

Partie I. Formation de la neige dans l'atmosphèreI. A. Equilibre d'un corps pur sous deux phases

$$I.A.1 \quad G = U + PV - TS \quad dS = -SdT + VdP \Rightarrow \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P = -S \quad \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T = V$$

$$I.A.2 \quad 1^{\text{er}} \text{ principe: } \Delta U = W_{\text{pression}} + Q = -P_0 \Delta V + Q \Rightarrow Q = \Delta(U + P_0 V)$$

$$2^{\text{e}} \text{ principe: } \Delta S = S_e + S_c = \frac{Q}{T_0} + S_c \text{ avec } S_c \geq 0 \Rightarrow T_0 \Delta S - Q \geq 0$$

$$\text{d'où: } \Delta(T_0 S - U - P_0 V) \geq 0 \quad \text{car: } \begin{array}{l} T_0 = T \text{ température du système} \\ P_0 = P \text{ pression du système} \end{array}$$

$$\text{donc: } \Delta(U + PV - TS) \leq 0$$

soit: $\Delta G \leq 0$ G ne peut que diminuer et sera minimale à l'équilibre

$$I.A.3 \quad \text{A l'équilibre} \quad \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{T,P} = 0$$

$$I.A.4 \quad a) \quad G = m_1 g_1 + m_2 g_2 \text{ avec: } m_2 = m - m_1 \text{ donc: } G = m g_2 + m_1 (g_1 - g_2)$$

$$b) \quad \text{Equilibre si: } \left(\frac{\partial G}{\partial m_1}\right)_{T,P} = 0 \text{ d'où: } g_1 = g_2$$

$$I.A.5 \quad a) \quad L_{1 \rightarrow 2} = T(\Delta_2 - \Delta_1)$$

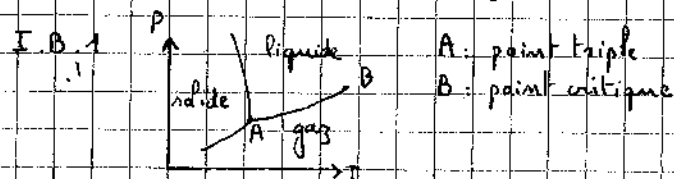
$$b) \quad g_1(T,P) = g_2(T,P) \text{ et } g_1(T+dT, P+dP) = g_2(T+dT, P+dP) \text{ pour les deux équilibres}$$

$$\text{d'où: } g_1(T+dT, P+dP) - g_1(T,P) = g_2(T+dT, P+dP) - g_2(T,P)$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial T} dT + \frac{\partial g_1}{\partial P} dP = \frac{\partial g_2}{\partial T} dT + \frac{\partial g_2}{\partial P} dP$$

$$\Delta_1 dT + v_1 dP = \Delta_2 dT + v_2 dP \Rightarrow (\Delta_2 - \Delta_1) dT = (v_2 - v_1) dP$$

$$\text{finalement: } L_{1 \rightarrow 2} = T(v_2 - v_1) \frac{dP}{dT}$$

I. B. Formation de cristaux de glace dans un nuage.

I.B.2

donc: $L_s = L_f + L_v(T_c)$

D'après la relation de Clapeyron: $L_s = T_c v_v \left(\frac{dP}{dT}\right)_{\text{sublimation}}$; $L_v(T_c) = T_c v_v \left(\frac{dP}{dT}\right)_{\text{vaporisation}}$

Or: $L_s > L_v(T_c)$ donc: $\left(\frac{dP}{dT}\right)_{\text{sublimation}} > \left(\frac{dP}{dT}\right)_{\text{vaporisation}}$

I.B.3 équation d'état : $u_v = \frac{RT}{MP}$ relation de Clapeyron : $L_v \approx T u_v \frac{dP}{dT}$ avec : $L_v = a - bT$ (2)

$$\text{donc } a - bT = \frac{RT^2}{MP} \frac{dP}{dT} \Rightarrow \frac{dP}{P} = \frac{M}{R} \left(\frac{a}{T^2} - \frac{b}{T} \right) dT$$

$$\Rightarrow \ln P = \frac{M}{R} \left(-\frac{a}{T} - b \ln T \right) + \text{cte}$$

