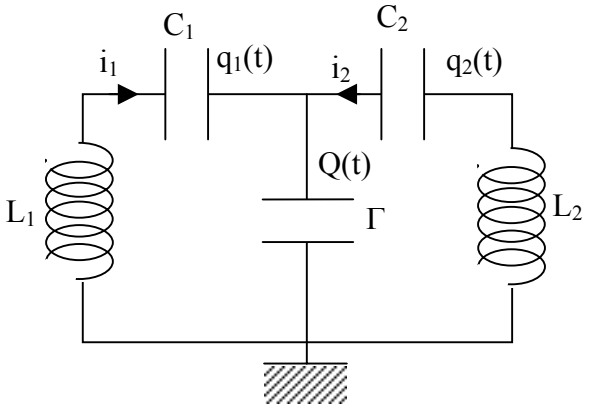
Instabilité dans les systèmes dynamiques à deux degrés de liberté couplés

1- Exemples électriques:

1- 1-Cas d'un couplage passif symétrique



Avec les conventions choisies pour les courants i_1 et i_2, les lois des mailles s'écrivent:

$$L_1\frac{di_1}{dt}-\frac{q_1}{C_1}+\frac{Q}{\Gamma}=0$$

$$L_2\frac{di_2}{dt}+\frac{q_2}{C_2}+\frac{Q}{\Gamma}=0$$

Avec, compte tenu des conventions de signe:

$$\frac{dq_1}{dt}=-i_1 \text{ et } \frac{dq_2}{dt}=i_2$$

D'après la loi des nœuds, on a aussi:

$$\frac{dQ}{dt}=i_1+i_2=\frac{dq_2}{dt}-\frac{dq_1}{dt}$$

C'est à dire, compte tenu des conditions initiales données dans l'énoncé:

$$Q=q_2-q_1$$

Dans ces conditions, les deux équations différentielles précédentes s'écrivent:

$$L_1\frac{d^2q_1}{dt^2}+\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{\Gamma}\right)\cdot q_1-\frac{q_2}{\Gamma}=0$$

$$L_2\frac{d^2q_2}{dt^2}+\left(\frac{1}{C_2}+\frac{1}{\Gamma}\right)\cdot q_1-\frac{q_1}{\Gamma}=0$$

2)- Les équations des deux circuits découplés sont les deux équations précédemment établies, dans lesquelles on fait $q_2 = 0$ pour la première, et $q_1 = 0$ pour la seconde, soit:

$$L_1\frac{d^2q_1}{dt^2}+\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{\Gamma}\right)\cdot q_1=0$$

$$L_2\frac{d^2q_2}{dt^2}+\left(\frac{1}{C_2}+\frac{1}{\Gamma}\right)\cdot q_1=0$$

Les solutions de ces deux équations différentielles sont sinusoïdales et de pulsations:

$$\omega_1^{\,2}=\frac{\Gamma+C_1}{L_1\cdot\Gamma\cdot C_1} \text{ et } \omega_2^{\,2}=\frac{\Gamma+C_2}{L_2\cdot\Gamma\cdot C_2}$$

On a donc bien des modes propres périodiques.

3)- En remplaçant les deux pulsations propres par leur expression dans la définition proposée pour le coefficient de couplage α, on obtient:

$$\alpha^2 = \frac{C_1 \cdot C_2}{(\Gamma + C_1)\cdot(\Gamma + C_2)} = \frac{C_1 \cdot C_2}{\Gamma^2 + C_1 \cdot C_2 + \Gamma \cdot (C_1 + C_2)}$$

soit:

$$\alpha^2 = \frac{1}{1 + \dfrac{\Gamma \cdot (\Gamma + C_1 + C_2)}{C_1 \cdot C_2}} < 1$$

4)- En posant $q_1(t) = q_1 \cdot e^{pt}$ et $q_2(t) = q_2 \cdot e^{pt}$, les équations relatives aux deux circuits couplés s'écrivent:

$$\left[L_1 \cdot p^2 + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{\Gamma}\right] \cdot q_1 - \frac{1}{\Gamma} \cdot q_2 = 0$$

$$-\frac{1}{\Gamma} \cdot q_1 + \left[L_2 \cdot p^2 + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{\Gamma}\right] \cdot q_2 = 0$$

On a un système homogène en q_1 et q_2: il admet des solutions non nulles si son déterminant est nul, c'est à dire si:

$$\left[L_1 \cdot p^2 + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{\Gamma}\right] \cdot \left[L_2 \cdot p^2 + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{\Gamma}\right] - \frac{1}{\Gamma^2} = 0$$

qui s'écrit, en développant:

