

Le vent solaire

Corrigé de l'épreuve de physique MPI 2008

Le lecteur intéressé pourra consulter cette bibliographie introductive sur laquelle le sujet s'est en partie appuyé :

- « How does the solar wind blow ? a simple kinetic model », Nicole Meyer-Vernet, *Eur. J. Phys.* **20**, 167 (1999)
- « Basics of the solar wind », Nicole Meyer-Vernet (Cambridge University Press, 2007)
- « Physics of space plasmas : an introduction », George K. Parks (Boulder, 2004)
- « Physics of the space environment », Tamas I. Gombosi (Cambridge University Press, 1998)

1 Généralités sur les plasmas rencontrés en astrophysique

1.1 Plasma cinétique ou plasma collisionnel

1. $E_c \approx k_B T$ si on suppose l'équilibre thermique.
2. La distance moyenne est de l'ordre de $n_e^{-1/3}$.
3. $E_p \approx e^2 / (4\pi\epsilon_0 n_e^{-1/3})$.
4. On a $\Gamma = \frac{e^2 n_e^{1/3}}{4\pi\epsilon_0 k_B T}$.

Les plasmas spatiaux (vent solaire, couronne solaire et ionosphère) sont des plasmas cinétiques (gaz parfait chargé), ce qui ne veut pas dire que les interactions coulombiennes ne jouent pas de rôle, comme on va le voir avec les phénomènes d'écrantage ci-dessous (interactions longues portées). L'intérieur stellaire est marginalement cinétique alors que les électrons dans un métal forment un plasma collisionnel.

Plasma	Γ
Vent solaire à 1 UA	2×10^{-8}
Couronne solaire	2×10^{-6}
Ionosphère	2×10^{-4}
Intérieur stellaire	2×10^{-1}
Métal	9×10^2

Dans un plasma cinétique, l'énergie cinétique domine alors que dans un plasma collisionnel, l'énergie potentiel domine (leur comportement est contrôlé par les interactions courtes portées).

1.2 Écrantage électrique dans la couronne solaire

1.2.1 Situation d'équilibre

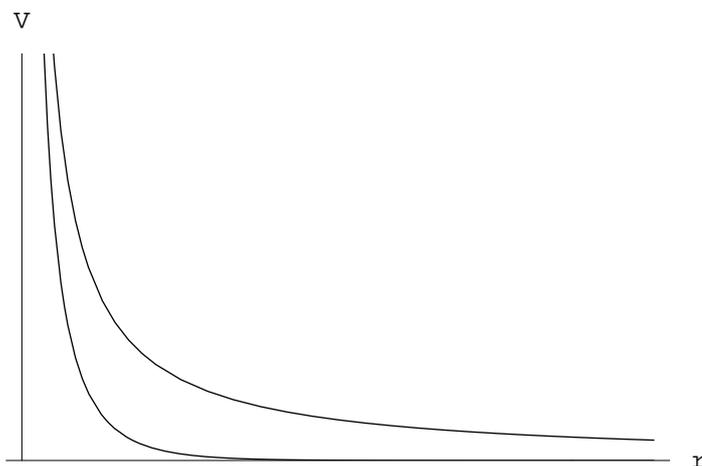
5. On reconnaît un facteur de Boltzmann pour l'équilibre thermique. La neutralité électrique est bien assurée pour $V(r) = 0$ (n_0 représente la densité pour $r \rightarrow \infty$, c'est donc la valeur donnée dans les différents tableaux).
6. L'équation de Poisson s'écrit $\Delta V(r) + \rho(r)/\epsilon_0 = 0$ avec $\rho(r) = -en_e(r) + en_p(r)$. À l'aide du Laplacien en coordonnées sphériques, on obtient :

$$\frac{d^2}{dr^2} (rV(r)) = \frac{2ren_0}{\epsilon_0} \operatorname{sh} \left(\frac{eV(r)}{k_B T} \right).$$

7. Dans un plasma cinétique, $eV(r) \ll k_B T$, donc on peut développer le sh et l'équation précédente se ramène à une EDL d'ordre 2 sur $rV(r)$. Seule la solution en exponentiel décroissante est valable pour éviter la divergence en $r \rightarrow \infty$. Pour $r \rightarrow 0$, le potentiel est dominé par celui créé par l'ion de référence, ce qui permet de déterminer la constante d'intégration. On se retrouve avec un potentiel du type Yukawa fournit dans l'énoncé, où :

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{2n_0 e^2}}.$$

8. La longueur de Debye est l'échelle spatiale caractérisant l'hypothèse de quasi neutralité car si $V(r) = 0$, alors $n_e = n_p = n_0$ d'après les équations (1) et (2). On a un phénomène d'écranage, le champ électrique est nul sur une distance plus grande que λ_D . La figure ci-dessous représente le potentiel de Yukawa (courbe du bas) ainsi que le potentiel de Coulomb (courbe du haut). Le potentiel de Yukawa décroît beaucoup plus vite vers zéro.



9. On trouve $\lambda_D \approx 6,6 \text{ m}$, c'est donc petit devant les échelles spatiales qui sont de l'ordre de l'unité astronomique (ou au moins du rayon solaire). Par contre, cela peut intervenir pour l'environnement immédiat des satellites qu'on envoie dans l'espace (c'est en particulier une des raisons pour laquelle ceux-ci se chargent).