Avec le point triple on trouve : $\ln \frac{P}{P_E} = \frac{M}{R} \left(-\frac{a}{T} + \frac{a}{T_E} - b \ln \frac{T}{T_E} \right)$

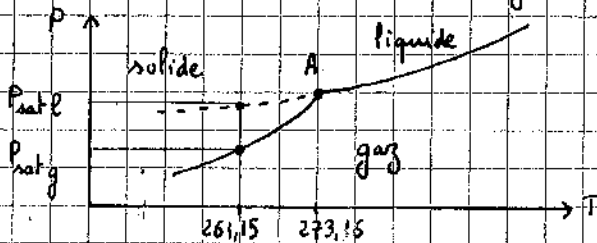
donc : $P = P_E \exp \left[\frac{M}{R} \left(\frac{a}{T} + \frac{a}{T_E} - b \ln \frac{T}{T_E} \right) \right]$ (courbe de vaporisation)

I.B.4 $L_s = T u_v \frac{dP}{dT} = \frac{RT^2}{MP} \frac{dP}{dT} \Rightarrow \frac{dP}{P} = \frac{ML_s}{R} \frac{dT}{T^2} \Rightarrow \ln P = -\frac{ML_s}{RT} + \text{cte}$

Avec le point triple on trouve : $\ln \frac{P}{P_E} = \frac{ML_s}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_E} \right)$

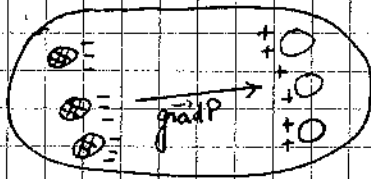
donc : $P = P_E \exp \left[-\frac{ML_s}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_E} \right) \right]$ (courbe de sublimation)

I.B.5 A.N. $L_s = 2,83 \cdot 10^6 \text{ J.kg}^{-1}$; $P_{\text{satg}} = 2,17 \cdot 10^{-3} \text{ bar}$ $P_{\text{satl}} = 2,44 \cdot 10^{-3} \text{ bar}$



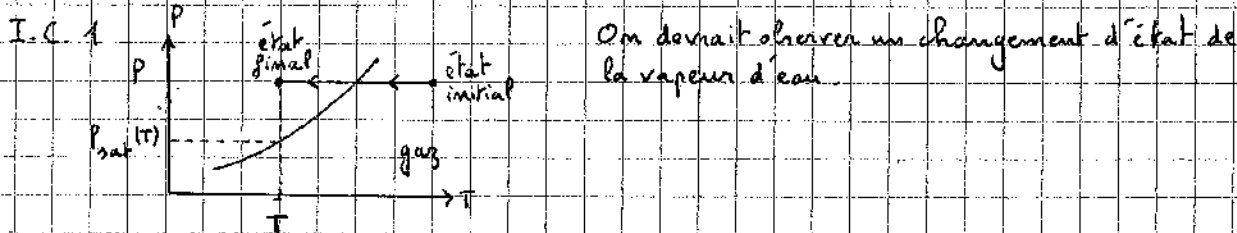
I.B.6 Cet ensemble n'est pas en équilibre car on n'est pas au point triple

I.B.7



I.B.8 Terme $\text{grad } P$ dans l'équation d'Euler $\Rightarrow$ mouvement de la vapeur d'eau dans le sens de $\text{grad } P$
 $\Rightarrow$ disparition de la phase liquide

I.C Influence de la tension superficielle sur l'équilibre liquide-vapeur



I.C.2 $\left(\frac{\partial g_l}{\partial P} \right)_T = u_l$ $\left(\frac{\partial g_v}{\partial P} \right)_T = u_v$

I.C.3 en intégrant : $g_l(T, P) - g_l(T, P_0) = u_l (P - P_0)$

I.C.4 $\left(\frac{\partial g_v}{\partial P} \right)_T = u_v = \frac{RT}{MP} \rightarrow dg_v = \frac{RT}{M} \frac{dP}{P} \rightarrow g_v(T, P) - g_v(T, P_0) = \frac{RT}{M} \ln \frac{P}{P_0}$