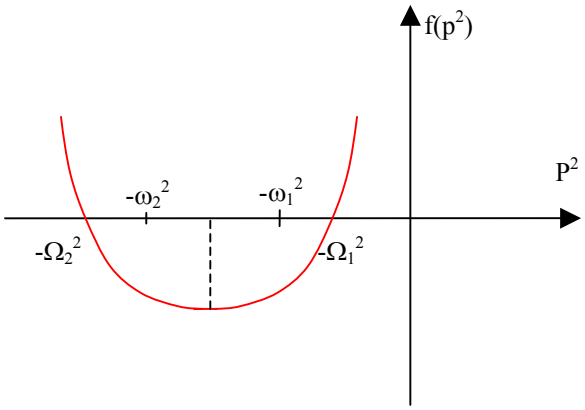
$$p^4 + \left[\frac{\Gamma + C_2}{L_2 \cdot \Gamma \cdot C_2} + \frac{\Gamma + C_1}{L_1 \cdot \Gamma \cdot C_1}\right] \cdot p^2 + \frac{\Gamma + C_2}{L_2 \cdot \Gamma \cdot C_2} \cdot \frac{\Gamma + C_1}{L_1 \cdot \Gamma \cdot C_1} - \frac{1}{\Gamma^2 \cdot L_1 \cdot L_2} = 0$$

Soit, en introduisant les pulsations propres ω_1 et ω_2 ainsi que le coefficient de couplage α:

$$p^4 + (\omega_1^2 + \omega_2^2) \cdot p^2 + \omega_1^2 \cdot \omega_2^2 \cdot (1 - \alpha^2) = 0$$

5)- Le discriminant de cette équation en p^2 s'écrit:

$$\Delta = (\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4\omega_1^2 \cdot \omega_2^2 \cdot (1 - \alpha^2) = (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\omega_1^2 \cdot \omega_2^2 \cdot \alpha^2 > 0$$



Les deux racines en p^2 sont réelles. Elles sont de même signe (produit positif) et négatives (somme négative). Les racines en p sont donc imaginaires pures. Les modes propres représentés par des exponentielles à exposants imaginaires purs sont donc sinusoïdales, de pulsations Ω_1 et Ω_2.

6)- Il faut montrer que ω_1 et ω_2 sont comprises dans l'intervalle $[\Omega_1, \Omega_2]$, c'est à dire que $-\omega_1$ et $-\omega_2$ sont comprises dans l'intervalle $[-\Omega_2, -\Omega_1]$.

Il suffit pour cela de montrer que $f(-\omega_1^2)$ et $f(-\omega_2^2)$ sont négatif:

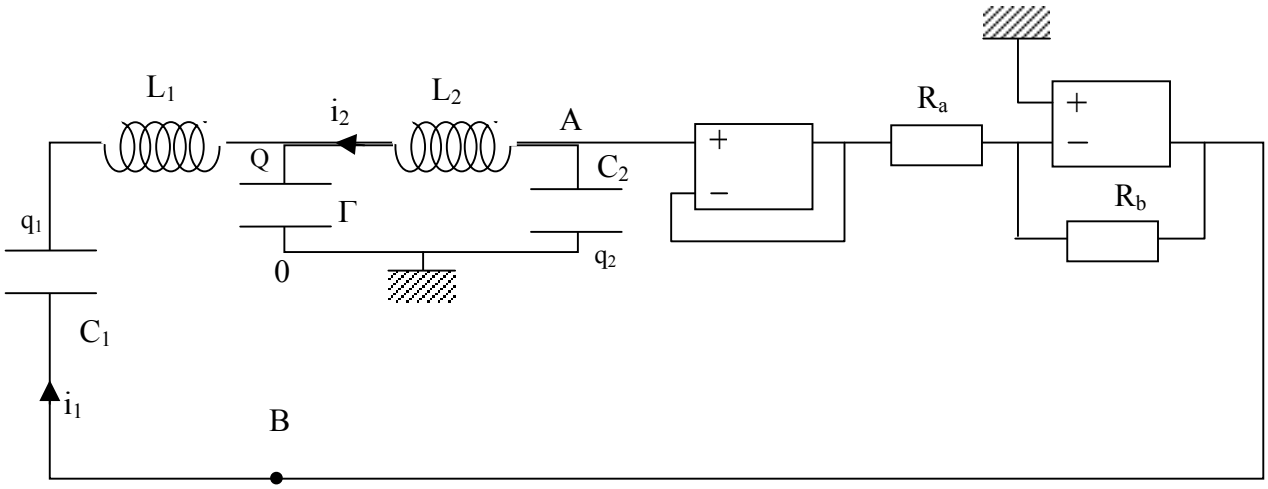
On trouve:

$$f(-\omega_1^2) = -\omega_1^2 \cdot \omega_2^2 \cdot \alpha^2 = f(-\omega_2^2) < 0$$

1-2- Couplage réactif asymétrique:

7)- Le premier élément est un suiveur: sa tension de sortie est égale à celle d'entrée, mais il n'y a pas de courant débité dans le circuit d'entrée: en prenant les mêmes notations et conventions de signe que dans la première partie, l'équation de la seconde maille est identique.

