

SATELLITES DE TÉLÉCOMMUNICATION

Quelques remarques.

Le problème de l'oscillation de l'orientation d'un satellite a déjà été posé bien des fois.

Dans l'épreuve M du concours de l'ENSIETA 1996, l'équilibre et les oscillations sont recherchés grâce au moment des forces de gravitation ; l'énoncé confond le référentiel barycentrique, qui est en translation avec le satellite, et le référentiel tournant, qui est en rotation avec le satellite.

L'épreuve M du concours de Centrale 1982 recherche aussi de la sorte l'équilibre et les oscillations grâce au moment des forces de gravitation. Il ne commet pas d'erreur de référentiel.

Le problème présent détaille mieux les effets du référentiel sur ce calcul dans les questions 9-14.

En outre, il propose une autre résolution par l'énergie mécanique dans le référentiel géocentrique ; telle qu'elle est demandée dans les questions 15-16, cette résolution est pratiquement infaisable. Nous essaierons de la discuter de façon approfondie.

Notons aussi que Lagrange a vécu de 1736 à 1813, et non au dix-septième siècle et que la longueur M_1M_2 est notée $2l$ à partir de la question 9, tandis qu'à partir de la question 17, on se demande si elle est notée l ou $2l$: peut-être trouverez-vous des résultats moitié ou double des miens.

I. SATELLITES SUR ORBITE CIRCULAIRE

1) Posons $r_0 = R_T + h$. Selon la loi fondamentale de la dynamique,

$$\frac{GM_T M_S}{r_0^2} = M_S \frac{v^2}{r_0} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}}.$$

$$T = \frac{2\pi r_0}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{GM_T}} \quad (\text{troisième loi de Kepler}).$$

$$2) E_c = \frac{1}{2} M_S v^2 = \frac{GM_T M_S}{2r_0} \quad \text{et} \quad E_p = -\int F dr = \int \frac{GM_T M_S}{r^2} = -\frac{GM_T M_S}{r}.$$

$$D'où \quad 2E_c + E_p = 0.$$

$$3) \varphi = (OP, OA) = \arccos \frac{R_T}{r_0}, \quad d'où$$

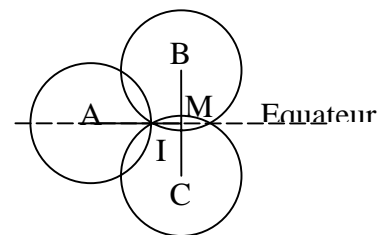
$$\tau = \frac{2\varphi r_0}{v} = 2\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{GM_T}} \arccos \frac{R_T}{R_T + h} = 2\sqrt{\frac{(7,2 \times 10^6)^3}{6,67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}} \arccos \frac{6,4}{7,2} = 919 \text{ s}.$$

$$4) \varphi = \arccos \frac{6,4}{7,2} = 27,27^\circ. \quad D'où \quad \frac{T}{\tau} = \frac{\pi}{\varphi} = \frac{180}{27,27} = 6,6. \quad \text{Il faut}$$

un train de 7 satellites pour couvrir un méridien. Nous supposons ces 7 satellites équidistants.

Pour couvrir la surface de la Terre, il est préférable de décaler les satellites entre deux trains voisins, de sorte qu'un satellite d'un train soit en face du milieu de l'intervalle entre deux satellites du train voisin.

C'est sur l'Équateur que la distance entre deux trains est la plus grande. Considérons la trace A sur la surface terrestre d'un satellite situé dans le plan de l'Équateur et les traces B et C de deux satellites du train voisin ; le milieu M de l'arc BC est aussi sur l'Équateur. Le cas limite est celui où les frontières des zones de visibilité de ces trois satellites se coupent en un point I. Soit $\ell = (OM, OI)$ la différence de longitude entre I et M et $\lambda = (OM, OB)$ la latitude de B ; choisissons des axes Ox porté par OM, Oz passant par les Pôles et Oy perpendiculaire aux

