

Centrale PC 2007. Physique 1

I. Couleurs par transparence

IA1. $400nm < \lambda < 750nm$

IA2. $f = \frac{c}{\lambda}$, $f_{rouge} \sim 4.10^{14}Hz$ et $f_{violet} \sim 7.10^{14}Hz$

IB1. ω_0 est l'inverse d'un temps: $[\omega_0] = T^{-1}$. C'est la pulsation propre de l'oscillateur modélisant l'atome.

IB2.

$$\ddot{\vec{r}} + \gamma \dot{\vec{r}} + \omega_0^2 \vec{r} = -\frac{e}{m}(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \wedge \vec{B}) \quad (1)$$

IB3a. Pour un atome $r \sim 10^{-10}m \ll \lambda$. On peut considérer que le champ électromagnétique extérieur est uniforme à l'échelle atomique.

IB3b. Les électrons atomiques sont, sauf exception, non relativistes $\left\| \frac{\dot{\vec{r}}}{c} \right\| \ll 1$. Comme $\left\| \vec{B} \right\| \sim \frac{\left\| \vec{E} \right\|}{c}$, la contribution magnétique de la force de Lorentz est négligeable devant la contribution électrique.

IB3c. En utilisant l'analyse de Fourier, le champ électrique se ramène à une superposition de composantes monochromatiques dont les effets se superposent (équation linéaire).

IB3d. Un champ quelconque est la superposition de champs à polarisation rectiligne.

IB4a. Le régime permanent correspond à des oscillations forcées.

IB4b. Avec $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{j\omega t}$,

$$\vec{r} = \frac{-\frac{e}{m}\vec{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\gamma\omega}$$

IB5a. $\vec{p} = -e\vec{r} = \frac{\frac{e^2}{m}\vec{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\gamma\omega}$

IB5b. $\vec{P} = n\vec{p}$ soit

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\gamma\omega} \vec{E}$$

IB6a. Pour un milieu dense, $n \sim 10^{30}m^{-3}$ (cas d'un solide) et $\omega_p \sim 10^{16}s^{-1}$

IB6b. $m_{noyau} \sim 2.10^3m$. Avec I4b. on obtient un déplacement du noyau négligeable devant le déplacement électronique.

IB7a. La susceptibilité χ_e est sans dimension.

IB7b. $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2}}$, d'où $Q = \frac{\omega_0}{\gamma}$

IB8. Avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$

• $G(dB) = -20\log(\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}})$ Il s'agit d'un filtre passe-bas d'ordre 2

Basse fréquence: $x \rightarrow 0$ asymptote horizontale $G = 0$

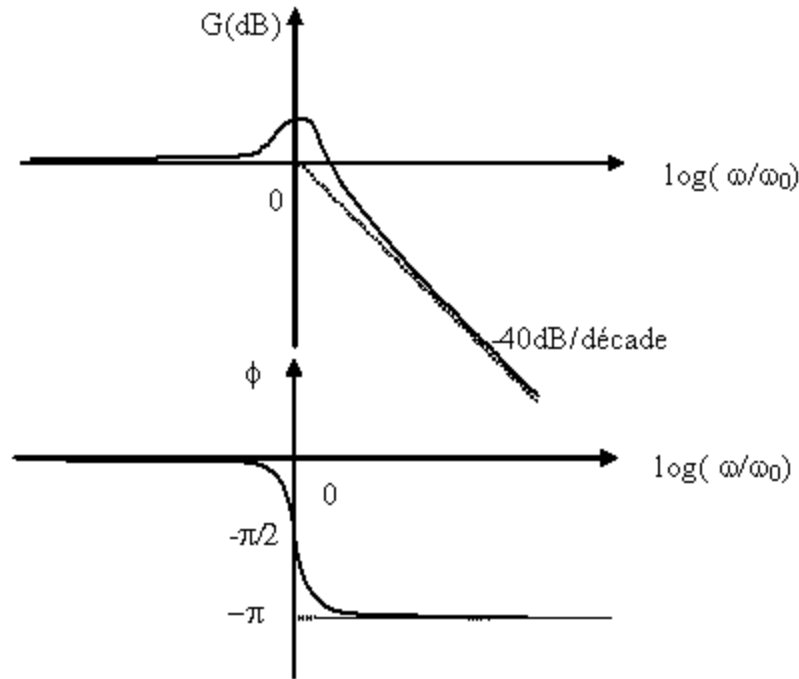
Haute fréquence: $x \rightarrow \infty$ asymptote oblique de pente -40 dB/décade: $G = -40\log x$