I.C.5 On a: $g_e(T, P_{\text{sat}}) = g_v(T, P_{\text{sat}})$ et $g_e(T, P'_{\text{sat}} + P_1) = g_v(T, P'_{\text{sat}})$

donc $g_e(T, P'_{\text{sat}} + P_1) - g_e(T, P_{\text{sat}}) = g_v(T, P'_{\text{sat}}) - g_v(T, P_{\text{sat}})$

soit $u_e(P'_{\text{sat}} + P_1, P_{\text{sat}}) = \frac{RT}{M} \ln \frac{P'_{\text{sat}}}{P_{\text{sat}}}$ donc: $\ln \frac{P'_{\text{sat}}}{P_{\text{sat}}} = \frac{u_e M}{RT} (P'_{\text{sat}} + P_1 - P_{\text{sat}})$

I.C.6 $r = 2 \text{ mm}$: $\alpha = 1,78$ $r = 0,1 \mu\text{m}$: $\alpha = 1,01$

I.C.7 Pour des gouttelettes de rayon de quelques nanomètres, on a donc: $P_{\text{sat}}' \approx 2 P_{\text{sat}}$
Donc si $P_{\text{sat}}(T) < P < P_{\text{sat}}'(T)$ la vapeur restera sèche car on n'aura pas atteint la nouvelle pression de changement d'état $P_{\text{sat}}'(T)$

I.C.8 Pour des gouttelettes de rayon de l'ordre de $0,1 \mu\text{m}$, on a maintenant: $P_{\text{sat}}' \approx P_{\text{sat}}$
Donc si $P > P_{\text{sat}}(T) \approx P_{\text{sat}}'(T)$, on aura bien la liquéfaction de la vapeur d'eau.

Partie II - A propos des avalanches

II.A Rôle des coefficients de frottement

II.A.1 système: bloc de neige de masse m

actions: poids $m\vec{g} = mg(-\cos\alpha \vec{u}_y + \sin\alpha \vec{u}_x)$
réaction du sol: $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N} = T \vec{u}_x + N \vec{u}_y$ ($T < 0$)

A l'équilibre: $m\vec{g} + \vec{R} = \vec{0} \Rightarrow T = -mg \sin\alpha$ $N = mg \cos\alpha$

Non glissement: $|T| \leq \mu_s N \Rightarrow \tan\alpha \leq \mu_s \Rightarrow \alpha \leq \alpha_c = \arctan \mu_s$

II.A.2 Théorème du centre d'inertie: $m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{R} \Rightarrow \begin{cases} m \frac{dv}{dt} = T + mg \sin\alpha_c \\ 0 = N - mg \cos\alpha_c \end{cases}$

Glissement: $|T| = \mu_d N \rightarrow -T = \mu_d mg \cos\alpha_c$

donc $\frac{dv}{dt} = g(\sin\alpha_c - \mu_d \cos\alpha_c)$ d'où: $v(t) = g(\sin\alpha_c - \mu_d \cos\alpha_c)t + v_0$ $E_c = \frac{1}{2} m v^2(t)$

II.A.3 neige fraîche: $\alpha_c = 34,3^\circ$ $(\sin\alpha_c - \mu_d \cos\alpha_c) = 0,37 \rightarrow$ avalanche violente
neige en galets: $\alpha_c = 50,2^\circ$ $(\sin\alpha_c - \mu_d \cos\alpha_c) = 0,32$
neige à grains ronds: $\alpha_c = 50,2^\circ$ $(\sin\alpha_c - \mu_d \cos\alpha_c) = 0,51$

II.A.4 On a maintenant: $v(t) = g(\sin\alpha - \mu_d \cos\alpha)t + v_0$ (origine des temps au début de cette phase)

Mouvement ralenti, puis stoppé si: $\sin\alpha - \mu_d \cos\alpha < 0$ soit: $\tan\alpha < \mu_d$

II.A.5 L'observation de l'apparition de l'avalanche permet de mesurer μ_s car la pente de la montagne est alors égale à α_c .
L'observation de l'arrêt de l'avalanche permet d'accéder à μ_d .