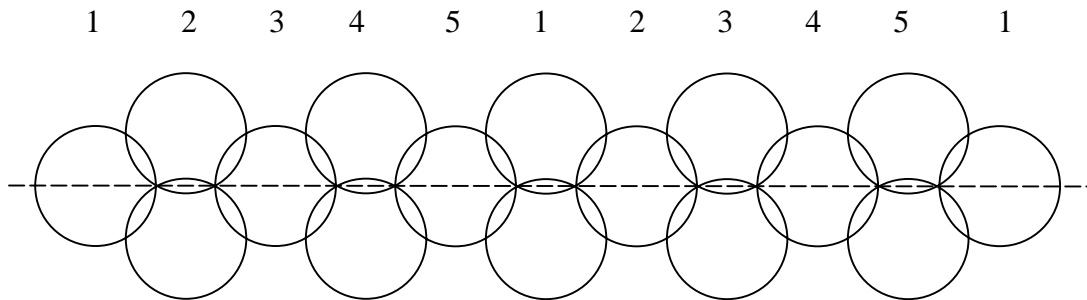


précédents. $\vec{OB} \cdot \vec{OI} = \begin{vmatrix} R_T \cos \lambda & R_T \cos \ell \\ 0 & R_T \sin \ell \\ R_T \sin \lambda & 0 \end{vmatrix} = R_T^2 \cos \varphi$ puisque I est à la limite de visibilité du

satellite B. D'où $\ell = \arccos \frac{\cos \varphi}{\cos \lambda} = \arccos \frac{6400 / (6400 + 800)}{\cos(180/7)} = 9,39^\circ$. Pour une couverture

complète de la Terre, l'écart de longitude entre deux trains de satellites voisins doit être supérieur à $(OA, OI) + (OI, OM) = 27,27 + 9,39 = 36,66^\circ$.

Comme $360/36,66 = 9,82$, il suffit de 5 trains de satellites pour couvrir toute la Terre. Voici la disposition de leurs zones de visibilité le long de l'Equateur, compte tenu de ce que les configurations d'un train de satellites pour ses deux survols de l'Equateur sont décalées, car il comporte un nombre impair de satellites :



5) La période d'un satellite géostationnaire est égale à la période de rotation de la Terre dans le référentiel géocentrique, soit le jour sidéral 86164 s. Son altitude est

$$z = r_0 - R_T = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2} \right) - R_T = \left(\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24} \times 86164^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} - 6,4 \times 10^6 \text{ (m)} = 35820 \text{ km .}$$

Un satellite géostationnaire reste visible indéfiniment.

Un satellite géostationnaire est dans une position fixe. C'est un avantage, car on peut orienter les antennes dans une direction fixe. Au contraire, avec un train de satellite, il faut envoyer ou recevoir les ondes dans toutes les directions ; en outre, il faut fréquemment changer de satellite.

Il suffit de trois satellites géostationnaires, situés dans le plan de l'Equateur à 120° les uns des autres, pour couvrir la plus grande partie de la surface de la Terre. Mais la région des Pôles est nécessairement hors de leur vue.

Un satellite géostationnaire est beaucoup plus loin de la Terre que le train de satellites, d'où un coût de lancement plus élevé par satellite (mais il y en a moins) et une puissance à émettre plus grande (grands panneaux solaires).

L'aller et retour du signal entre la Terre et un satellite géostationnaire dure environ 0,2 s, ce qui est un petit handicap dans les télécommunications.

$$6) [\alpha] = \frac{[F]}{[M_s][v]^2} = \frac{MLT^{-2}}{M(LT^{-1})^2} = L^{-1}.$$

Le satellite est soumis à l'attraction de la Terre \vec{F}_{grav} qui dérive de l'énergie potentielle E_p et à la force non conservative \vec{f}_a ; le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$dE_c = (\vec{F}_{grav} + \vec{f}_a) \cdot d\vec{r} = -dE_p + \vec{f}_a \cdot d\vec{r} . \text{ Compte tenu de } 2E_c + E_p = 0 :$$

$$-\frac{1}{2} dE_p = -dE_p + \vec{f}_a \cdot d\vec{r}$$

$$\frac{GM_T}{r^2} dr = dE_p = 2\vec{f}_a \cdot d\vec{r} = -2\alpha M_s v^3 dt = -2\alpha \left(\frac{GM_T}{r} \right)^{3/2} dt$$

$$\frac{dr}{dt} = -2\alpha\sqrt{GM_T r}$$

$$\frac{dh}{dt} = -2\alpha\sqrt{GM_T(R_T + h)}$$

7) En faisant dans l'équation différentielle précédente les substitutions $dh \rightarrow -\Delta h = -1\text{m}$ et

$$dt \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{GM_T}{(R_T + h)^3}} = 6068\text{s}, \text{ on obtient}$$

$$\alpha = \frac{\Delta h}{2\sqrt{GM_T(R_T + h)}T} = \frac{\Delta h}{4\pi(R_T + h)^2} = \frac{1}{4\pi \times (7,2 \times 10^6)^2} = 1,535 \times 10^{-15} \text{ m}^{-1}.$$

Si on admet que la perte d'altitude est proportionnelle au temps, pour dix ans,

$$\Delta h_{10\text{ans}} = \frac{3,156 \times 10^8}{6068} (\text{m}) = 52,01\text{km}.$$

