G Thomassier p05pm1e

Mines Pont MP Physique I 2005

I Fluide en rotation

❑ 1 . Partir que les forces de pression dans un fluide sont équivalentes à une densité de force volumique :
$d\vec{f} = -$ **grad** $p(M)\, d\tau$

On considère une particule de fluide situé en M(r,z) de masse $dm= \mu(M)\, d\tau$.

Compte tenu de la symétrie , a priori on peut admettre que μ et p ne dépende que de r et z en coordonnées cylindriques (invariance suivant θ)

On peut choisir deux référentiels pour retrouver le résultat :

– **Référentiel terrestre :**

$$- \mu\, d\tau\, \omega^2 r\, \vec{e}_r = - \overrightarrow{grad}\, p(M)\, d\tau + \mu\, d\tau\, \vec{g}$$

– **Référentiel lié au réservoir en rotation uniforme autour de l'axe Oz**

Dans ce référentiel , la particule est immobile ; il existe la force d'inertie d'entraînement.

$$d\vec{f}_e = \mu\, d\tau\, \omega^2 r\, \vec{e}_r \qquad \vec{0} = \mu\, d\tau\, \omega^2 r\, \vec{e}_r - \overrightarrow{grad}\, p(M)\, d\tau + \mu\, d\tau\, \vec{g}$$

En projection : $\dfrac{\partial p}{\partial r} = \omega^2 r\, \mu\,(r,z)$; $\dfrac{\partial p}{\partial z} = -\mu\, g$

On admet comme le suggère l'énoncé que μ et p ne dépende que de r : $\dfrac{dp}{dr} = \omega^2 r\, \mu\,(r,z)$

Pour justifier le fait que l'on peut négliger la variation selon z , comparons les variations de p en admettant que $\mu \approx \mu_0$

$\Delta p(r) = R^2\, \omega^2\, \mu_0 /2$ suivant le rayon et $\Delta p(z) = \mu_0 g H$ suivant l'altitude

soit $R^2\, \omega^2 /2 \gg gH$

Pour un cylindre tel que H = R = 10 cm $\omega \gg$ 14 rad/s soit 2,2 tours/s

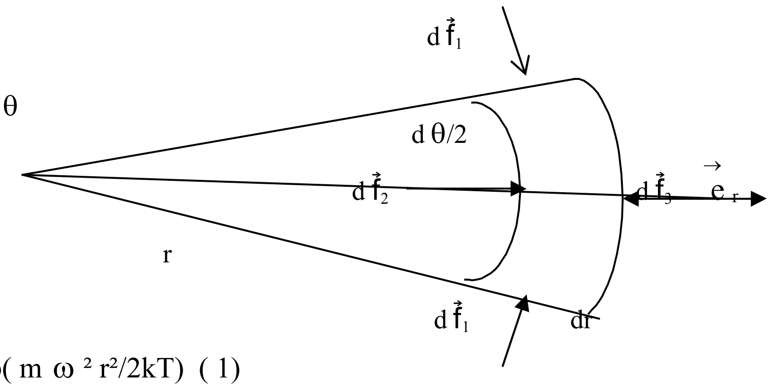
Remarque

On peut retrouver avec beaucoup de précaution la relation demandée sans connaître la formule de l'hydrostatique

On considère une hauteur dz

En projection sur $\vec{e}_r$

$r\, d\theta\; p(r)\, dz - (r+dr)\, dz\, p(r+dr) + p(r) dr dz\, d\theta$
$= - (dp/dr)\, r\, dr\, dz\, d\theta = - (dp/dr)\, d\tau$



❑ **2.** $\dfrac{1}{p}\dfrac{dp}{dr} = \omega^2 r\, m/kT$; p® = p(0) xp(m $\omega^2 r^2/2kT$) (1)

❑ **3.** La masse au repos est $M = \mu_0\, \pi R^2 H$

$$M = \int_0^R H\mu(r)\, 2\pi r\, dr = (2\pi\, m\, p(0)/kT)\, H \int_0^R r \exp(m\, \omega^2 r^2/2kT)\, dr = \mu_0\, \pi R^2 H$$

Soit par identification $p(o)\, [\exp(m\, \omega^2 R^2/2kT) - 1] = \mu_0 R^2\, \omega^2/2$ avec $\mu_0 = m\, p_0/kT$

En reportant p(o) dans l'expression (1) , on trouve la relation demandée [2]

❑ **4.** $\dfrac{dp}{dr} = \omega^2 r\, \mu_0$; $p(r) = p(0) + ½\, \mu_0\, \omega^2 r^2$

La conservation de la masse ne permet pas ici de déterminer p(0)

❑ **5.** Par définition $\chi_T(p_0,T) = \dfrac{1}{\mu_0}\left(\dfrac{\partial \mu}{\partial p}\right)_{P_0,T}$ or $\chi_0 = \dfrac{1}{\mu_0}\left(\dfrac{\mu - \mu_0}{p - p_0}\right)$

On peut considérer que ces deux expressions sont équivalentes

❑ 6.