Le second élément est un amplificateur inverseur, de gain $-\dfrac{R_b}{R_a}$



8)- La première maille n'est pas fermée sur elle-même. Le plus simple est d'écrire la d.d.p aux bornes de l'ensemble C_1, L_1, Γ.
On obtient ainsi, avec les notations de la figure

$$V_B = -\frac{q_1}{C_1} + L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + \frac{Q}{\Gamma} \quad \text{avec } V_B = -\frac{R_b}{R_a} \cdot V_A \text{, et } V_A = -\frac{q_2}{C_2}$$

Les relations entre les courants et les charges sont les mêmes que dans la première partie.
On en déduit les deux équations différentielles du circuit:

$$L_1 \cdot \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{\Gamma}\right) \cdot q_1 + \left(\frac{R_b}{R_a \cdot C_2} - \frac{1}{\Gamma}\right) \cdot q_2 = 0$$

$$L_2 \cdot \frac{d^2 q_2}{dt^2} + \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{\Gamma}\right) \cdot q_2 - \frac{q_1}{\Gamma} = 0$$

On cherche des modes propres sous la même forme que précédemment, en écrivant ces deux équations sous la forme:

$$\left(L_1 \cdot p^2 + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{\Gamma}\right) \cdot q_1 + \left(\frac{R_B}{R_A \cdot C_2} - \frac{1}{\Gamma}\right) \cdot q_2 = 0$$

$$-\frac{1}{\Gamma} \cdot q_1 + \left(L_2 \cdot p^2 + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{\Gamma}\right) \cdot q_2 = 0$$

Les solutions en q_1 et q_2 sont non nulles si le déterminant du système est nul, c'est à dire pour les valeurs de p solutions de l'équation:

$$L_1 \cdot L_2 \cdot p^4 + \left(L_1 \frac{\Gamma + C_2}{\Gamma \cdot C_2} + L_2 \frac{\Gamma + C_1}{\Gamma \cdot C_1}\right) \cdot p^2 + \frac{\Gamma + C_2}{\Gamma \cdot C_2} \cdot \frac{\Gamma + C_1}{\Gamma \cdot C_1} + \frac{1}{\Gamma} \cdot \left(\frac{R_B}{R_A \cdot C_2} - \frac{1}{\Gamma}\right) = 0$$

qui s'écrit, en introduisant les fréquences propres ω_1 et ω_2, ainsi que les coefficients de couplage α et β :

$$p^4 + (\omega_1^2 + \omega_2^2) \cdot p^2 + \omega_1^2 \cdot \omega_2^2 \cdot \left[1 - \alpha^2 \cdot (1 - \beta)\right] = 0$$

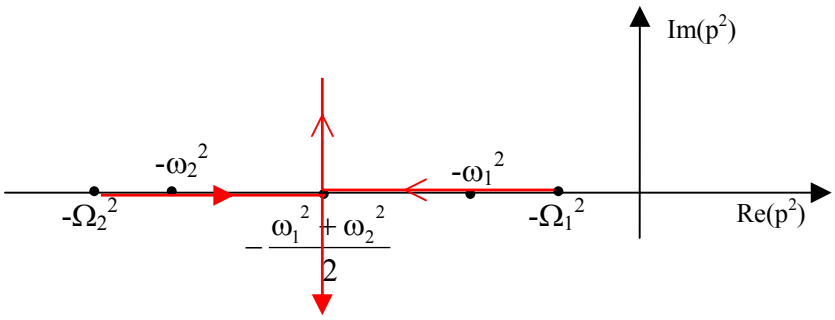
Le discriminant de cette équation en p^2 s'écrit:

$$\Delta = (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\omega_1^2 \cdot \omega_2^2 \cdot \alpha^2 \cdot (1 - \beta)$$

Pour $\beta = 0$, il est positif. Il décroît lorsque β augmente, et s'annule pour une valeur β_c de β.
Lorsque β reste compris entre 0 et β_c, les racines en p^2 sont réelles et négatives: elles s'écrivent:

$$p^2 = -\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

Pour $\beta = 0$, les racines sont $-\Omega_1^2$ et $-\Omega_2^2$. Lorsque β augmente, elles tendent à se rapprocher de $-\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}$, et se rejoignent alors lorsque le discriminant est nul. Ensuite, la partie réelle reste constante et égale à $-\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}$, et il y a une partie imaginaire qui devient positive pour la première racine et négative pour la seconde.



10)- La valeur critique de β est la valeur β_c qui annule le discriminant:

$$\beta_c = 1 + \frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2}{4\alpha^2 \cdot \omega_1^2 \cdot \omega_2^2}$$

Au delà de cette valeur, les solutions en p^2 sont de la forme a + i b, avec:

$$a = -\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \text{ et } b = \pm\sqrt{-\Delta}$$

p peut donc s'écrire p = p' +i p", avec: $(p' + i\,p'')^2 = a + i\,b$.