La solution exacte de l'équation différentielle est

$$t = -\frac{1}{2\alpha\sqrt{GM_T}} \int_{R_T+h_0}^{R_T+h} \frac{dr}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\alpha\sqrt{GM_T}} \left(\sqrt{R_T+h_0} - \sqrt{R_T+h} \right)$$

$$\begin{aligned} \Delta h_{10\text{ans}} = h_0 - h &= R_T + h_0 - \left(\sqrt{R_T+h_0} - \alpha t \sqrt{GM_T} \right)^2 = R_T + h_0 - \left(\sqrt{R_T+h_0} - \frac{\Delta h}{2\sqrt{R_T+h_0}} \frac{t}{T} \right)^2 \\ &= \frac{\Delta h}{\sqrt{R_T+h_0}} \frac{t}{T} - \frac{\Delta h^2 t^2}{4(R_T+h_0)T^2} = 52,01\text{km} - \frac{(3,156 \times 10^8)}{4 \times 7,2 \times 10^6 \times 6068^2} = 52,01\text{km} - 94\text{m} = 51,92\text{km} \end{aligned}$$

Il est logique de trouver des résultats voisins, la variation relative de distance au centre de la Terre étant petite. Notons que le calcul a été effectué avec une précision supérieure à celle des données, de façon à mettre en évidence la faiblesse de l'erreur due à l'approximation linéaire.

On peut trouver paradoxal que, malgré le freinage par l'air, la vitesse croît ; elle croît à cause de l'attraction terrestre, dont le travail, positif, l'emporte sur celui, négatif, de la force de freinage.

8) Quand on divise h par 2, Δh est multiplié par 2, tandis que les autres facteurs varient peu, donc $\beta = 1$ et $\gamma = h\alpha(h) = 8 \times 10^5 \times 1,535 \times 10^{-15} = 1,2 \times 10^{-9}$.

II. STABILISATION DE L'ATTITUDE D'UN SATELLITE SUR SON ORBITE PAR GRADIENT DE GRAVITÉ

Étude dynamique, dans le référentiel mobile.

$$9) \vec{F}_1 = -\frac{GM_T m \vec{r}_1}{r_1^3} ; \vec{F}_2 = -\frac{GM_T m \vec{r}_2}{r_2^3}.$$

$$10) \vec{F}_{ie1} = m\Omega^2 \vec{r}_1 ; \vec{F}_{ie2} = m\Omega^2 \vec{r}_2 ; \vec{F}_{ic1} = 2m\Omega \dot{\theta} \overrightarrow{SM}_1 ; \vec{F}_{ic2} = 2m\Omega \dot{\theta} \overrightarrow{SM}_2.$$

11) Les moments des forces de Coriolis et de la tension de la tige sont nuls, car ces forces sont parallèles à la tige. Le moment des forces d'inertie d'entraînement est également nul, car : $m\Omega^2 (\overrightarrow{SM}_1 \wedge \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{SM}_2 \wedge \overrightarrow{OM}_2) = m\Omega^2 \overrightarrow{SM}_1 \wedge (\overrightarrow{OM}_1 - \overrightarrow{OM}_2) = m\Omega^2 \overrightarrow{SM}_1 \wedge \overrightarrow{M}_2 \overrightarrow{M}_1 = \vec{0}$

Dans (R'), le moment cinétique du satellite $\vec{\sigma} = 2ml^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$ obéit à $\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \overrightarrow{SM}_1 \wedge (\vec{F}_1 - \vec{F}_2)$.

$$\vec{F}_1 - \vec{F}_2 = GM_T m \left(\frac{\overrightarrow{OM}_2}{OM_2^3} - \frac{\overrightarrow{OM}_1}{OM_1^3} \right). \text{ Développons jusqu'à l'ordre 1 en } l/r_0 :$$

$$\overrightarrow{OM}_1 = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SM}_1$$

$$OM_1^2 = r_0^2 + l^2 + 2r_0l \cos \theta$$

$$\frac{1}{OM_1^3} = (r_0^2 + l^2 + 2r_0l \cos \theta)^{-3/2} = \frac{1}{r_0^3} \left(1 - 3 \frac{l \cos \theta}{r_0} + \dots \right)$$

$$\vec{F}_1 - \vec{F}_2 = GM_T m \left((\vec{OS} + \vec{SM}_2) \frac{1}{r_0^3} \left(1 + 3 \frac{l \cos \theta}{r_0} \right) - (\vec{OS} + \vec{SM}_1) \frac{1}{r_0^3} \left(1 - 3 \frac{l \cos \theta}{r_0} \right) \right)$$