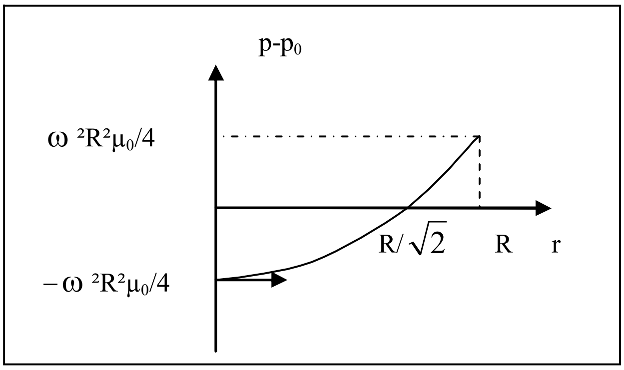
$dp = \omega^2 \mu_0 [1+\varepsilon] r\,dr$ $\quad d\varepsilon / (1+\varepsilon] = \chi_0\, \omega^2 \mu_0\, r dr$ $\quad : \quad \ln(1+\varepsilon) = (\omega^2 \mu_0\ \chi_0) r^2/2 + cte$

soit au premier ordre $\varepsilon = (\omega^2 \mu_0\ \chi_0) r^2/2 + cte \quad = \chi_0 (p-p_0)$

Il vient : $\boldsymbol{\mu = \mu_0 [1+ \chi_0 [(\omega^2 \mu_0\ ) r^2/2 + K]}$

❑ 7.

$M = \mu_0 \pi R^2 H = \int_0^R H\mu(r)\, 2\pi r\, dr$



L'intégrale est triviale , on obtient $\boldsymbol{K = -1/4\ \omega^2 R^2 \mu_0}$

Il vient :

$\mu = \mu_0 [1+ (\chi_0\ \ \omega^2 \mu_0/2)\ \ )(r^2 - R^2/2)]$

$p = p_0 + ½\ \omega^2 \mu_0 (r^2 - R^2/2)$

Pour r= 0 $\boldsymbol{p(o) = p_0 - 1/4\ \omega^2 \mu_0 R^2}$

$\boldsymbol{p(R) = p_0 + 1/4\ \omega^2 \mu_0 R^2}$

Ce résultat est indépendant de χ_0 : il reste vrai même si $\chi_0 = 0$; cela nous permet de déterminer p(o) dans le cas du fluide incompressible (question 4)

Allure du graphe évident

Il faut cependant garder à l'esprit que le domaine de validité de 'expression reste soumis à l'inégalité

$|\chi\ \delta p| << 1$

❑ 8.

$½\ \chi_0 \omega^2 \mu_0 (r^2 - R^2/2) = \chi_0 (p - p_0) = \varepsilon << 1$ il suffit pour cela que $\omega^2 \mu_0\, \chi_0 R^2/4 << 1$

❑ 9.

AN $\omega^2 \mu_0\, \chi_0 R^2/4 \approx 1{,}2.10^{-3} << 1$ L'hypothèse est valide

La vitesse maximale des molécules est $v_{ma} = R\ \omega = 100\ m.s^{-1} << 1450\ m.s^{-1}$ $\boldsymbol{v_{max}/ c_{eau} = 7.10^{-2}}$

❑ 10.

Erreur d'énoncé $\chi_T\, \mu\, c^2 = 1$

Pour un gaz parfait $p / \mu = RT/M$ $\quad \chi_T(p,T) = \dfrac{1}{\mu}\left(\dfrac{\partial \mu}{\partial p}\right)_T = 1/p \quad \chi_0 = 1/p_0$

$\boldsymbol{c^2_{GP} = p_0/\mu_0 = kT/m}$

Or l'expression obtenue la question 2 donne $p(r) = p(0) \exp m\ \omega^2 r^2/2kT$

soit $p(r) = p(0) \exp(v^2/2c^2)$ où $v = r.\omega$

Nous savons que $v_{max} << c_{gp}$ donc $\boldsymbol{p(r) = p(0)(1+ v^2/2c^2) = p(0)[1+ r^2\ \omega^2/2c^2)}$

Cette relation est de la même forme que celle trouvée à la question 4

Le gaz se comporte comme s'il était incompressible .Les contraintes imposées ne changent pratiquement pas sa masse volumique .