L'exponentielle de la partie imaginaire de p va donner un terme sinusoïdal, mais sera multipliée par une exponentielle réelle en p' t, p' pouvant être positif: on a alors un système instable.

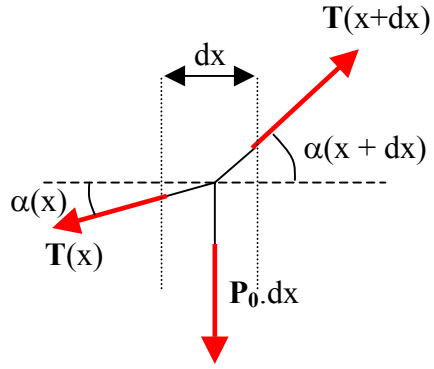
2- Oscillation verticale d'un pont suspendu:

2- 1- Etude de l'équilibre mécanique:

11)- Si les suspentes sont distantes de dx, il y en a $\frac{L}{dx}$ sur toute la longueur du pont. A l'équilibre, ces suspentes supportent donc un poids $m\vec{g} \cdot dx = \vec{P}_0 \cdot dx$.

Dans ces conditions, l'élément dx de câble, relié à une suspente, est soumis à 3 forces:

- La tension exercée en x
- La tension exercée en x = dx.
- La force exercée par une suspente: $\vec{P_0} \cdot dx$



La condition d'équilibre s'écrit donc:

$$\vec{T}(x + dx) - \vec{T}(x) + \vec{P_0} \cdot dx = \vec{0}$$

Le câble n'ayant pas de raideur, les tensions ont la même direction que le câble. Donc, en projection sur les axes x et y:

$$(T \cdot \cos\alpha)_{x+dx} - (T \cdot \cos\alpha)_x = 0$$

$$(T \cdot \sin\alpha)_{x+dx} - (T \cdot \sin\alpha)_x = P_0 \cdot dx$$

Que l'on peut écrire:

$$\frac{d(T \cdot \cos\alpha)}{dx} = 0$$

$$\frac{d(T \cdot \sin\alpha)}{dx} = P_0$$

L'intégration de la première équation conduit à:

$$T \cdot \cos\alpha = K \text{ d'où on tire: } T = \frac{K}{\cos\alpha}$$

En portant dans la seconde équation, on obtient:

$$\frac{d(\tan\alpha)}{dx} = \frac{P_0}{K} = A \text{ où A est une constante.}$$

En remarquant que $\tan\alpha = \frac{dy_0}{dx}$, cette équation s'écrit:

$$\boxed{\frac{d^2y_0}{dx^2} = A}$$

12)- On peut intégrer deux fois l'équation précédente, en utilisant une constante d'intégration B:

$$y_0 = B + \frac{1}{2}A \cdot x^2$$

Les conditions aux limites imposent y_0 pour $x = \frac{L}{2}$: on en déduit:

$$A = -\frac{8B}{L^2}, \text{ et } y_0 \text{ s'écrit:}$$

$$\boxed{y_0 = B \cdot \left(1 - \left(\frac{2x}{L}\right)^2\right)}$$

On trouve bien l'expression proposée en posant B = f.

13)- L'extrémité du câble exerce la force $\vec{T}$ sur le pilier: le pilier exerce sur le câble la force $\vec{T'} = -\vec{T} = Q_{0v} \cdot \vec{u}_x - Q_v \cdot \vec{u}_y$. Par raison de symétrie, les deux piliers exercent la même force verticale sur le câble: la condition d'équilibre du système câble + tablier s'écrit donc:

$$-2 \cdot Q_v + mg \cdot L = 0 \text{ et on en déduit: } Q_v = \frac{mg \cdot L}{2}$$

La force $\vec{T'}$ faisant l'angle α avec l'axe des x, on doit avoir:

$$\frac{-Q_v}{Q_0} = \tan[\alpha(L/2)] = \left(\frac{dy_0}{dx}\right)_{\frac{L}{2}} = -\frac{4f}{L}$$

On en déduit:

$$\boxed{Q_0 = \frac{mg \cdot L^2}{8f}}$$

2- 2)- Equations des oscillations verticales:

On néglige toujours la masse du câble: la résultante des forces appliquées à l'élément de câble dl compris entre x et x + dx doit toujours être nulle.