Pour $Q = 10$, il y a un maximum pour $x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} = 0,997$ soit $\omega \sim \omega_0$

• $\phi = -\arg(1 - x^2 + j\frac{x}{Q})$ est compris entre $-\pi$ et 0 et $\tan\phi = \frac{\frac{x}{Q}}{1 - x^2}$

Basse fréquence $x \rightarrow 0$ asymptote d'équation $\phi = 0$

Haute fréquence $x \rightarrow \infty$ asymptote d'équation $\phi = -\pi$



IB8b. Un filtre RLC série dont la tension de sortie est la tension aux bornes du condensateur fournit une fonction de transfert identique avec $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

IB8c. L'existence d'un maximum du gain apparaît pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, la pulsation de résonance étant $\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.

IB9a. Pour Maple

Remarque: il faut indiquer les valeurs numériques de $\omega_0, \omega_p, \gamma$ (ici appelé g)

> with(plots):

> omega0:= :g:= :omegap:= ;

> epsilon1:=omega->1+omegap^2*(omega^2-omega0^2)/((omega0^2-omega^2)^2+(g*omega)^2);

> epsilon2:=omega->omegap^2*omega*g/((omega0^2-omega^2)^2+(g*omega)^2);

> plot([epsilon1(omega),epsilon2(omega)],omega=0..3*omega0, color=[red,blue]);

IB9b Par exemple pour la fonction ϵ_r'

> epsilon1:=omega->1+omegap^2*(omega0^2-omega^2)/((omega0^2-omega^2)^2+(g*omega)^2):

> f1:=diff(epsilon1(omega),omega):

> sol1 := [solve(f1=0,omega)]:

> sol1;

IB9c. On complète les instructions précédentes par:

> f2:=subs(g=omega0*u,f1):

> sol2 := [solve(f2=0,omega)]:

> for i from 1 to nops(sol2) do series(sol2[i], u=0, 2) od;

IC1. Pour cette onde polarisée rectilignement, un changement d'origine des temps permet de se ramener à \underline{E}_0 réel.

IC2. Dans le milieu LHI parfait,

$$\begin{cases} \text{div}(\vec{E}) = 0 \\ \text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{div}(\vec{B}) = 0 \\ \text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Avec $\text{rot}(\text{rot}(\dots)) = \dots$ ou avec l'écriture complexe des équations, on obtient la relation de dispersion $\underline{k}^2 = k_0^2 \epsilon_r(\omega)$.

IC3. $k'' \neq 0$ traduit l'absorption du milieu (pas de milieu amplificateur ici: a priori $k'' > 0$) et δ est la longueur de pénétration de l'onde dans le milieu. Le milieu est dispersif car la vitesse de phase $\frac{\omega}{k'}$ dépend a priori de ω .

IC4.

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_0 e^{-k''z} e^{j(\omega t - k'z)} \vec{u}_x \\ \vec{B} &= \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{k' - jk''}{\omega} E_0 e^{-k''z} e^{j(\omega t - k'z)} \vec{u}_y\end{aligned}$$

ID1.