II Rotation d'une barre rigide

❑ 11.

Pour retrouver la relation demandée on peut négliger le poids de la barre et dans ce cas la tension $\vec{T}(r)$ de la barre est dirigée selon $\vec{e}_r$.

Dans le référentiel du laboratoire on peut alors écrire $[T(r+dr) - T(r)]\ \vec{e}_r = -\lambda(r)\ \omega^2\, rdr\ \ \vec{e}_r$

soit $dT/dr = -\lambda\ \ \omega^2\, rdr$

En toute rigueur , il faudrait écrire :

$\vec{T}(r+dr) - \vec{T}(r) + \lambda\ \ dr\,\vec{g} = -\lambda(r)\ \omega^2\, rdr\ \ \vec{e}_r$

En projection sur l'axe $\vec{e}_r$ on obtient $(\vec{T}(r+dr) - \vec{T}(r)).\ \vec{e}_r = T(r+dr) - T(r) = -\lambda(r)\ \omega^2\, rdr$

❑ 12.

La primitive donne $T(r) = -\frac{1}{2}\lambda_0\omega^2 r^2 + cte$ $T(L_0) - T(0) = -\lambda_0\omega^2 L_0^2/2$

Or $T(L_0) = 0$ $T(r) = \frac{1}{2}\lambda_0\omega^2(L_0^2 - r^2)$

D'ailleurs on peut retrouver T(0) en considérant la barre en entier et en lui appliquant le théorème du centre d'inertie $T(0)\vec{e}_r + T(_{Oz})\vec{e}_r = \vec{0}$ $T(Oz \rightarrow barre)\vec{e}_r + \lambda_0\omega^2 L_0^2/2\,\vec{e}_r = 0$

❑ **13.**

$T(r) = -1/2\,\lambda_0\omega^2 r^2$ car pour r= 0 T(0) =0

Raisonnement à partir du théorème du centre d'inertie :

F_A (en A par le support) $\vec{e}_r + \lambda_0\omega^2 L_0^2/2\,\vec{e}_r = 0$ or $F_A\vec{e}_r = T(L_0)\vec{e}_r$

$T(L_0) = -\frac{1}{2}\lambda_0\omega^2 L_0^2$ donc **$T(r) = -\frac{1}{2}\lambda_0\omega^2 r^2$**

❑ **14.**

On a une liaison avec deux conditions en A et en O avec L_0 imposée ; on ne peut pas avec ces données déterminer la constante

$T(r) = -\frac{1}{2}\lambda_0\omega^2 r^2 + cte$ $T(L_0) - T(0) = -\lambda_0\omega^2 L_0^2/2$

$T(Oz \rightarrow barre)\vec{e}_r + F_A$ (en a par le support) $\vec{e}_r + \lambda_0\omega^2 L_0^2/2\,\vec{e}_r = \vec{0}$

❑ **15.**

$dT/dr = -\lambda_0[1 - T(r)/sE]\,\omega^2 r$

On sépare les variables : $dT[1 - T(r)/sE]^{-1} = -\lambda_0\omega^2 r dr$

$\ln(1 - T(r)) = \frac{1}{2}(\lambda_0\omega^2 r^2/sE) + cte$ à l'ordre le plus bas **$T(r) = -1/2\,\lambda_0\omega^2 r^2 + K'$**

❑ **16.**

$$M = \int_0^L \lambda dr = \int_0^L \lambda_0(1 - T(r)/sE)dr$$

$\lambda_0 L_0 = \lambda_0 L_0 + (\lambda_0 L_0/sE)(\lambda_0 L_0^2\omega^2/6 - K')$

Soit **$T(r) = \frac{1}{2}\lambda_0\omega^2[1/3\,L_0^2 - r^2]$**

Résultat indépendant du module de rigidité . Il permet donc à la limite de déterminer les deux valeurs de T dans la question 14

$T(0) = 1/6(\lambda_0\omega^2 L_0)$ $T(L_0) = -1/3\,\lambda_0\omega^2 L_0$

La tension est nulle au point $r = L_0/\sqrt{3}$

III Rotation à vitesse angulaire variable

❑ **17.**

Dans le référentiel terrestre appliquons le théormée du moment cinétique en O ,point fixe .