Sur l'axe horizontal, cette condition conduit toujours à T.cosα = constante; la constante se calcule à la limite en $\frac{L}{2}$:

$$T \cdot \cos\alpha = Q_0 + \Delta Q$$

Sur l'axe vertical, selon les hypothèses de l'énoncé:

$$d(T\cdot\sin\alpha) = (P_0 + p)\cdot dx$$

Soit, en remplaçant T par sa valeur dans la première équation:

$$d\left[(Q_0 + \Delta Q)\cdot\tan\alpha\right] = (P_0 + p)\cdot dx$$

A l'équilibre, on avait $\tan\alpha = \dfrac{dy_0}{dx}$, p = 0, et $\Delta Q = 0$, ce qui conduisait à l'équation:

$$d\left[Q_0\cdot\frac{dy_0}{dx}\right] = P_0\cdot dx$$

Hors équilibre, $y = y_0 + \eta$, et $\tan\alpha = \dfrac{dy_0}{dx} + \dfrac{\partial\eta}{\partial x}$. La condition sur α s'écrit alors:

$$d\left[(Q_0 + \Delta Q)\cdot\left(\frac{dy_0}{dx} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\right] = (P_0 + p).dx$$

En retranchant les deux conditions (équilibre et hors équilibre, on obtient:

$$d\left[Q_0\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x} + \Delta Q\cdot\left(\frac{dy_0}{dx} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\right] = p\cdot dx$$

On considère par hypothèse que les perturbations par rapport à l'équilibre sont des infiniment petits du premier ordre. Dans ces conditions, le produit $\Delta Q\cdot\dfrac{\partial\eta}{\partial x}$ est du second ordre et peut être négligé: la condition précédente s'écrit alors:

$$d\left[Q_0\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x} + \Delta Q\cdot\left(\frac{dy_0}{dx}\right)\right] = p\cdot dx$$

Soit:

$$\boxed{Q_0\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \Delta Q\cdot\frac{d^2y_0}{dx^2} = p}$$

15)- La longueur dx du tablier, de masse m.dx est soumise:

- A son poids $m\vec{g}\cdot dx$
- A la force exercée par les suspentes: $(P_0 + p)\cdot\vec{u}_y\cdot dx$

Compte tenu du fait qu'à l'équilibre, mg - P_0 = 0, la relation fondamentale de la dynamique appliquée à la portion dx de tablier s'écrit:

$$m\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = p$$

16)- En égalant les deux expressions, on obtient:

$$\boxed{Q_0\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \Delta Q\cdot\frac{d^2y_0}{dx^2} = m\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}}$$

Qui est bien l'équation proposée.

2- 3)- Modes propres d'oscillation verticale:

17)- On cherche pour l'équation précédente des solutions de la forme:

$$\eta(x,t) = r(x)\cdot\phi(t) \quad \text{avec} \quad \phi(t) = \sin(\omega t)$$

En portant cette forme de η dans l'équation, on a:

$$Q_0\cdot\frac{d^2r}{dx^2}\cdot\sin(\omega t) + \Delta Q(t)\cdot\frac{d^2y_0}{dx^2} = -m\omega^2 r\cdot\sin(\omega t)$$

On peut diviser les deux membres par sin(ωt): on exclut les valeurs de t qui annulent le sin, et on prolongera les solutions par continuité, dans la mesure où les solutions en η ne peuvent qu'être continues :

$$\frac{d^2y_0}{dx^2}\cdot\frac{\Delta Q(t)}{\sin(\omega t)} = -\left(m\cdot\omega^2\cdot r + Q_0\cdot\frac{d^2r}{dx^2}\right)$$

Le premier membre ne dépend que de t, et le second, que de x. Ils sont égaux pour toutes les valeurs de x et de t qui sont des variables indépendantes: les deux membres sont donc égaux à une même constante K:

$$\frac{d^2y_0}{dx^2}\cdot\frac{\Delta Q(t)}{\sin(\omega t)} = K = -\left(m\cdot\omega^2\cdot r + Q_0\cdot\frac{d^2r}{dx^2}\right)$$

$\frac{d^2y_0}{dx^2}$ est une constante On en déduit que ΔQ est bien de la forme proposée, à condition de poser: $h = \frac{K}{\left(\frac{d^2y_0}{dx^2}\right)}$

18)- Les dimensions sont: T^{-1} pour ω, $M.L^{-1}$ pour m, et $M.L.T^{-2}$ pour Q_0.
Le paramètre μ proposé est un nombre sans dimension.

19)- En utilisant la constante K, l'équation différentielle en r s'écrit:

$$\frac{d^2r}{dx^2} + \frac{m\cdot\omega^2}{Q_0}\cdot r = -\frac{K}{Q_0}$$

Soit, en introduisant le paramètre μ:

$$\frac{d^2r}{dx^2} + \frac{4\cdot\mu^2}{L^2}\cdot r = -\frac{K}{Q_0}$$

Les solution générales de cette équation sont de la forme:

$$r(x) = A\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\mu}{L}\cdot x\right) + B\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\mu}{L}\cdot x\right) - \frac{K\cdot L^2}{4\mu^2\cdot Q_0}$$

Où μ, qui dépend de ω, n'est pas déterminé à priori..