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E} \wedge \vec{B}^*) = \frac{k'}{\omega} \frac{E_0^2}{2\mu_0} e^{-2k''z} \vec{u}_z$$

ID2a. $P_{milieu} = \langle \vec{j}_{pol} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{j}_{pol} \cdot \vec{E}^*)$ avec $\vec{j}_{pol} = \varepsilon_0(\varepsilon_r' - 1 - j\varepsilon_r'')j\omega E_0 e^{-k''z} e^{j(\omega t - k'z)} \vec{u}_x$

$$P_{milieu} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r'' \omega E_0^2 e^{-2k''z}$$

ID2b. $P_{electron} = -m\gamma \langle v^2 \rangle$

$$\vec{v} = \frac{\vec{E}}{-nej\omega} = -\frac{\varepsilon_0((\varepsilon_r' - 1)j + \varepsilon_r'')\omega E_0 e^{-k''z} e^{j(\omega t - k'z)} \vec{u}_x}{ne}$$

$$P_{electron} = -\frac{1}{2} m\gamma \left(\frac{\varepsilon_0 \omega E_0}{ne} \right)^2 e^{-2k''z} ((\varepsilon_r' - 1)^2 + \varepsilon_r''^2) = -\frac{1}{2} m\gamma \left(\frac{\varepsilon_0 \omega E_0}{ne} \right)^2 e^{-2k''z} \frac{\omega_p^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

$$P_{electron} = -\frac{1}{2} m\omega \omega_p^2 \left(\frac{\varepsilon_0 E_0}{ne} \right)^2 e^{-2k''z} \frac{\omega_p^2 \gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

$$P_{electron} = -\frac{1}{2n} \varepsilon_r'' \varepsilon_0 \omega E_0^2 e^{-2k''z}$$

ID2c. $P_{vol} = nP_{electron} = -P_{milieu}$. La puissance fournie au milieu par l'onde est dissipée par les forces de friction.

ID3a. La puissance moyenne transportée par l'onde à travers une section S du milieu de côté z est $P(z) = \iint_S \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot dS \vec{u}_z = \langle \Pi_z(z) \rangle \cdot S$

En faisant un bilan de puissance sur une tranche d'épaisseur dz: $P(z) - P(z + dz) = S dz P_{vol}$, soit

$$-\frac{d\Pi_z}{dz} = P_{vol}$$

On vérifie: $\Pi_z = \frac{k'}{\omega} \frac{E_0^2}{2\mu_0} e^{-2k''z} \Rightarrow \frac{d\Pi_z}{dz} = -2k'' \frac{k'}{\omega} \frac{E_0^2}{2\mu_0} e^{-2k''z}$

$$k''^2 = k_0^2 \varepsilon_r''(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_r' - j\varepsilon_r'') \Rightarrow 2k'k'' = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r'' \Rightarrow \frac{d\Pi_z}{dz} = -\varepsilon_r'' \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} \omega e^{-2k''z} = -P_{vol}$$

ID3b. Cette relation correspond à l'équation de conservation

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}(\vec{\Pi}) + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$$

écrite pour les valeurs moyennes des différents termes en régime permanent. Elle traduit le principe de conservation de l'énergie.

IE1a. $\varepsilon_r'' = 0$.

Avec les hypothèses faites $\varepsilon_r' \sim 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\gamma^2 \omega^2}{2}} \sim 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$. (Si $\gamma \ll |\omega_0 - \omega|$, alors $\gamma \ll (\omega_0 + \omega)$ et $\gamma^2 \ll \omega_0^2 - \omega^2$).

A priori $\varepsilon_r' > 0$ si ω dans le visible et ω_0 dans l'UV. Le milieu est alors transparent pour cette pulsation.

Le milieu est dispersif mais une onde monochromatique se propage sans atténuation.

Si $\varepsilon_r' < 0$, \vec{k} est imaginaire pur. L'onde ne peut pas se propager.

IE1b. Le diélectrique apparaît transparent pour toutes les longueurs d'onde du visible (si $\varepsilon_r' > 0$).

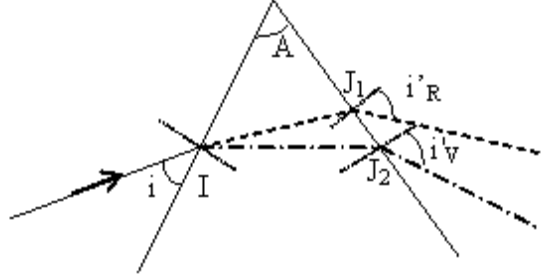
IE1c. $\underline{n}^2 = \underline{\varepsilon}_r' = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$ d'après IE1a.. D'où $\underline{n} = n' = \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}$

IE1d. La pulsation ω_R du rouge est plus petite que la pulsation ω_V du violet. D'où $n_R < n_V$.

