Jean-Marie DELORME delorme.jean-marie@wanadoo.fr
François-Xavier COQ francois.coq@ac-orleans-tours.fr
Jacki LUCAS jackilucas@aol.com
Lycée POTHIER ORLEANS

Si vous notez des erreurs, merci de nous les signaler.

2004 MINES PONTS
Première épreuve de Physique annulée pour vol de copies
Filière PC

QUELQUES ASPECTS DE PHÉNOMÈNES INTERVENANT DANS LE FONCTIONNEMENT DU CORPS HUMAIN

Partie I: quelques aspects de la circulation sanguine

□ 1- Le volume sanguin d'un adulte est environ de 5 litres.
Une particule fluide est une cellule élémentaire du fluide contenant un grand nombre de molécules (toujours les mêmes): c'est l'échelle mésoscopique.
Le fluide est incompressible si sa masse volumique ρ est constante.
L'écoulement est incompressible si la masse volumique des particules fluide est constante: $\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = 0$ ou div $\mathbf{v} = 0$.
L'écoulement est laminaire si le fluide s'écoule en lames: les particules fluides glissent les unes sur les autres sans se mélanger.
L'écoulement est turbulent si le fluide s'écoule avec des tourbillons.
Le nombre de Reynolds est $R_e = \frac{\rho V L}{\eta}$ où V et L sont la vitesse et la dimension caractéristiques de l'écoulement. L'écoulement est laminaire si $R_e < R_{ec}$, turbulent si $R_e > R_{ec}$.

□ 2- Pour un écoulement incompressible, div $\mathbf{v} = 0$, donc $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$: v_z ne dépend pas de r.
Par symétrie de révolution autour de l'axe Oz, v_z ne dépend pas de θ. L'écoulement est stationnaire, donc v_z ne dépend pas de t. On en déduit que v_z ne dépende que de r: $v_z(r)$.

□ 3- Les projections de l'équation de Navier-Stokes selon $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ et $\hat{\mathbf{r}}$ conduisent à $\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$ et $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$, donc p ne dépend que de z. La projection selon $\hat{\mathbf{z}}$ donne alors: $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \eta \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r}\right)$.
Dans cette équation, le terme de gauche est indépendant de r, celui de droite est indépendant de z, donc cette expression est une constante, notée k, ce qui donne les relations demandées.

□ 4- $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = k$ donne $p(z) = k\,z$ + cste, ce qui, avec $p(0) = p_e$ et $p(L) = p_s$, donne: $k = \frac{p_s - p_e}{L}$.
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{k}{\eta}r$ donne: $r\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r} = \frac{k}{2\eta}r^2 + cste$. En $r = 0$, $\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r}$ reste finie, donc $cste = 0$, d'où $\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r} = \frac{k}{2\eta}r$.
Donc $v_z(r) = \frac{k}{4\eta}r^2$ + cste. De plus $v_z(R) = 0$, car le fluide est visqueux, donc: $\boxed{v_z(r) = \frac{k}{4\eta}\left(r^2 - R^2\right)}$.

□ 5- Le débit de volume est $Q = \iint v_z(r)\,\mathrm{d}S = \iint \frac{k}{4\eta}\left(r^2 - R^2\right)\mathrm{d}r\,r\,\mathrm{d}\theta$, θ variant de 0 à 2π, r de 0 à R, ce qui donne: $Q = -\frac{\pi k}{8\eta}R^4$ et donc: $\boxed{Q = \frac{\pi R^4}{8\eta L}\Delta p}$. On définit la résistance hydraulique par $Q = \frac{\Delta p}{R_h}$, donc:
$\boxed{R_h = \frac{8\eta L}{\pi R^4}}$. À partir de $Q = \frac{\Delta p}{R_h}$ ou de $R_h = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$, on trouve: $[R_h] = \mathrm{M.L^{-4}.T^{-1}}$.

□ 6- Avec le modèle proposé, on trouve $n = 1$ et $A = \dfrac{\pi R^4}{8\eta L}$.

Critiques du modèle: le tuyau n'est pas rigide, pas forcément horizontal (dans ce cas la pesanteur intervient)
la section n'est pas constante pas à symétrie cylindrique.