$$= GM_T m \left(\frac{\vec{SM}_2 - \vec{SM}_1}{r_0^3} + \frac{6l \cos \theta}{r_0^4} \vec{OS} \right)$$

$$\vec{SM}_1 \wedge (\vec{F}_1 - \vec{F}_2) = - \frac{6GM_T m l^2 \cos \theta \sin \theta}{r_0^3} \vec{u}_z$$

$$\Gamma_s = - \frac{6GM_T m l^2 \cos \theta \sin \theta}{r_0^3}.$$

12) Le théorème du moment cinétique s'écrit $2ml^2 \ddot{\theta} = - \frac{6GM_T m l^2 \cos \theta \sin \theta}{r_0^3}$, soit

$$\ddot{\theta} = -3\Omega^2 \cos \theta \sin \theta.$$

Les positions d'équilibre sont celles pour lesquelles $\cos \theta \sin \theta = 0$, soit $\theta = 0$, $\theta = \pi$ et $\theta = \pm \pi/2$.

13) Ces positions sont stables si $\Gamma_s(\theta)$ est décroissante, ce qui est le cas pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. Elles sont instables si $\Gamma_s(\theta)$ est croissante, ce qui est le cas pour $\theta = \pm \pi/2$. Si alors on pose $\theta = \pi/2 + \varepsilon$ et si ε petit, $\ddot{\varepsilon} - 3\Omega^2 \varepsilon = 0$.

14) Si θ petit, $\ddot{\theta} + 3\Omega^2 \theta = 0$, d'où un oscillateur harmonique de période

$$T_{osc} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}\Omega} = \frac{T}{\sqrt{3}} = \frac{6068}{\sqrt{3}} = 3503 \text{ s}.$$

Étude énergétique, dans le référentiel géocentrique galiléen.

15) Développons l'énergie potentielle de gravitation jusqu'à l'ordre 2 en l/r_0

$$OM_1^2 = r_0^2 + l^2 + 2r_0l \cos \theta$$

$$(1 + \varepsilon)^{-1/2} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3}{8} \varepsilon^2 + \dots$$

$$\frac{1}{OM_1} = \frac{1}{r_0} \left(1 + \frac{2l \cos \theta}{r_0} + \frac{l^2}{r_0^2} \right)^{-1/2} = \frac{1}{r_0} \left(1 - \frac{l \cos \theta}{r_0} + \frac{l^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{2r_0^2} \right) + \dots$$

$$\frac{1}{OM_1} + \frac{1}{OM_2} = \frac{1}{r_0} \left(2 + \frac{l^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{r_0^2} \right) + \dots$$

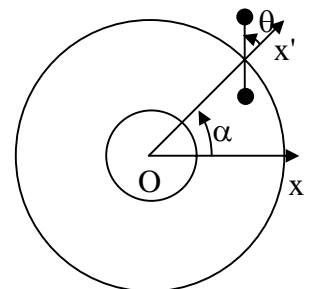
$$E_{p,grav} = - \frac{2GM_T m}{r_0} - \frac{GM_T m l^2 (3 \cos^2 \theta - 1)}{r_0^3} + \dots$$

16)

a) Réponse naturelle à la question telle qu'elle est posée.

Soit α l'angle dont le satellite a tourné sur son orbite et θ l'angle dont la tige a tourné par rapport à la direction de la Terre. Dans le référentiel géocentrique, la tige a tourné de $\alpha + \theta$. La masse du système est $2m$. D'après le théorème de König, son énergie cinétique est

$$E_c = \frac{1}{2} 2m (\dot{r}_0^2 + r_0^2 \dot{\alpha}^2) + 2 \times \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2. \text{ L'énergie totale est donc}$$



$$E = m(\dot{r}_0^2 + r_0^2 \dot{\alpha}^2) + ml^2(\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2 - \frac{2GM_T m}{r_0} - \frac{GM_T ml^2(3\cos^2 \theta - 1)}{r_0^3}.$$

Faisons l'approximation que r_0 et $\dot{\alpha}$ (voisin de $\Omega = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0^3}}$) sont constants, on en déduit, en

$$\text{dérivant par rapport au temps l'expression de } E, \text{ que } 2ml^2(\Omega + \dot{\theta})\ddot{\theta} + \frac{6GM_T ml^2}{r_0^3} \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta = 0,$$

$$\text{ou } \ddot{\theta}(\Omega + \dot{\theta}) + 3\Omega^2 \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta = 0.$$

Cette équation diffère de l'équation trouvée à la question 12 par le terme supplémentaire $\Omega \dot{\theta}$, qui n'est pas négligeable, puisque, comme la période d'oscillation étant de l'ordre de la période orbitale, Ω est à priori de l'ordre de $\dot{\theta}$.