20)- On se place dans le cas où f << L. L'angle α que fait la tangente au câble avec l'horizontale est défini par:

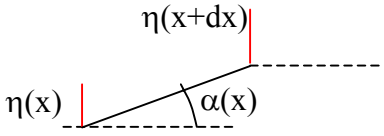
$$\left|\tan\alpha\right| = \left|\frac{dy_0}{dx}\right| = \frac{8f}{L^2}\cdot|x|$$

$\left|\tan\alpha\right|$ a sa valeur maximale en $x = \pm\frac{L}{2}$, $\left|\tan\alpha\right|_{max} = \frac{4f}{L} << 1$

Dans l'hypothèse de l'énoncé, on pourra donc écrire: $\alpha \approx \sin\alpha \approx \tan\alpha$, y compris hors équilibre, les variations de α étant faibles durant le mouvement.

L'élément de câble situé entre x et x + dx s'allonge de:

$$\left[[\eta]_{x+dx} - [\eta]_x\right]\cdot\sin\alpha \approx \left[(\eta)_{x+dx} - (\eta)_x\right]\cdot\alpha = \alpha\cdot\frac{\partial(\eta)}{\partial x}\cdot dx,$$



La longueur totale du câble entre les pylones restant constante, on peut écrire:

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \alpha\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}\cdot dx = 0$$

Avec $\alpha \approx \tan\alpha = \frac{8f}{L^2}\cdot x$, l'intégrale s'écrit:

$$\frac{8f}{L}\cdot\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{\partial\eta}{\partial x}\cdot x\cdot dx = \frac{8f}{L^2}\cdot\left(\left[x\cdot\eta\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\eta\cdot dx\right)$$

η s'annulant en $\pm\frac{L}{2}$, le premier terme est nul. Le second s'écrit:

$$-\frac{8f}{L^2}\cdot\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\eta\cdot dx = -\frac{8f}{L^2}\cdot\sin(\omega t)\cdot\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}r\cdot dx = 0$$

Quel que soit t: il faut donc que:

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}r(x)\cdot dx = 0$$

21)- On s'intéresse aux modes symétriques, c'est à dire au cas où B = 0 dans la solution proposée à la question 19. Ces modes sont donc représentés par l'équation:

$$r(x) = A\cdot\cos\left(\frac{2\mu}{L}\cdot x\right) - \frac{K\cdot L^2}{4\mu^2\cdot Q_0}$$

22)- Les conditions aux limites imposent:

- $r\left(\frac{L}{2}\right) = 0$, soit: $A\cdot\cos\mu - \frac{K\cdot L^2}{4\mu^2\cdot Q_0} = 0$
- $\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}r(x)\cdot dx = 0$, soit: $\frac{A\cdot L}{\mu}\cdot\sin\mu - \frac{K\cdot L^3}{4\mu^2\cdot Q_0} = 0$

En divisant ces deux égalités membre à membre, on trouve:

$$\tan(\mu)=\mu$$

23)- Les deux premières solutions approchées de l'équation précédente sont $\mu = \frac{3\pi}{2}$ et $\mu = \frac{5\pi}{2}$. Pour construire l'allure des deux modes correspondants, il faut trouver la relation entre A et K: de $\frac{A\cdot L}{\mu}\cdot\sin\mu - \frac{K\cdot L^3}{4\mu^2\cdot Q_0} = 0$, on tire: $A\cdot\mu\cdot\cos\mu - \frac{K\cdot L^2}{4\mu\cdot Q_0} = 0$, soit:

$$A\cdot\mu\cdot\sin\mu = \frac{K\cdot L^2}{4Q_0}$$

Dans laquelle on remplace μ par sa valeur approchée, soit pour le premier mode: $\mu = \frac{3\pi}{2}$, et $\sin\mu = -1$:

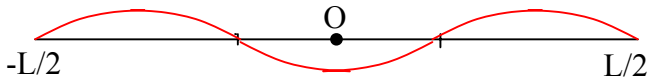
$$A = -\frac{K\cdot L^2}{4\mu\cdot Q_0}$$

En reportant dans l'expression de r(x), on obtient:

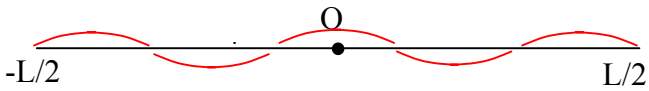
$$r(x) = -\frac{K \cdot L^2}{4\mu^2 \cdot Q_0} \cdot \left[\frac{3\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{L} \cdot x \right) - 1 \right]$$

qui s'annule pour $\cos\left(\frac{3\pi}{L} \cdot x \right) = \frac{2}{3\pi} = 0{,}212$, soit pour $x = \pm 0{,}144 \cdot L$

On en déduit l'allure du mode correspondant:



Les deux nœuds sont proches du tiers de la longueur totale.



Pour le mode suivant, $\mu = \frac{5\pi}{2}$: r s'annule 3 fois en dehors des extrémités du pont: le mode a l'allure représentée ci-contre.