La loi de Descartes pour la réfraction en I s'écrit $\sin i = n \sin r$. Donc $r_R > r_V$. Dans le prisme d'angle A , $r + r' = A$. Donc $r'_R < r'_V$.

La loi de Descartes en J_1 et J_2 donnent: $\sin i'_R = n_R \sin r'_R$ et $\sin i'_V = n_V \sin r'_V$. On en déduit $i'_V > i'_R$.

A la sortie du prisme on obtient un faisceau divergent avec des rayons ayant subi une déviation d'autant plus grande que la fréquence est plus grande. Ainsi le rouge est moins dévié que le violet.



IE2a. $\omega = \omega_0 \Rightarrow \epsilon'_r = 0$ et $\epsilon''_r = \frac{\omega_p^2}{\gamma\omega_0} \gg 1$

$\underline{n}^2 = -j \frac{\omega_p^2}{\gamma\omega_0} = \left(\sqrt{\frac{\omega_p^2}{2\gamma\omega_0}} (1 - j) \right)^2$. On en déduit (on ne garde que la solution correspondant à un amortissement) $n' = n'' = \sqrt{\frac{\omega_p^2}{2\gamma\omega_0}}$

IE2b. Le milieu est absorbant pour $\omega = \omega_0$, la longueur de pénétration de l'onde dans le milieu est très faible puisque $n'' \gg 1$. Le milieu est opaque.

IE2c. Le rubis apparaît rouge par transparence puisque l'onde associée au bleu n'est pas transmise.

IE2c. Aucune onde visible n'est absorbée par l'aigue-marine qui est donc transparente. La longueur d'onde absorbée est d'environ $4\mu\text{m}$, ce qui correspond à l'infra-rouge (En fait une aigue marine paraît très légèrement bleutée, il doit y avoir une légère absorption dans le rouge, non décrite ici)

I3a. L'eau est transparente. Elle ne possède pas de raie d'absorption dans le visible.

I3b. Le rayonnement solaire ne se limite pas au visible. En particulier, les niveaux de vibration des molécules d'eau sont excités par le rayonnement infra-rouge du soleil. L'énergie cinétique de vibration des molécules est associée à une élévation de température de l'eau.

IE4. La coloration de ces solutions est causée par l'absorption de certaines longueurs d'onde ou bandes de longueurs d'ondes, associée à $k'' \neq 0$. D'après IDA, la norme $\langle \Pi \rangle$ décroît exponentiellement avec la distance parcourue par l'onde. $\langle \Pi \rangle = \langle \Pi \rangle_0 e^{-2k''d}$. Ceci est utilisé en chimie (loi de Beer-Lambert) pour mesurer la concentration d'espèce colorée dont dépend le coefficient d'absorption: avec le modèle précédent, k'' est proportionnel à ω_p , donc à n nombre d'atomes ou molécules

II. Couleurs par diffusion

IIA1. Approximation 1: l'extension spatiale du dipôle $a = \frac{e|E_0|}{m\omega_0^2} \ll \lambda$, cf IB3a qu'on peut interpréter ici par $a \ll \frac{c}{f}$, soit $v \ll c$: les charges ne sont pas relativistes.

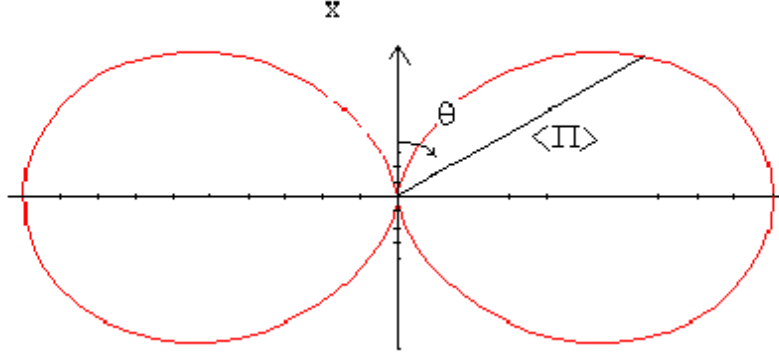
Approximation 2: $a \ll r$: on s'intéresse au champ rayonné à grande distance du dipôle: validité de l'approximation dipolaire.