□ 7- $Q = \iint v_z \mathrm{d}S = \langle v_z\rangle S = \langle v_z\rangle \pi R^2$, donc: $\underline{\langle v_z\rangle} = \dfrac{R^2}{8\eta L}\Delta p = \dfrac{\left(10^{-5}\right)^2.10^{-3}}{8.4{,}5.10^{-3}.10^{-3}} = \underline{2{,}8.10^{-3}\ \mathrm{m.s^{-1}}}$ (cohérent avec la donnée de la question 13).

$R_e = \dfrac{\rho\langle v_z\rangle R}{\eta} = \dfrac{1{,}05.10^3.2{,}8.10^{-3}.10^{-5}}{4{,}5.10^{-3}}$, soit: $R_e = 0{,}65 < R_{ec} = 2.10^3$.

L'écoulement dans le capillaire est donc laminaire.

□ 8- $Q = \pi R^2 v_m = 3{,}3.10^{-5}\ \mathrm{m^3.s^{-1}}$; $\Delta p = \dfrac{8\eta L}{R^2} v_m = 2{,}3.10^3$ Pa; $R_e = 1{,}21.10^3 > R_{ec}$, <u>donc dans l'artère l'écoulement est laminaire, mais c'est limite</u>.

□ 9- $\lambda = \dfrac{c}{f} = 3{,}7.10^{-4}$ m = 370 µm >> r = 10 µm, donc la diffraction est très importante, la tache de diffraction sera très étalée, ce qui intéressant puisqu'on veut récupérer le signal.

□ 10- $f' = f\left|1-\dfrac{v}{c}\cos\alpha\right|$; $f'' = f'\left|1-\dfrac{v}{c}\cos\alpha\right|$, donc $f'' = f\left(1-\dfrac{v}{c}\cos\alpha\right)^2 \approx f\left(1-2\dfrac{v}{c}\cos\alpha\right)$.

$\Delta f = f - f'' = f\,2\,\dfrac{v}{c}\cos\alpha$, donc: $\boxed{v = c\dfrac{\Delta f}{f}\dfrac{1}{2\cos\alpha}}$. $\underline{v = 0{,}65\ \mathrm{m.s^{-1}}}$ (compris entre les valeurs du 7 et du 8)

□ 11- $\Delta f_{\min} = 0$ et $\Delta f_{\max} = f\,2\,\dfrac{v_{\max}}{c}\cos\alpha$, donc $f\left(1-2\dfrac{v_{\max}}{c}\cos\alpha\right) < f'' < f$.

Pour une vitesse comprise entre v et $v + \mathrm{d}v$, la fréquence reçue est comprise entre f'' et $f'' + \mathrm{d}f''$.

De plus $v = c\,\dfrac{f-f''}{f}\dfrac{1}{2\cos\alpha} = \dfrac{k}{4\eta}(r^2 - R^2)$, donc: $-\,c\,\dfrac{\mathrm{d}f''}{f'}\dfrac{1}{2\cos\alpha} = \dfrac{k}{4\eta}2\,r\,\mathrm{d}r$.

On déduit: $\mathrm{d}n = -\dfrac{2n_0 c\eta}{R^2 k f\cos\alpha}\mathrm{d}f''$ puis: $n = -\dfrac{2n_0 c\eta}{R^2 k f\cos\alpha}f''$ + cste: le graphe représentant l'intensité en fonction de f'' est une droite (avec $I = 0$ pour $f'' = f$).

□ 12- L'équation de la diffusion thermique s'écrit: $D\,\Delta T = \dfrac{\partial T}{\partial t}$. En utilisant les grandeurs caractéristiques ℓ pour la longueur et τ pour la durée, il vient $\tau = \dfrac{\ell^2}{D}$. En prenant ℓ = 1 cm, il vient $\tau = 10^5$ s = 28 h, de l'ordre de la journée, pour ℓ = 10 cm, $\tau = 10^7$ s = 2,4 ans.

Donc le sang ne peut pas transporter l'oxygène par diffusion, il le fait par <u>convection</u>.

□ 13- $\pi R_{alv} = v\,\delta t_s$, donc: $\underline{\delta t_s = 0{,}31\ \mathrm{s}}$.

$\tau_{d,air} = \dfrac{R_{alv}^{\ 2}}{D_{air}} = 5{,}5.10^{-4}$ s; $\tau_{d,aqueux} = \dfrac{R_{cap}^{\ 2}}{D_{eau}} = 0{,}1$ s; $\tau_d = \tau_{d,air} + \tau_{d,aqueux} = 0{,}1$ s.

La durée de contact δt_S est supérieure à la durée caractéristique τ_d de la diffusion; donc <u>la diffusion a lieu</u>.