$$\frac{d\sigma_0}{dt}\,\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}} = \vec{M}_0.\,\vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}}$$

Or la liaison en O est une liaison pivot parfaite : (R_u, R_V, R_Z) ; $M_{0z} = 0$

Le moment du poids est : $Moz = Mg\sin\theta\,D/2$ $\sigma_{oz} = J_0\dot{\theta}$

donc $J_0\ddot{\theta} == Mg\sin\theta\,D/2$ **$\ddot{\theta} = 3/2\,g/D\,\sin\theta$**

❑ **18.**

L'énergie cinétique de la barre est : $E_C = \frac{1}{2}J_0\left(\dot{\theta}\right)^2$

L'énergie potentille de la barre est $E_p = Mg\,x_G + cte = M\cos\theta\,D/2 + cte$

La liaison est parfaite : sa puissance est nulle : l'énergie mécanique se conserve

$$E_M = \frac{1}{2} J_0 \left(\dot{\theta}\right)^2 + Mg \cos\theta \, D/2 = Mg\, D/2 \qquad \text{car pour } \theta = 0 \; \dot{\theta} = 0$$

Par dérivation on retrouve la relation précédente

❑ **19.**

$$\vec{a}_G = -1/2\, D \left(\dot{\theta}\right)^2 \vec{u} + \frac{1}{2} D \ddot{\theta} \; \vec{v}$$

Appliquons le théorème du centre d'inertie dans le référentiel terrestre

$$-1/2\, DM \left(\dot{\theta}\right)^2 = R_u - Mg\cos\theta \qquad \frac{1}{2} M D \ddot{\theta} = R_v + Mg \sin\theta$$

On remplace $\ddot{\theta} = 3/2\; g/D \sin\theta$ $\quad \dot{\theta}^2 = (3g/2D)[1- \cos\theta]$

$R_u = 5/2\, Mg \cos\theta - 3/2\, Mg$ $\qquad R_v = -\frac{1}{4} Mg \sin\theta$

❑ **20.**

La cheminée quitte le sol ??

La liaison est une liaison pivot . Si on admet qu'elle est unilatérale on peut admettre que c'est pour $R_U = 0$ soit **$\cos\theta = 3/5$ $\theta = 53°$**

On peut aussi écrire que $R_X = 0$

$R_X = R_u \cos\theta - R_V \sin\theta$ $\quad 9\cos^2\theta - 6\cos\theta + 1 = 0$; **$\cos\theta = 1/3$** ; **$\theta = 70°$**

❑ **21.**

On applique le théorème du centre d'inertie à la partie d de la barre

$$(Md/D)\, d/2\; \ddot{\theta} = R_V + S_v + (Md/D) g \sin\theta$$

On remplace $\ddot{\theta}$ et R_V : **$S_V = Mg \sin\theta\, [\, 3/4\, d^2/D^2 - d/D + 1/4\,]$**

❑ **22.**

On pose $Y = 3x^2-4x+1$ $\quad Y = 4S_V/Mg \sin\theta$ $\quad x = d/D$

$Y(0) = 1$ $\quad Y(1) = 0$ $\quad dy/dx = 0$ pour $x=2/3$ $\quad Y(2/3) = -1/3$

Donc passe par un minimum pour $x = 2/3$

L'effort de cisaillement est le plus important pour x = 0 c'est-à-dire à la base

❑ **23.**

Il faut appliquer le théorème du moment cinétique en O à la logeur d de la cheminée

$$\lambda\; d\, d^2/3\; \ddot{\theta}\; \vec{e}_z = \lambda\; dg \sin\theta /2\; \vec{e}_z + C\; \vec{e}_z + \quad d/2\, \vec{u} \wedge S_V \vec{v}$$

$M = \lambda D$ $\qquad$ on remplace $S_{v=}$ et $\ddot{\theta}$: on obtient la relation **$C = -1/4\, Mgd \sin\theta\, (\, d/D - 1)^2$**

❑ **24.**

Maximum du couple pour $dC/dd = 0$ $\; d = D/3$

$d= 0$ $\; C = 0$ $\quad$; $d = D$ $\; C = 0$ $\qquad$ **$d = D/3$** $\quad |C| = MgD \sin\theta / 27$

La photographie de gauche correspond au cas du couple maximum alors que la photographie de droite à celle de l'effritement . Le modèle de la liaison par pivot (pas très réaliste) , l'inhomogénéité de la cheminée peut expliquer les écarts avec la **théorie**