I.B. Modèle de frottement sur sol rugueux

(4)

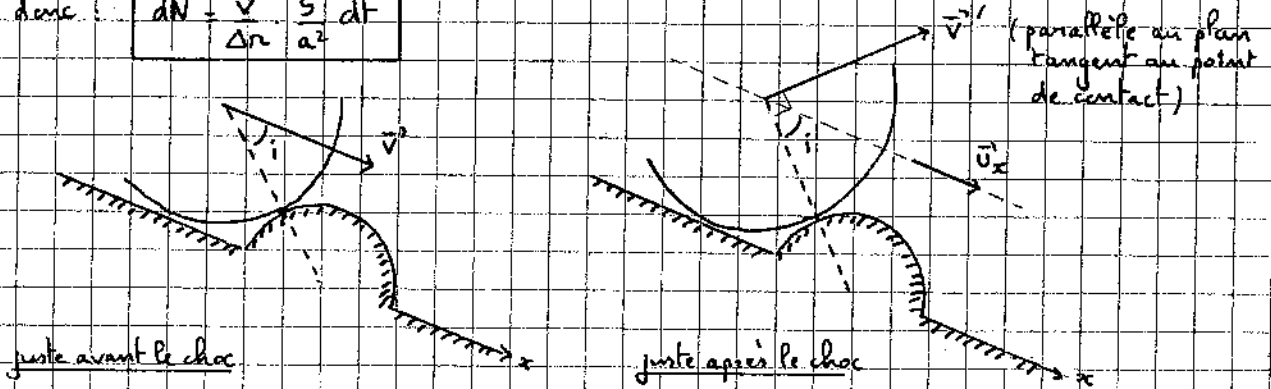
I.B.1 période des chocs : $T = \frac{\Delta r}{v}$ donc $f = \frac{v}{\Delta r}$

I.B.2 Dans le plan Oxz un bloc "occupe" une surface a^2 . La surface totale étant S , on a : $N_1 = \frac{S}{a^2}$

I.B.3 dN = nombre de chocs pour 1 bloc pendant dt x nombre de blocs en contact avec le sol
 $= f dt \cdot N_1$

donc : $dN = \frac{v}{\Delta r} \frac{S}{a^2} dt$

I.B.4



On a : $\Delta \vec{p}_0 = m_0 (\vec{v}' - \vec{v}) \Rightarrow \Delta p_{0x} = m_0 (\vec{v}' \cdot \vec{u}_x - v)$

On a : $\vec{v}' \cdot \vec{u}_x = \|\vec{v}'\| \sin i$ et $\|\vec{v}'\| = \|\vec{v}\| \sin i$ (conservation de la vitesse tangentielle)
 $= v$

Donc : $\Delta p_{0x} = m_0 (v \sin^2 i - v)$ soit : $\Delta p_{0x} = -m_0 v \cos^2 i$

I.B.5 $dP_{choc} = dN \cdot \Delta p_{0x}$ soit : $dP_{choc} = \frac{m_0 v^2 S \cos^2 i}{\Delta r a^2} dt$

I.B.6 $\vec{F}_{rug} = \frac{dP_{choc}}{dt} \vec{u}_x$ donc : $\vec{F}_{rug} = \frac{m_0 v^2 S \cos^2 i}{\Delta r a^2} \vec{u}_x$

I.B.7 On a : $m = m_0 \cdot N_1 \cdot \frac{d}{b} = m_0 \frac{S d}{a^2 b}$ donc : $\vec{F}_{rug} = - \frac{m b}{d} \frac{v^2 \cos^2 i}{\Delta r} \vec{u}_x$
 d'où : $\vec{F}_{rug} = - \frac{m g v^2}{\xi d} \vec{u}_x$ avec $\xi = \left(\frac{b \cos^2 i}{g \Delta r} \right)^{-1}$

I.B.8 ξ dépend de la nature du sol par l'intermédiaire de i et Δr .