□ 14- $[j] = \mathrm{mol.L^{-2}.T^{-1}}$, donc $\underline{[\gamma] = \mathrm{L.T^{-1}}}$.

Bilan de matière pendant dt, entre z et z + dz, en régime stationnaire:

Ce qui entre pendant dt en z= ce qui sort pendant dt en z + dz + ce qui sort latéralement

$\pi R^2 v\,\mathrm{d}t\,C_c(z) = \pi R^2 v\,\mathrm{d}t\,C_c(z+\mathrm{d}z) + 2\pi R\,\mathrm{d}z\,\gamma(C_c(z) - C_{org}(z))$, et donc: $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}C_c}{\mathrm{d}z} = -\dfrac{2\gamma}{Rv}\left(C_c(z) - C_{org}(z)\right)}$.

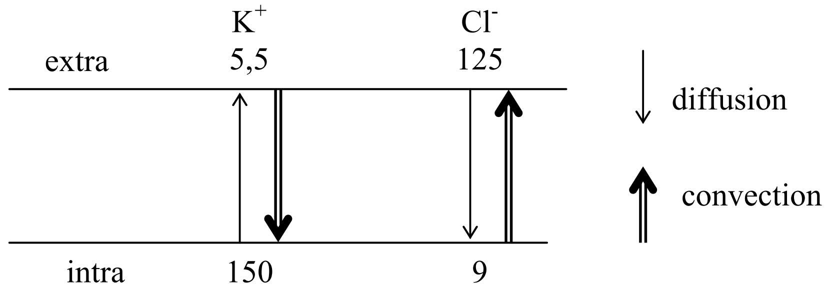
□ 15- $C_{org}(z) = K$, donc en notant $L_0 = \dfrac{Rv}{2\gamma}$ la longueur caractéristique du phénomène, on obtient:

$C_c(z) = K + (C_c(0) - K)\,e^{-z/L_0}$.

L'organe est correctement alimenté si $\gamma \le \dfrac{Rv}{2L_0}$ (- ln(0,3)), et donc $\underline{\gamma_{max} = 1{,}7.10^{-5}\ \mathrm{m.s^{-1}}}$.

Partie II: quelques aspects des échanges transmembranaires

DIFFUSION SEULE



□ 16- Nous prenons un **système ouvert** compris entre z et $z + \mathrm{d}z$, de section S, et nous regardons la variation, entre t et $t + \mathrm{d}t$, du nombre de particules ayant une vitesse $+ v\, \hat{\mathbf{z}}$:
à t, il y en a $C^+(z,t)\, S\, \mathrm{d}z$, à $t + \mathrm{d}t$, il y en a $C^+(z,t+\mathrm{d}t)\, S\, \mathrm{d}z$: la variation est:
$(C^+(z,t+\mathrm{d}t) - C^+(z,t))\, S\, \mathrm{d}z = \dfrac{\partial C^+}{\partial t}\, \mathrm{d}t\, S\, \mathrm{d}z$.

Cette variation est due: aux particules de vitesse $+ v\, \hat{\mathbf{z}}$ qui rentrent en z pendant $\mathrm{d}t$: $C^+(z)\, v\, \mathrm{d}t\ \ S$;
aux particules de vitesse $+ v\, \hat{\mathbf{z}}$ qui sortent en $z + \mathrm{d}z$ pendant $\mathrm{d}t$: $- C^+(z+\mathrm{d}z)\, v\, \mathrm{d}t\ \ S$;
aux particules de vitesse $- v\, \hat{\mathbf{z}}$ qui changent de vitesse: $\dfrac{C^-(z)}{\tau}\, S\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}z$
aux particules de vitesse $+ v\, \hat{\mathbf{z}}$ qui changent de vitesse: $- \dfrac{C^+(z)}{\tau}\, S\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}z$.

Le bilan donne alors: $\boxed{\dfrac{\partial C^+}{\partial t} = - v\, \dfrac{\partial C^+}{\partial z} - \dfrac{C^+ - C^-}{\tau}}$.

On obtient de même l'autre équation en faisant le bilan des particules de vitesse $- v\, \hat{\mathbf{z}}$.