Approximation 3: $r \gg \lambda$: on se place dans la zone de rayonnement: en particulier on tient compte du temps de propagation.

IIA2. Avec $\underline{\vec{p}} = p_0 e^{j\omega t} \underline{\vec{u}}_x$,

$$\langle \underline{\vec{\Pi}} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*) = \frac{e^4 |E_0|^2}{(m\omega_0^2)^2} \frac{\omega^4 \sin^2(\theta)}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3 r^2} \underline{\vec{u}}_r$$

IIA3. Cette courbe, ici représentée en polaires, représente la variation de la puissance surfacique émise par le dipôle selon la direction θ .



$$\text{IIA4. } P = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \langle \vec{\Pi} \rangle r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi = \frac{\epsilon^4 |E_0|^2}{(m\omega_0^2)^2} \frac{\omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

IIB1. Le ciel sans nuage est bleu, ce qui correspond à une puissance maximale diffusée par les électrons atmosphériques pour les "grandes fréquences", en raison de la dépendance de la puissance en ω^4 . (l'oeil est plus sensible au bleu qu'au violet).

IIB2. Cette diffusion préférentielle des hautes fréquences correspond à une absorption sélective du rayonnement incident. Au soleil couchant, la lumière solaire a traversé une grande épaisseur d'atmosphère et s'est ainsi appauvrie progressivement en "grandes fréquences", d'où les couchers de soleil rouges.

IIB3. Dans les situations décrites, la taille des centres diffuseurs (ou d'une partie d'entre eux: gouttelettes d'eau dans le brouillard, fumée exhalée) n'est plus petite devant la longueur d'onde

IV. Couleurs interférentielles

$$\text{IIIA1. } \left| \frac{E_1}{E_0} \right| = \left| \frac{1-n}{1+n} \right| = 0,2$$

$$\text{IIIA2. } \left| \frac{E_2}{E_0} \right| = \left| \frac{2}{1+n} \cdot \frac{n-n'}{n+n'} \cdot \frac{2n}{1+n} \right| = 0,058 \quad \left| \frac{E_2}{E_1} \right| = 0,29$$

$$\left| \frac{E_3}{E_0} \right| = \left| \frac{2}{1+n} \cdot \left(\frac{n-n'}{n+n'} \right)^2 \cdot \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{2n}{1+n} \right| \Rightarrow \left| \frac{E_3}{E_2} \right| = 0,012$$

L'amplitude de l'onde 3 est respectivement égale à 1,2% et 0,3% de celles de l'onde 2 et de l'onde 1. Les amplitudes des ondes suivantes sont de plus en plus faibles. On les néglige donc dans la suite (somme infinie mais qui converge vers un terme négligeable)

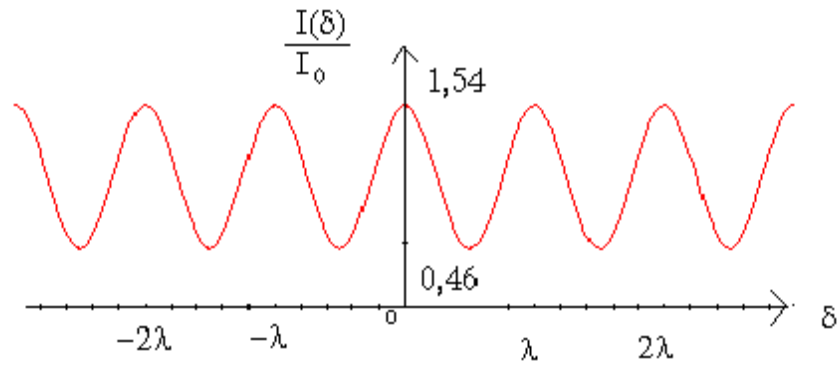
IIIA3. On considère les interférences à l'infini entre les ondes 1 et 2. L'intensité lumineuse réfléchie est de la forme (K facteur de proportionnalité):

$$I = K(E_1 + E_2)(E_1 + E_2)^* \text{ avec } \underline{E_2} = \left| \frac{E_2}{E_1} \right| \underline{E_1} e^{\frac{2j\pi\delta}{\lambda}}$$