I.B.9 g et Δr ne dépendant pas de v , seuls b et i pourraient dépendre de v .
 On peut effectivement penser que la vitesse de l'avalanche a une influence sur le tassement des couches, donc sur b .

I.C. Dynamique de l'avalanche

I.C.1 Théorème du centre d'inertie selon x : $m \frac{dv}{dt} = m g \sin \alpha + T_1 - \frac{m g v^2}{\xi d}$

glissement : $|T_1| = \mu_d N = \mu_d m g \cos \alpha = -T$

donc : $\frac{dv}{dt} + \frac{g}{\xi d} v^2 = g (\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha)$

II.C.2 vitesse limite quand $\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v_e = \sqrt{\xi d (\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha)}$ A.N: $v_e = 26 \text{ ms}^{-1}$

II.C.3 $E_{\text{cinétique}} = \frac{1}{2} m v_e^2$ m proportionnel à d, v_e^2 proportionnel à d $\Rightarrow E_{\text{cinétique}} \text{ varie en } d^2$

II.C.4 $\frac{dv}{dt} = \frac{g}{\xi d} v^2 = \frac{g}{\xi d} v_e^2 \Rightarrow \frac{dv}{v_e^2 - v^2} = \frac{g}{\xi d} dt$
 d'où $\frac{1}{v_e} \operatorname{arctanh}\left(\frac{v}{v_e}\right) = \frac{g}{\xi d} t + \text{constante}$ (constante = 0 car $v(0) = 0$)
 donc $v(t) = v_e \tanh\left(\frac{g v_e t}{\xi d}\right)$

II.C.5 $dx = v_e \tanh\left(\frac{g v_e t}{\xi d}\right) dt$ On pose: $u = \frac{g v_e t}{\xi d} \rightarrow dt = du \frac{\xi d}{g v_e}$
 $= \frac{\xi d}{g} \tanh u du$

d'où $x(t) = \frac{\xi d}{g} \int_0^u \tanh u du$ soit: $x(t) = \frac{\xi d}{g} \ln\left(\cosh\left(\frac{g v_e t}{\xi d}\right)\right)$

II.C.6 $v = 0,9 v_e \rightarrow 0,9 = \tanh\left(\frac{g v_e t}{\xi d}\right) \rightarrow t = \frac{\xi d}{g v_e} \operatorname{Arctanh} 0,9 = 11,7 \text{ s}$ $x(t) = 170 \text{ m}$

II.C.7 Conservation du débit volumique: $v_e d \cdot L = v_e' d' \cdot L$

On a: $d = \frac{v_e^2}{\xi (\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha)}$, $d' = \frac{v_e'^2}{\xi (\sin \alpha' - \mu_d \cos \alpha')}$ d'où: $\frac{v_e^3}{\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha} = \frac{v_e'^3}{\sin \alpha' - \mu_d \cos \alpha'}$

II.C.8 $v_e' = 23 \text{ ms}^{-1} = 0,9 v_e$ La vitesse est réduite de 10%

Partie III. Appareil de recherche des victimes d'avalanche

III.A Champ rayonné par une petite antenne

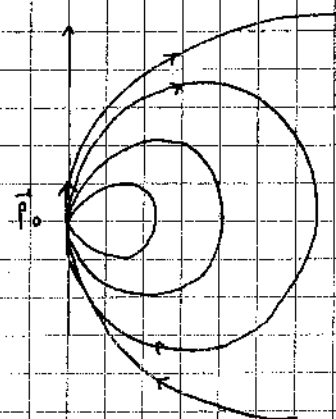
III.A.1 C1: $a \ll \lambda$ $\vec{E}_0(n) = \frac{2P_0 \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 n^3} \vec{u}_n + \frac{P_0 \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 n^3} \vec{u}_\theta$