La densité de courant molaire est $j = C^+ v - C^- v$, ce qui donne: $\dfrac{\partial j}{\partial t} = v \left(\dfrac{\partial C^+}{\partial t} - \dfrac{\partial C^-}{\partial t} \right)$. En utilisant les relations précédentes, et en notant que $C = C^+ + C^-$, il vient: $\dfrac{\partial j}{\partial t} = - v^2\, \dfrac{\partial C}{\partial t} - \dfrac{2}{\tau}\, j$. On pose alors:
$\boxed{\tau' = \dfrac{\tau}{2}}$, $\boxed{D = v^2\, \dfrac{\tau}{2}}$ et $\boxed{j_{\mathrm{F}} = - D \dfrac{\partial C}{\partial z}}$, et on obtient l'équation demandée.

□ 17- j atteint son régime stationnaire au bout de quelques τ', de l'ordre de 10^{-10} s, beaucoup plus rapidement que l'évolution de j_{F}, dont la durée caractéristique est de l'ordre de la milliseconde ou de la microseconde. j est donc pratiquement en régime stationnaire, donc: $j \approx j_{\mathrm{F}} = - D\, \dfrac{\partial C}{\partial z}$: c'est la <u>loi de Fick</u> pour la diffusion des particules.

CONVECTION SEULE

□ 18- $[\beta] = \mathrm{M.T^{-1}}$. L'équation du mouvement est: $m\, \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = q\, \mathbf{E} - \beta\, \mathbf{v}$.

□ 19- Si $t >> m/\beta$, le régime permanent est atteint: $\beta\, \mathbf{v} = q\, \mathbf{E}$. le vecteur densité de courant molaire de convection est alors: $\mathbf{j} = C\, \mathbf{v} = C\, \mathbf{v}_\infty$ où $\mathbf{v}_\infty$ est la <u>vitesse limite</u> des particules.

DIFFUSION ET CONVECTION

□ 20- Le flux de particules est dû à la diffusion et à la convection: $\mathbf{j} = \mathbf{j_{dif}} + \mathbf{j_{conv}} = - D\, \dfrac{\partial C}{\partial z}\, \hat{\mathbf{z}} + C\, \dfrac{q}{\beta}\, \mathbf{E}$.

De plus: $\mathbf{E} = - \mathbf{grad}V$, donc: $\boxed{\mathbf{j} = \left(- D \dfrac{\partial C}{\partial z} - \dfrac{q}{\beta} C \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} \right) \hat{\mathbf{z}}}$.

$\dfrac{\partial j}{\partial z} + \dfrac{\partial C}{\partial t} = 0$ traduit la <u>conservation du nombre de particules</u>.

□ 21- En régime stationnaire, $\dfrac{\partial C}{\partial t} = 0$, donc $\dfrac{\partial j}{\partial z} = 0$, d'où $j = \mathrm{cste}$, ce qui montre que $\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}z} + C\, \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\dfrac{qV}{kT} \right)$ est constant.

□ 22- La diffusion se fait des concentrations élevées vers les concentrations faibles.
La convection compense la diffusion car en régime stationnaire, les flux totaux sont nuls.

Pour une espèce dont le flux total est nul: $\frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}z} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{qV}{kT}\right)$, donc: $\boxed{\ln\left(\frac{C_\mathrm{i}}{C_\mathrm{e}}\right) = -\frac{q}{kT}\left(V_\mathrm{i} - V_\mathrm{e}\right)}$.

□ 23- Pour K^+, $q = e$, pour $C\ell^-$, $q = -e$, donc: $\boxed{\frac{C_\mathrm{i}(\mathrm{Cl}^-)}{C_\mathrm{e}(\mathrm{Cl}^-)} = \frac{C_\mathrm{e}(\mathrm{K}^+)}{C_\mathrm{i}(\mathrm{K}^+)}}$.

Avec les données: le terme de gauche vaut $7{,}2.10^{-2}$, celui de droite $3{,}7.10^{-2}$. Ils sont du même ordre de grandeur, mais pas égaux. Le modèle doit être amélioré (voir 25 et la suite).