24)- La pulsation du mode $\mu = \frac{3\pi}{2}$ s'écrit:

$$\omega = \frac{3\pi}{L} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot L^2}{8f}} = \frac{3\pi}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{g}{f}}$$

La pulsation du pendule simple de longueur f est: $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{f}}$. On en déduit:

$$\boxed{\frac{T}{T_0} = \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}}$$

25)- Les modes antisymétriques sont tels que r(-x) = r(x) : la forme générale des solutions proposées ne permet des solutions antisymétriques que si le terme constant est nul: K = 0, ce qui signifie que ΔQ est toujours nul.

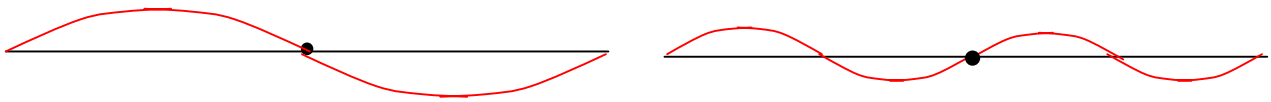
26)- La forme analytique de ces modes se réduit à:

$$r(x) = B \cdot \sin\left(\frac{2\mu}{L} \cdot x \right)$$

Et les conditions aux limites à l'extrémité imposent:

$$\mu = n \cdot \pi \quad , \quad n \text{ étant un entier.}$$

27)- On en déduit l'allure des deux premiers modes antisymétriques:



3)- Oscillations de flexion et de torsion:

28)- A l'équilibre, en Y = 0, l'allongement des ressorts est l_0, et la somme de leurs tensions, $k \cdot l_0 \cdot \vec{u}_Y$. La condition d'équilibre s'écrit:

$$-M \cdot g + k \cdot l_0 = 0$$

A l'abscisse Y, l'allongement est l_0 - Y, et la tension: $k \cdot (l_0 - Y) \cdot \vec{u}_Y$.

En l'absence de torsion, l'équation du mouvement de G s'écrit:

$$M \cdot \ddot{Y} = k \cdot (l_0 - Y) - M \cdot g \text{ soit, compte tenu de la condition d'équilibre:}$$

$$\ddot{Y} + \frac{k}{M} \cdot Y = 0$$

Le mouvement de translation vertical en oscillations libres est donc sinusoïdal, de pulsation:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

29)- En identifiant cette pulsation à celle des modes verticaux, trouvée précédemment, on trouve:

$$\sqrt{\frac{k}{M}} = \mu \cdot \sqrt{\frac{g}{2f}}$$

soit:

$$\frac{k}{M} = \mu^2 \cdot \frac{g}{2f}$$

30)-Dans la position repérée par Y et θ, Les allongements respectifs sont:

- $l_0 - Y - l \cdot \theta$ pour les deux ressorts avant (par le côté où le vent arrive)
- $l_0 - Y + l \cdot \theta$ pour les deux autres ressorts.

La résultante des forces appliquées au système s'écrit:

$$\left[F + \frac{k}{2} \cdot (l_0 - Y - l \cdot \theta) + \frac{k}{2} \cdot (l_0 - Y + l \cdot \theta) - Mg \right] \cdot \vec{u}_Y$$

Et l'équation différentielle du mouvement:

$$\ddot{Y} + \frac{k}{M} \cdot Y = \frac{F}{M} \text{ soit : } \ddot{Y} + \omega_1^2 \cdot Y = \frac{F}{M}$$

31)- Le moment résultant en G des forces appliquées s'écrit, compte tenu du fait que $\overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{GA}$:

$$\overrightarrow{M_G} = \overrightarrow{GA} \wedge \left[\frac{k}{2} \cdot (l_0 - Y - l \cdot \theta) - \frac{k}{2} \cdot (l_0 - Y + l \cdot \theta) \right] \cdot \vec{u}_Y + \frac{\overrightarrow{GA}}{2} \wedge F \cdot \vec{u}_Y$$

Soit, avec $\cos\theta \approx 1$:

$$\overrightarrow{M_G} = \left(\frac{F \cdot l}{2} - k \cdot l^2 \cdot \theta \right) \cdot \vec{u}_z$$

En projection sur l'axe z, le théorème du moment dynamique s'écrit:

$$I \cdot \ddot{\theta} = \frac{F \cdot l}{2} - k \cdot l^2 \cdot \theta \text{ avec } I = \frac{M \cdot l^2}{3}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{k \cdot l^2}{I} \cdot \theta = \frac{F \cdot l}{2I}$$

On remarque que $\frac{k \cdot l^2}{I} = \frac{k}{M} \cdot \frac{M \cdot l^2}{I} = \omega_2^2$: l'équation s'écrit donc:

$$\ddot{\theta} + \omega_2^2 \cdot \theta = \frac{F \cdot l}{2I}$$

32)- On remplace F par l'expression proposée dans l'équation en Y, et on fait θ = 0: on obtient ainsi l'équation:

$$\ddot{Y} + \frac{A \cdot V}{M} \dot{Y} + \omega_1^2 \cdot Y = 0$$

Le mouvement de flexion est stable, puisqu'il s'agit d'un mouvement sinusoïdal amorti: que le régime soit pseudo-périodique, critique ou apériodique, le régime transitoire tend vers 0.