L'équation de la question 12 est juste et celle que nous venons de trouver est fautive. L'origine de l'erreur est la suivante : le moment cinétique total est conservé ; si $\ddot{\theta} \neq 0$, le moment cinétique propre du satellite varie, donc son moment cinétique orbital varie aussi ; le raisonnement précédent néglige à tort cette variation en considérant $mr_0^2 \dot{\alpha}^2$ comme constant ; comme $r_0 \gg l$, bien que $\dot{\alpha}$ et r_0 varient peu, on ne peut pas négliger leurs variations.

L'énoncé, qui semble indiquer que la question se résout par l'énergie, est trompeur ; il faut aussi considérer le moment cinétique.

b) Amélioration de cette réponse.

Supposons négligeables les variations de r_0 et \dot{r}_0 , sans négliger la variation de $\dot{\alpha}$. Comme dans le référentiel géocentrique les forces sont centrales, le moment cinétique total σ_O en O est conservé, d'où en utilisant le théorème de König du moment cinétique :

$$\sigma_O = mr_0^2 \dot{\alpha} + 2ml^2(\dot{\alpha} + \dot{\theta}) = cste \Rightarrow 0 = \frac{d\sigma_O}{dt} \cong mr_0^2 \ddot{\alpha} + 2ml^2(\ddot{\alpha} + \ddot{\theta}) \text{ ou } mr_0^2 \ddot{\alpha} + 2ml^2 \ddot{\theta} \cong 0.$$

Comme l'énergie est conservée, en utilisant le théorème de König de l'énergie cinétique :

$$E = m(\dot{r}_0^2 + r_0^2 \dot{\alpha}^2) + ml^2(\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2 - \frac{2GM_T m}{r_0} - \frac{GM_T ml^2(3\cos^2 \theta - 1)}{r_0^3}$$

$$0 = \frac{dE}{dt} = 2mr_0^2 \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + 2ml^2(\dot{\alpha} + \dot{\theta})(\ddot{\alpha} + \ddot{\theta}) + \frac{6GM_T ml^2}{r_0^3} \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta$$

$$\dot{\alpha} \cong \Omega = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0^3}} \quad \ddot{\alpha} \ll \ddot{\theta}$$

$$0 = 2mr_0^2 \Omega \ddot{\alpha} + 2ml^2(\Omega + \dot{\theta})\ddot{\theta} + 6\Omega^2 ml^2 \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta$$

En utilisant $mr_0^2 \ddot{\alpha} + 2ml^2 \ddot{\theta} \cong 0$, issu de la conservation du moment cinétique, la conservation de l'énergie se simplifie en $0 = 2ml^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + 6\Omega^2 ml^2 \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta$, soit $\ddot{\theta} + 3\Omega^2 \cos \theta \sin \theta = 0$, ce qu'il fallait démontrer ; nous l'avons obtenu au prix d'une hypothèse qui paraît arbitraire : les variations de r_0 et \dot{r}_0 sont négligeables, tandis que celles de $\dot{\alpha}$ ne le sont pas.

c) Étude énergétique dans le référentiel tournant $Ox'y'$, en négligeant les variations de $\dot{\alpha}$ et r_0 .

La force d'inertie de Coriolis ne travaille pas ; la tension de la tige non plus. Le travail de la force d'inertie d'entraînement $m\Omega^2 \overline{OM}$ est aussi nul ; en effet, c'est

$$\delta W = m\Omega^2 \overline{OM}_1 \cdot d\overline{SM}_1 + m\Omega^2 \overline{OM}_2 \cdot d\overline{SM}_2 = m\Omega^2 (\overline{OM}_1 - \overline{OM}_2) \cdot d\overline{SM}_1 = m\Omega^2 \overline{M}_2 \overline{M}_1 \cdot d\overline{SM}_1 = 0$$

, car dans le référentiel tournant S est fixe et un petit déplacement de M_1 est perpendiculaire à la tige.