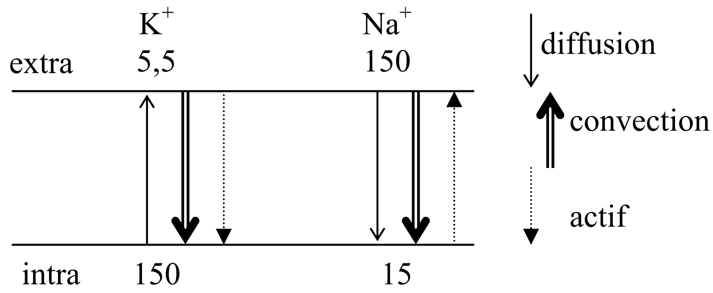
Avec $C\ell^-$, on obtient $V_\mathrm{i} - V_\mathrm{e} = \frac{kT}{e}\ln\left(\frac{C_\mathrm{i}(\mathrm{Cl}^-)}{C_\mathrm{e}(\mathrm{Cl}^-)}\right) = -70$ mV; avec K^+: $V_\mathrm{i} - V_\mathrm{e} = -88$ mV.

□ 24- Les ions sodium ont diffusé à travers la membrane des cellules.

POMPE À SODIUM

□ 25- On devrait avoir $\frac{C_\mathrm{i}(\mathrm{Cl}^-)}{C_\mathrm{e}(\mathrm{Cl}^-)} = \frac{C_\mathrm{e}(\mathrm{Na}^+)}{C_\mathrm{i}(\mathrm{Na}^+)}$ ce qui n'est pas du tout le cas: même le sens n'est pas bon.

□ 26- Pour Na^+, les flux diffusif et convectif sont dans le même sens, le flux actif doit être dans l'autre sens (en régime stationnaire la somme des flux est nulle).
Avac $V_\mathrm{i} - V_\mathrm{e} = -70$ mV, on trouve $\frac{C_\mathrm{i}(\mathrm{K}^+)}{C_\mathrm{e}(\mathrm{K}^-)} = 16{,}8$. Sa valeur expérimentale est $\frac{150}{5{,}5} = 27{,}2$. Il faut donc un flux actif qui augmente $C_\mathrm{i}(\mathrm{K}^+)$, donc dans le sens du flux convectif.



□ 27- En régime stationnaire: $\mathbf{j}_\mathrm{a}(\mathrm{Na}^+) + \mathbf{j}_\mathbf{d}(\mathrm{Na}^+) + \mathbf{j}_\mathbf{c}(\mathrm{Na}^+) = \mathbf{0}$, donc: $j_a = D\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}z} + C\frac{qD}{kT}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}$.

$j_a\, e^{\frac{qV}{kT}} = D\, e^{\frac{qV}{kT}}\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}z} + C\frac{qD}{kT}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\, e^{\frac{qV}{kT}} = D\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(C\,e^{\frac{qV}{kT}}\right)$. On pose $\boxed{\varphi(z) = C(z)\,e^{\frac{qV(z)}{kT}}}$.

Remarque: sans processus actif, $\varphi(z) = \mathrm{cste}$ ($j_\mathrm{a} = 0$); avec processus actif, $\varphi(z) \neq \mathrm{cste}$ ($j_\mathrm{a} \neq 0$);

□ 28- $\mathbf{E}$ est uniforme sur la longueur h et $\mathbf{E} = -\,\mathbf{grad}\,V$, donc $E\,h = V_\mathrm{e} - V_\mathrm{i} = 700$ V.m^{-1}.
Pour un laser de puissance $P = 1$ mW, avec un champ électrique de la forme $E = E_\mathrm{L}\cos(\omega t - kz)$, la puissance moyenne vaut $P = \langle \mathbf{R}.\hat{\mathbf{z}}\,S\rangle = \left\langle\frac{E^2 S}{c\mu_0}\right\rangle = \frac{E_L{}^2 S}{2c\mu_0} = 500$ V.m^{-1}. Le champ électrique transmembranaire est du même ordre de grandeur que le champ électrique d'un laser de puissance 1 mW.

□ 29- Pour Na^+: $\frac{q(V_\mathrm{i} - V_\mathrm{e})}{kT} = -2{,}6$.
Ceci donne $j_\mathrm{a} = -5{,}4.10^{-7}$ mol.m^{-2}.s^{-1}.
Le courant de diffusion est donné par $j_\mathrm{d} = D\frac{C_\mathrm{e} - C_\mathrm{i}}{h} = 2.10^{-3}$ mol.m^{-2}.s^{-1}, donc $j_\mathrm{d} \gg j_\mathrm{a}$ ce qui semble surprenant.

Rq: la formule de j_a n'est pas homogène, il semble manquer h au dénominateur, ce qui donnerait $j_\mathrm{a} = -5{,}4.10^{-3}$ mol.m^{-2}.s^{-1}, de l'ordre de grandeur de j_d et de module supérieur, ce qui est plus en accord avec l'étude précédente.