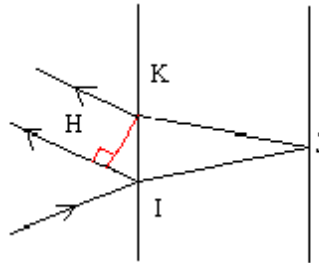
$$I = K \left| \underline{E_1} \right|^2 \left(1 + \left| \frac{E_2}{E_1} \right|^2 + 2 \left| \frac{E_2}{E_1} \right| \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right) \right) = I_0 \left(1 + C \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right) \right) \text{ avec}$$

$$C = \frac{2 \left| \frac{E_2}{E_1} \right|}{1 + \left| \frac{E_2}{E_1} \right|^2}$$

$C = 0,54$ correspond au contraste $C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$, les franges sont visibles mais peu contrastées.



III A3b. La réflexion huile-air subie en plus par le rayon 3 provoque un déphasage de π (coefficient de réflexion négatif) qui vient ajouter une différence de chemin optique de $\frac{\lambda}{2}$

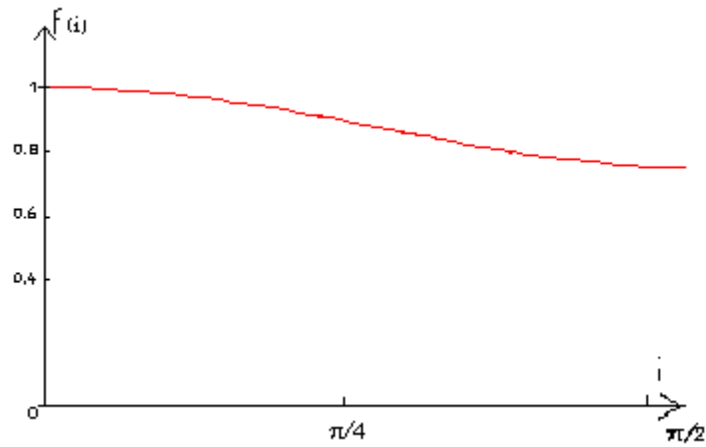


$$\delta = \frac{\lambda}{2} + n(IJ + JK) - IH = \frac{\lambda}{2} + \frac{2ne}{\cos r} - 2e \tan r \sin i = \frac{\lambda}{2} + \frac{2ne}{\cos r} (1 - \sin r \sin i) = \frac{\lambda}{2} + 2ne \cos r$$

