnaît l'équation d'une onde progressive suivant Ox à la vitesse de phase $v_\varphi=\frac{1}{\sqrt{lc}}$, cette onde est amortie avec une longueur caractéristique $\delta=\frac{1}{\sqrt{gr}}$ (« profondeur de pénétration », plus δ est grand, plus l'atténuation est faible).

La vitesse de phase est indépendante de ω donc le milieu est non dispersif. Le milieu est absorbant mais δ est indépendant de ω donc le milieu ne filtre pas les différentes fréquences.

$v_\varphi=\frac{1}{\sqrt{lc}}$ donc la vitesse de phase diminue quand on augmente l .

3.5. $\delta=\frac{1}{\sqrt{gr}}$ varie comme l'inverse de gr. Soit

$$K=gr=\frac{rc}{l}r=r^2\frac{c}{l}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r\omega}{2\sigma}\frac{1}{b}\left(1+\frac{b}{a}\right)^2\frac{1}{\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2}$$

On voit que K dépend du rapport $\frac{b}{a}$ mais aussi de b, on va donc chercher la valeur du rapport $\frac{b}{a}$ qui rend δ maximum pour une valeur de b donnée.

On calcule la différentielle logarithmique de K en posant $\alpha=\frac{b}{a}$: il vient

$\frac{d\delta}{\delta} = -\frac{1}{2}\frac{dK}{K} = -\frac{d\alpha}{1+\alpha} + \frac{\frac{d\alpha}{\alpha}}{\ln(\alpha)}$ ou $\frac{d\delta}{\delta} = -\frac{1}{2}\frac{dK}{K} = \left(-\frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{\alpha\ln(\alpha)}\right)d\alpha$. δ est maximum (l'atténuation minimale) lorsque $\frac{1}{1+\alpha} = \frac{1}{\alpha\ln(\alpha)}$, on résout par dichotomie et on obtient : $\frac{b}{a}$ = 3,6.

On calcule alors $Z_c = \sqrt{\frac{r}{g}} = \sqrt{\frac{l}{c}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_r}}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ = 53 Ω, valeur qui semble très raisonnable.