33)- On remplace F par l'expression proposée dans l'équation en θ, et on fait Y = 0 à tout instant: on obtient ainsi l'équation:

$$\ddot{\theta} + \left[{\omega_2}^2 - \frac{A \cdot l \cdot V^2}{2 \cdot I} \right] \cdot \theta = 0$$

Le régime est sinusoïdal et donc stable tant que le coefficient de θ est positif: dès qu'il change de signe, les solutions sont des exponentielles réelles, donc instables: on a donc instabilité pour:

$$\frac{A \cdot l \cdot V^2}{2 \cdot I} < {\omega_2}^2$$

C'est à dire à partir du moment ou V est supérieure à la valeur V_c pour laquelle l'égalité est satisfaite:

$$Vc = \omega_2 \cdot \sqrt{\frac{2I}{A \cdot l}}$$

34)- Dans le cas d'un mouvement général (à la fois flexion et torsion), le système différentiel régissant le comportement du système s'écrit:

$$\ddot{Y} + \frac{A \cdot V}{M} \dot{Y} + {\omega_1}^2 \cdot Y - \frac{A \cdot V^2}{M} \cdot \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \left[{\omega_2}^2 - \frac{A \cdot l \cdot V^2}{2 \cdot I} \right] \cdot \theta + \frac{A \cdot V \cdot l}{2I} \cdot \dot{Y} = 0$$

On cherche des solutions sous forme de modes propres, soit sous la forme:

$$\theta(t) = \theta \cdot e^{p \cdot t} \text{ et } Y(t) = Y \cdot e^{p \cdot t}$$

Dans ces conditions, le système différentiel s'écrit:

$$\left(p^2 + \frac{A \cdot V}{M} \cdot p + {\omega_1}^2 \right) \cdot Y - \frac{A \cdot V^2}{M} \cdot \theta = 0$$

$$\frac{A \cdot V \cdot l}{2I} p \cdot Y + \left[p^2 + \left({\omega_2}^2 - \frac{A \cdot V^2 \cdot l}{2I} \right) \right] \cdot \theta = 0$$

Ce système homogène admet des solutions non nulles si son déterminant est nul, c'est à dire si:

$$\left(p^2 + \frac{A \cdot V}{M} \cdot p + {\omega_1}^2 \right) \cdot \left[p^2 + \left({\omega_2}^2 - \frac{A \cdot V^2 \cdot l}{2I} \right) \right] + \frac{A^2 \cdot V^3 \cdot l}{2M \cdot I} \cdot p = 0$$

Soit, en développant:

$$p^4 + \frac{A \cdot V}{M} \cdot p^3 + \left({\omega_1}^2 + {\omega_2}^2 - \frac{A \cdot V^2 \cdot l}{2I} \right) \cdot p^2 + \frac{A \cdot V}{M} {\omega_2}^2 \cdot p + {\omega_1}^2 \cdot \left({\omega_2}^2 - \frac{A \cdot V^2 \cdot l}{2I} \right) = 0$$

On trouve ainsi une équation du quatrième degré en p. Ses coefficients s'écrivent, en adoptant les conditions de l'énoncé:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = \frac{A \cdot V}{M}$$

$$a_2 = \omega_1^{\,2} + \omega_2^{\,2} - \frac{A \cdot V^2 \cdot l}{2I}$$

$$a_3 = \frac{A \cdot V}{M} \cdot \omega_2^{\,2}$$

$$a_4 = \omega_1^{\,2} \cdot \left(\omega_2^{\,2} - \frac{A \cdot V^2 \cdot l}{2I} \right)$$

La deuxième et la troisième condition de stabilité s'écrivent:

$$\omega_1^{\,2} - \frac{A \cdot V^2 \cdot l}{2I} > 0 \quad \text{et} \quad \omega_2^{\,2} - \frac{\omega_1^{\,2} \cdot \left(\omega_2^{\,2} - \frac{A \cdot V^2 \cdot l}{2 \cdot I} \right)}{\omega_1^{\,2} - \frac{A \cdot V^2 \cdot l}{2 \cdot I}} > 0$$

La seconde inéquation peut s'écrire:

$$\frac{\frac{A \cdot V^2 \cdot l}{2 \cdot I} \cdot (\omega_1^{\,2} - \omega_2^{\,2})}{\omega_1^{\,2} - \frac{A \cdot V^2 \cdot l}{2 \cdot I}} > 0$$

Le numérateur de cette expression est négatif, puisque par définition, $\omega_2^{\,2} = 3 \cdot \omega_1^{\,2}$. Pour que l'expression soit positive, il faut donc que son dénominateur soit négatif, c'est à dire que la première inégalité ne soit pas vérifiée.
Les deux dernières conditions de stabilité ne pouvant être réalisées simultanément, le système est forcément instable.