Le centre de masse S est immobile, d'où $E_c = ml^2\dot{\theta}^2$. L'énergie totale est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de gravitation :

$$E = ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{2GM_T m}{r_0} - \frac{GM_T ml^2(3\cos^2\theta - 1)}{r_0^3}$$

$$\frac{dE}{dt} = 2ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{6GM_T ml^2\dot{\theta}}{r_0^3} \sin\theta \cos\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + 3\Omega^2 \cos\theta \sin\theta = 0.$$

Pour les petites oscillations, θ est petit, d'où $\ddot{\theta} + 3\Omega^2\theta = 0$ et la période d'oscillation est

$$T_{osc} = \frac{T}{\sqrt{3}}.$$

d) *Autre point de vue, en partie mieux argumenté.*

Ne supposons pas r_0 et $\dot{\alpha}$ constants. Dans le référentiel $Sx'y'$, la force de Coriolis et la tension de la tige, toutes deux parallèles à la tige, ne travaillent pas. Calculons la puissance P_{ie} de la force d'inertie d'entraînement. Notons μ_1 et μ_2 les points coïncidents de M_1 et M_2 .

$$P_{ie} = -m\vec{a}_e(\mu_1) \cdot \vec{v}_r(M_1) - m\vec{a}_e(\mu_2) \cdot \vec{v}_r(M_2)$$

$$\vec{v}_r(M_2) = -\vec{v}_r(M_1)$$

$$P_{ie} = -(m\vec{a}_e(\mu_1) - m\vec{a}_e(\mu_2)) \cdot \vec{v}_r(M_1) = -m \left(\frac{d^2 \overrightarrow{\mu_2 \mu_1}}{dt^2} \right)_{Sxy} \cdot \vec{v}_r(M_1)$$

$\overrightarrow{\mu_2 \mu_1}$ décrit un cercle de rayon $2l$ avec l'abscisse angulaire α ; $\frac{d^2 \overrightarrow{\mu_2 \mu_1}}{dt^2}$ a pour projection sur la perpendiculaire à la tige $2l\ddot{\alpha}$, tandis que la vitesse de M_1 dans le référentiel $Sx'y'$, $\vec{v}_r(M_1)$, est perpendiculaire à la tige et a pour grandeur $l\dot{\theta}$; d'où $P_{ie} = -2ml^2\ddot{\alpha}\dot{\theta}$; le théorème de l'énergie cinétique s'écrit en fonction de l'énergie potentielle de gravitation $E_{p,grav}$:

$$\frac{d(ml^2\dot{\theta}^2)}{dt} = -\frac{dE_{p,grav}}{dt} + P_{ie} \Rightarrow 2ml^2\dot{\theta}(\ddot{\theta} + \ddot{\alpha}) = -\frac{dE_{p,grav}}{dt}. \text{ Comme } \ddot{\alpha} \ll \ddot{\theta} \text{ (voir conservation du}$$

moment cinétique total), $2ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} \cong -\frac{dE_{p,grav}}{dt}$. Si on suppose la variation de r_0 assez petite pour

que la variation de $E_{p,grav}$ soit due essentiellement à la variation de θ (comme en b),

$$2ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -\frac{dE_{p,grav}}{dt} = -\dot{\theta} \frac{\partial E_{p,grav}}{\partial \theta} \quad \ddot{\theta} = -\frac{1}{2ml^2} \frac{\partial E_{p,grav}}{\partial \theta} \text{ (cqfd).}$$

e) *Solution rigoureuse, faisant appel au formalisme de Lagrange dans le référentiel géocentrique, hors programme.*

Les tentatives de résolution précédentes ne fonctionnent que grâce à des approximations dont la discussion est compliquée. La bonne solution de ce problème fait appel au formalisme lagrangien, qui justifie simplement ces approximations.

Soit $\psi = \alpha + \theta$ l'angle dont la tige a tourné dans le référentiel géocentrique. Dans ce référentiel, la position du système dépend de trois variables, r_0 , α et ψ . Son lagrangien est

$$L = E_c - E_p = m(\dot{r}_0^2 + r_0^2\dot{\alpha}^2) + ml^2\dot{\psi}^2 - E_{p,grav}(r_0, \theta), \text{ où}$$

$$E_{p,grav}(r_0, \theta) \cong -\frac{2GM_T m}{r_0} - \frac{GM_T ml^2(3\cos^2\theta - 1)}{r_0^3} \text{ et } \theta = \psi - \alpha.$$

Les équations du mouvement sont :

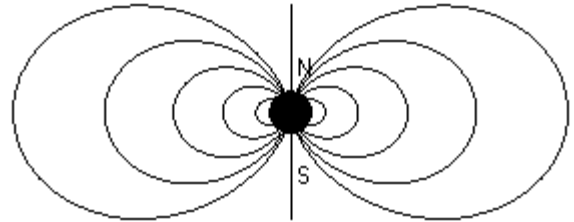
$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_0} \right) &= \frac{\partial L}{\partial r_0} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \alpha} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \psi} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 2m\ddot{r}_0 = -\frac{\partial E_{p,grav}}{\partial r_0} + 2mr_0\dot{\alpha}^2 \\ 2mr_0^2\ddot{\alpha} = -\frac{\partial E_{p,grav}}{\partial \alpha} \\ 2ml^2\ddot{\psi} = -\frac{\partial E_{p,grav}}{\partial \psi} \end{cases}$$