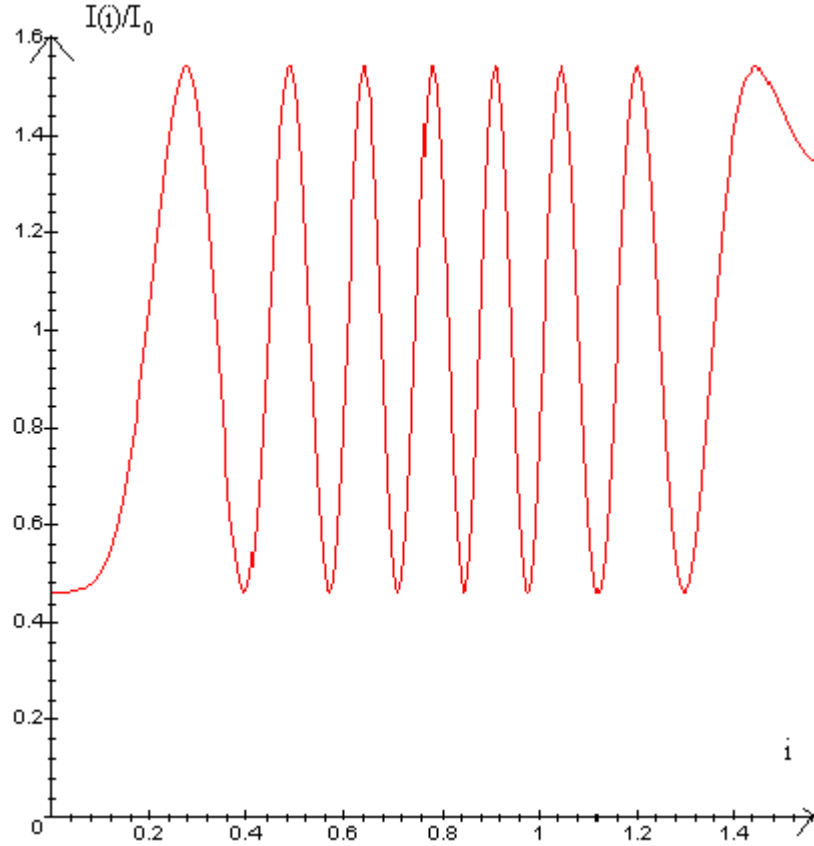
soit

$$\delta = \frac{\lambda}{2} + 2ne \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}}$$

III A3c.



III A3d. Erreur d'énoncé? Schéma pour $e = 10\lambda$



III.B1. La présence d'irisations est due aux interférences entre les deux premiers rayons réfléchis. Suivant la valeur de l'angle d'incidence, on observe des maxima d'intensité pour différentes longueurs d'ondes.

III.B2. Pour observer les différentes teintes il faut changer l'angle sous lequel on regarde la couche d'huile. En changeant cet angle, donc i , on observe les différentes couleurs.

III.B3. Pour $e \sim 50\lambda$, il devient très probablement impossible de repérer les maxima des différentes couleurs, qui se recouvrent. Cela donne $e \sim .10^{-5}m$. Lorsqu'on dépasse le seuil, on parle d'aspect "métallique" de la surface (?).

Partie IV: Couleurs par diffraction

IVA. On ne tient pas compte de la diffraction dans la direction de l'axe (Ox) car la longueur des fentes $L \gg \lambda$

IVB1. En appliquant le principe d'Huygens-Fresnel pour la diffraction à l'infini, on obtient que l'amplitude diffractée par la fente (0) est de la forme $\underline{a}_0(i, \theta, e, \lambda) = Ae^{j\varphi(O)} \int_{-e/2}^{e/2} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}y(\sin\theta - \sin i)} dy$ où $\varphi(O)$ est la phase de l'onde diffractée par l'élément de surface en O et de même que l'amplitude diffractée par la fente (1) est de la forme $\underline{a}_1(i, \theta, e, \lambda) = Ae^{j\varphi(O_1)} \int_{a-e/2}^{a+e/2} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(y-a)(\sin\theta - \sin i)} dy$ où $\varphi(O_1)$ est la phase de l'onde diffractée par l'élément de surface au centre O_1 de la fente, soit $\underline{a}_1(i, \theta, e, \lambda) = \underline{a}_0(i, \theta, e, \lambda)e^{j(\varphi(O_1) - \varphi(O))} = \underline{a}_0(i, \theta, e, \lambda)e^{j\varphi}$ avec:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}a(\sin(\theta) - \sin(i))$$

IVB2. L'amplitude diffractée par le réseau est $\underline{A}_{tot} = \underline{a}_0\underline{A}(N, \varphi)$ avec $\underline{A}(N, \varphi) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(n\varphi)}$ On en déduit l'intensité: $I_{tot} = \underline{A}_{tot}\underline{A}_{tot}^* = |\underline{a}_0|^2 \left| \underline{A}(N, \varphi) \right|^2$

soit $I(N, \varphi) = \left| \underline{A}(N, \varphi) \right|^2$

\underline{a}_0 peut être considérée comme indépendante des angles si chaque fente est infiniment mince.