III.A.2 $\frac{dr}{E_n} = \frac{r d\theta}{E_\theta} \rightarrow \frac{dr}{2 \cos \theta} = \frac{r d\theta}{\sin \theta}$
 $\rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{2 \cos \theta d\theta}{\sin \theta}$
 $\rightarrow \ln r = 2 \ln |\sin \theta| + \text{cte}$
 $\rightarrow r = r_0 \sin^2 \theta$ ($r_0 = \text{cte}$)

équipotentielle = courbe perpendiculaire aux lignes de champ

III.A.3 $\|\vec{E}_0\| = aE \Rightarrow \frac{P_0}{4\pi \epsilon_0 n^3} \sqrt{4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = aE$
 $\Rightarrow r = r_1 [3 \cos^2 \theta + 1]^{1/6}$ ($r_1 = \text{cte}$)

III.A.4 $\lambda = \frac{c}{f}$ A.N: $\lambda = 656 \text{ m}$



III A.5 $\Delta\varphi(m) = \frac{2\pi}{\lambda} s(m) \sim \frac{a}{\lambda}$ donc $C_2: a \ll \lambda$

III A.6 On calcule $\vec{E}$ connaissant $\vec{B}$ par l'équation de Maxwell Ampère dans le vide: $\nabla \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

III A.7 Région proche du dipôle où le régime sera quasi stationnaire, donc $C_3: r \ll \lambda$ (ARQS)

III A.8 $C_4: r \gg \lambda$ Le terme en $\frac{1}{r}$ domine dans $\vec{E}$ soit: $\vec{E} \sim \frac{\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r c^2} \ddot{\vec{u}}_0$

II. B Localisation de la victime

III B.1 $a \sim 1\text{m}$; $r \sim 10\text{ à }100\text{m}$; $\lambda \sim 600\text{m}$

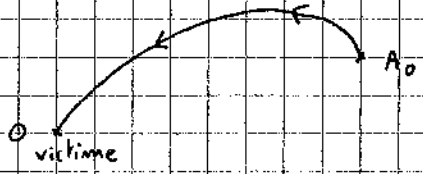
→ C_1 et C_2 sont valables

C_4 n'est pas valable

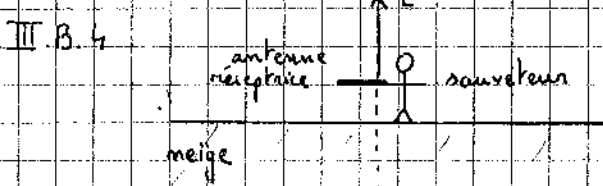
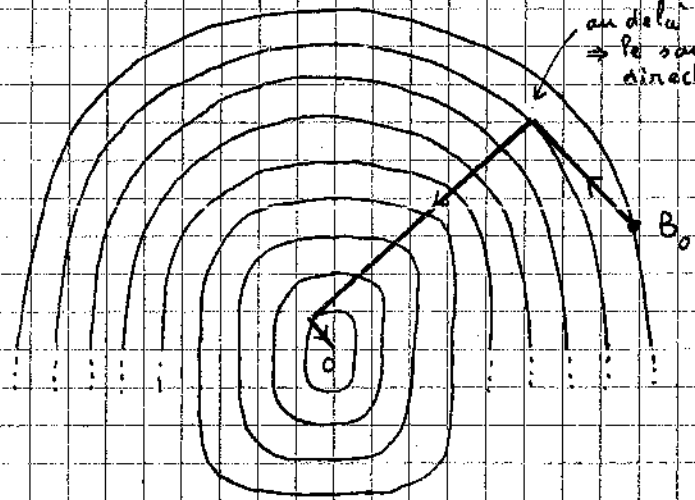
C_3 est plus ou moins valable → on est dans la zone statique

III B.2 signal perçu maximal quand $\vec{E} \parallel \vec{u}$ → le sauveteur se déplace le long d'une ligne de champ

On choisit la figure 7.



III B.3 signal fonction de $\|\vec{E}\|$ → on utilise la figure 8



ligne de champ électrique verticale (dans la zone statique)
→ signal perçu $\vec{E} \cdot \vec{u} \approx 0$
→ problème de localisation