Comme $E_{p,grav}$ ne dépend de α et ψ que par l'intermédiaire de $\theta = \psi - \alpha$, $\frac{\partial E_{p,grav}}{\partial \psi} = \frac{\partial E_{p,grav}}{\partial \theta}$ et

$$\frac{\partial E_{p,grav}}{\partial \alpha} = -\frac{\partial E_{p,grav}}{\partial \theta}, \text{ d'où } \ddot{\theta} = \ddot{\psi} - \ddot{\alpha} = -\left(\frac{1}{2mr_0^2} + \frac{1}{2ml^2} \right) \frac{\partial E_{p,grav}}{\partial \theta} \cong -\frac{1}{2ml^2} \frac{\partial E_{p,grav}}{\partial \theta} \text{ (cqfd).}$$

III. EFFET DYNAMO

17) Voir figure. Le champ magnétique dans le plan équatorial est parallèle au moment dipolaire de la Terre, donc approximativement perpendiculaire à ce plan ; il pointe vers le Nord ; sur le cercle de centre O, il est uniforme.



18) Considérons que $l = SM_1 = SM_2$, comme dans les questions précédentes et que la longueur du câble est $2l$.

$$e_M = \int \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{r} = 2Bvl \text{ où } v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}} = \sqrt{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{7,2 \times 10^6}} = 7455 \text{ m.s}^{-1}.$$

Si $l = 10 \text{ m}$, $e_M = 2 \times 3 \times 10^{-5} \times 7455 \times 10 = 4,47 \text{ V}$ (2,23 V si on considère que $l = 5 \text{ m}$).

Si $l = 10 \text{ km}$, $e_M = 4470 \text{ V}$.

Les satellites tournent habituellement d'ouest en est, donc $\vec{v} \wedge \vec{B}$ est radial et dirigé à l'opposé du centre de la Terre ; le pôle + de e_M est donc M_1 .

19) $F = IB2l = 0,44 \times 3 \times 10^{-5} \times 10 = 1,32 \times 10^{-4} \text{ N}$.

$P = Fv = 1,32 \times 10^{-4} \times 7455 = 0,98 \text{ W}$.

Remarque : cette puissance mécanique est convertie en puissance électrique ; la majeure partie de cette puissance est dissipée par le retour du courant et n'est pas disponible pour le satellite.

20) Si le câble a une longueur de 20 km, $P = 19600 \text{ W}$.

21) Il s'agit d'un freinage si le courant est dû à e_M , ce que l'énoncé ne précise pas (si un générateur impose un courant en sens contraire, la force est motrice).

$f_a = \alpha M_s v^2 = 1,535 \times 10^{-15} \times 2000 \times 7455^2 = 1,7 \times 10^{-4} \text{ N}$ est comparable à la force magnétique ; la descente du satellite serait accélérée ou ralentie modérément.

22) Si on impose un courant en sens contraire de celui produit par e_M , donc de M_2 vers M_1 , et si on néglige la puissance dissipée par le retour du courant, on peut créer une force magnétique motrice $F = P/v = 500/7455 = 0,067 \text{ N}$ devant laquelle la force de freinage des questions 6 et 7 est négligeable.

$$\frac{d(E_c + E_p)}{dt} = Fv \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(-\frac{GM_T M_S}{R_T + h} \right) = \frac{dE_p}{dt} = 2Fv = 2P.$$

$$t = \frac{GM_T M_S \Delta h}{2P(R_T + h)^2} = \frac{6,67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24} \times 2000 \times 500}{2 \times 500 \times (7,2 \times 10^6)^2} = 7720 \text{ s}.$$

23) Si $h = 400 \text{ km}$, il y a peu de changement ; $t' = t \left(\frac{7,2}{6,8} \right)^2 = 8650 \text{ s}$.

24) D'après ce qui précède, un câble lié au satellite peut produire de l'énergie électrique (avec la restriction signalée à la réponse à la question 19) ou servir de moyen de propulsion ; mais il ne peut pas à la fois produire de l'énergie électrique et élever l'orbite. Les ordres de grandeur calculés montrent qu'on peut obtenir une petite quantité d'énergie électrique, ou contrôler l'altitude si on dispose d'une quantité plus importante d'énergie électrique. La production d'énergie électrique par conversion du rayonnement solaire par effet photovoltaïque est plus avantageuse, puisqu'elle peut à la fois produire de l'énergie électrique et permettre de propulser le satellite.