IVB3. L'intensité diffractée est maximale pour $\varphi = 2k\pi$, k entier

IVC1. $\varphi' = \frac{2\pi}{\lambda} a(\sin(\theta') + \sin(i))$ en tenant compte de l'orientation des angles (sur le schéma $i > 0, \theta' < 0$)

IVC2. Les différents ordres diffractés peuvent être observés dans le plan focal image d'une lentille convergente.

On peut aussi les observer à l'œil en utilisant un goniomètre sur le plateau duquel on place le disque. L'observation se fait alors via la lunette pour les différents angles possibles.

IVC3. L'ordre k correspond à $a(\sin(\theta') + \sin(i)) = k\lambda$, soit ici $\sin(\theta') = k\frac{\lambda}{a}$. Avec $400 < \lambda < 800nm$, on a pour les ordres positifs:

ordre 1: $14, 5^\circ < \theta' < 30^\circ$

ordre 2: $30^\circ < \theta' < 90^\circ$

et des positions symétriques pour les ordres négatifs.

Il n'y a donc pas de recouvrement des ordres

IVC4. L'angle minimal pour l'ordre 1 est relativement élevé, ce qui permet de voir son propre reflet dans un disque compact sans être vraiment perturbé par les ordres différents de 0. Les couleurs semblent plus "violette", ce qui correspond à l'influence des longueurs d'ondes les moins déviées de l'ordre -1 et +1.

IVD1. L'amplitude diffractée par le réseau cubique est $\underline{A}_{tot} = \underline{a}_1 \underline{A}(N, \varphi_y, \varphi_z)$.

$\underline{A}(N, \varphi_y, \varphi_z) = \sum_{n_y=0}^{N_y-1} \sum_{n_z=0}^{N_z-1} e^{j(n_y \varphi_y + n_z \varphi_z)} = \sum_{n_y=0}^{N_y-1} e^{j(n_y \varphi_y)} \sum_{n_z=0}^{N_z-1} e^{j(n_z \varphi_z)}$ On en déduit l'intensité:

$$I_{tot} = \underline{A}_{tot} \underline{A}_{tot}^* = \left| \underline{a}_1 \right|^2 I(N_y, \varphi_y) I(N_z, \varphi_z)$$

$$\text{avec } I(N_y, \varphi_y) = \left| \sum_{n_y=0}^{N_y-1} e^{j(n_y \varphi_y)} \right|^2$$

IVD2. Pour $r' = -r$, $\varphi_y = 0$ et

$$\varphi_z = \frac{2\pi}{\lambda'} (2a \cos r) = \frac{4\pi n}{\lambda} a \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}}$$

IVD3. $\varphi_z = 2k\pi$ correspond à $\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = k\frac{\lambda}{2a}$, soit avec k entier:

$$i = \pm \arcsin \sqrt{n^2 - \left(k\frac{\lambda}{2a}\right)^2}$$

IVD4. On doit avoir $n^2 - \left(k\frac{\lambda}{2a}\right)^2 \leq 1$ pour toutes les λ du visible, soit $a \geq |k| \frac{\lambda}{2\sqrt{n^2-1}}$

$$a_{\min} = \frac{\lambda}{2\sqrt{n^2-1}}$$

La valeur minimale de a est $.0,36\mu m$

IVD5. $\varphi_y = 0$ et $\varphi_z = 2na$ (erreur d'énoncé? φ_z et non φ_x)

Un maximum d'intensité diffractée est obtenu pour $2na = k\lambda$

$$a_1 = 0,16\mu m \quad k\lambda_1 = 0,48\mu m$$

$$a_2 = 0,17\mu m \quad k\lambda_2 = 0,51\mu m$$

$$a_3 = 0,21\mu m \quad k\lambda_3 = 0,63\mu m$$

Pour avoir des λ dans le visible, il faut $k = 1$ et on retrouve ainsi des intensités diffractées maximales pour les couleurs bleue (λ_1), turquoise (λ_2), rouge (λ_3).