Pour obtenir une pesanteur artificielle, on peut faire tourner sur lui-même à une vitesse angulaire ω suffisante un satellite constitué de deux parties reliées par un long câble ($g = \omega^2 l$).

IV. COMMUNICATIONS SPATIALES

25) Une particule de charge q subit la force $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$.

Comme $B_0 = E_0 / c$, la force magnétique est négligeable si $v \ll c$: $m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E}$.

Si l'amplitude du déplacement est petite devant la longueur d'onde, la valeur de $\exp(-ikz)$ reste constante au cours du temps et $\vec{v}_e = -\frac{eE_0}{i\omega m_e} \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$

De même, $\vec{v}_i = \frac{eE_0}{i\omega M_i} \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$

$$\vec{j} = ne(\vec{v}_i - \vec{v}_e).$$

Comme $M_i \gg m_e$, $\vec{j} = \frac{ne^2 E_0}{i\omega m_e} \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$.

$$26) \vec{\text{rot}} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad -i\vec{k} \wedge \vec{E} + i\omega \vec{B} = \vec{0} \quad \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}.$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \mu_0 \left(\frac{ne^2}{i\omega m_e} \vec{E} + \varepsilon_0 i\omega \vec{E} \right) = -i\vec{k} \wedge \vec{B} = -\frac{k^2}{\omega} \vec{E}$$

$$-\frac{\mu_0 ne^2}{m_e} + \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 = k^2$$

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}.$$

27) Si la fréquence satisfait à $f < f_c = \frac{\omega_p}{2\pi}$, k est imaginaire pur et l'onde est évanescence. Si

$f > f_c$, k est réel et l'onde se propage sans atténuation. L'ionosphère se comporte donc comme un filtre passe-haut.

28) La relation de dispersion est

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}.$$

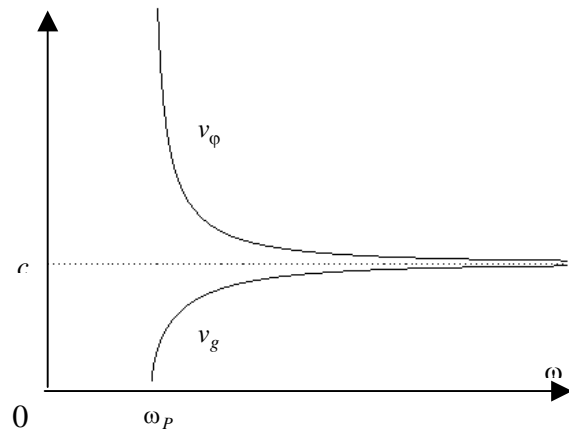
La vitesse de phase est

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_p^2 / \omega^2}}.$$

Comme $2kdk = \frac{2\omega d\omega}{c^2}$, la vitesse de groupe

$$\text{est } v_g = \frac{d\omega}{dk} = c\sqrt{1 - \omega_p^2 / \omega^2}.$$

L'ionosphère est dispersive, puisque ces vitesses dépendent de la fréquence ; elles sont liées par $v_\phi v_g = c^2$.



29) La densité électronique de l'ionosphère est bien inférieure à celle du cuivre, dont l'ordre de grandeur est la densité d'atomes de cuivre $n = \frac{\mu N_A}{M} = \frac{8900 \times 6 \times 10^{23}}{0,063} \approx 10^{29} \text{ atome} \cdot \text{m}^{-3}$.

$$f_c = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{2 \times 10^{10} \times (1,6 \times 10^{-19})^2 \times 9 \times 10^9}{0,91 \times 10^{-30}}} = 1,27 \text{ MHz}.$$

On peut communiquer avec le satellite aux fréquences supérieures à cette valeur.

30) De nuit, un signal assimilé à un paquet d'onde parvient avec le retard

$$\tau = \frac{\Delta h}{v_g} - \frac{\Delta h}{c} = \frac{\Delta h}{c} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - f_c^2 / f^2}} - 1 \right) \approx \frac{\Delta h}{c} \frac{f_c^2}{2f^2} = \frac{1}{2} \frac{2 \times 10^5}{3 \times 10^8} \left(\frac{1,27}{1000} \right)^2 = 5,4 \times 10^{-10} \text{ s}.$$

$$\text{De jour, } \tau' = \tau \frac{n'}{n} = 5,4 \times 10^{-10} \times 25 = 1,3 \times 10^{-8} \text{ s}.$$