1.2.2 Ondes acoustiques dans un plasma cinétique

10. L'équation de Poisson permet de calculer n_p en fonction de n_e et du potentiel $V(x, t)$

$$\frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} + \frac{e(n_p(x, t) - n_e(x, t))}{\epsilon_0} = 0.$$

Donc
$$n_p(x, t) = -\frac{\epsilon_0}{e} \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} + n_0 \exp \left(\frac{eV(x, t)}{k_B T} \right)$$

On développe ensuite l'exponentielle avec l'hypothèse de plasma cinétique $\Gamma \ll 1$. Il nous reste à vérifier qu'on peut négliger le terme $\frac{\epsilon_0}{e} \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2}$ devant $\frac{n_0 e V(x, t)}{k_B T}$, ce qui est

le cas puisque le rapport entre les deux termes est de l'ordre de $(\lambda_D/L)^2 \ll 1$, où L est une distance caractéristique liée à l'onde (par exemple la longueur d'onde) qui est grande devant la longueur de Debye par hypothèse.

11. On fait un bilan de conservation du nombre de protons sur un tranche d'épaisseur dx en l'absence puis déformé par la présence de l'onde :

$$n_0 \times dx = n_p \times (dx + d\xi) ,$$

d'où le résultat en utilisant la question 10.

12. Avec le PFD, cela donne finalement :

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = - \frac{e}{m_p} \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} ,$$

$$\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} = - \frac{eV(x, t)}{k_B T} .$$

13. On obtient immédiatement l'équation de d'Alembert :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{m_p}{k_B T} \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = 0 .}$$

14. On a $\boxed{c_s = \sqrt{\frac{k_B T}{m_p}}}$. L'onde acoustique n'est pas créée par des chocs protons-protons, mais par l'intermédiaire du champ électrique (collision « longue portée »).

15. L'application numérique donne $\boxed{c_s \approx 34 \text{ km.s}^{-1}}$. On a $c_s < v_{SN}$, donc le vent solaire est supersonique.

1.3 Écrantage magnétique

16. L'induction implique qu'un champ électrique doit se créer, qui satisfait à l'équation de Maxwell-Faraday $\text{rot } \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$. Avec les invariances selon y et z , on déduit de l'équation de Maxwell-Faraday que E_z est constant, donc nul. De plus, avec $\text{div } \vec{E} = 0$ car le plasma est neutre, on déduit aussi que E_x est constant donc nul.

1.3.1 Cas d'un plasma collisionnel ($\Gamma \gg 1$)

17. On a $\boxed{\vec{j} = \gamma \vec{E}}$.

18. Les équations de Maxwell fournissent les relations suivantes :

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = - \frac{\partial B(x, t)}{\partial t} ,$$

$$\frac{\partial B(x, t)}{\partial x} = -\mu_0 j(x, t) = -\mu_0 \gamma E(x, t) .$$

En éliminant le champ électrique, on a :

$$\boxed{\frac{\partial^2 B(x, t)}{\partial x^2} = \mu_0 \gamma \frac{\partial B(x, t)}{\partial t} .}$$

Donc le coefficient de diffusion s'écrit $\boxed{D = 1/(\mu_0 \gamma)}$. Le champ magnétique pénètre de façon diffusive dans le plasma, contrairement au cas du plasma sans collision (cf 1.3.2).

19. La longueur de pénétration L au bout d'un temps τ s'écrit qualitativement $L \approx \sqrt{D \times \tau}$ donc $\tau \approx R_{\odot}^2 \mu_0 \gamma = 4 \times 10^{18} \text{ s}$! La diffusion est très lente car γ est très grand.

1.3.2 Cas d'un plasma cinétique ($\Gamma \ll 1$)

20. L'hypothèse est valable pour un mouvement non relativiste des électrons. Avec la température qui est donnée pour le vent solaire à 1 UA, on obtient une vitesse quadratique moyenne de l'ordre de :

$$\langle (v_e^2)^{1/2} \rangle \approx 2,5 \times 10^6 \text{ m.s}^{-1} \approx c/122 ,$$

donc on est bien dans une situation non relativiste.

21. Les équations de Maxwell et le PFD nous donnent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} &= -\frac{\partial B(x, t)}{\partial t} , \\ \frac{\partial B(x, t)}{\partial x} &= \mu_0 n_e e v_e(x, t) , \\ \frac{\partial v_e(x, t)}{\partial t} &= -\frac{e}{m_e} E(x, t) . \end{aligned}$$

22. On résout le système précédent en $B(x, t) = B_0(t) \exp\left(-\frac{x}{\lambda_{\text{pl}}}\right)$.

Avec

$$\lambda_{\text{pl}} = \sqrt{\frac{m_e}{\mu_0 n_e e^2}} .$$

23. On observe un écrantage magnétique sur une distance de l'ordre de la longueur plasma λ_{pl} , zone d'interface entre des parties magnétisées et des parties non magnétisées du plasma. Le champ magnétique ne pénètre pas dans les zones de champ non magnétisés. L'ordre de grandeur pour les plasmas spatiaux est de $\lambda_{\text{pl}} \approx 2 \text{ km}$.
24. La causalité est violée. On a négligé le terme de déplacement dans Maxwell-Ampère, alors que c'est lui qui fait justement la propagation. Si on en tient compte, on n'a plus ce découplage entre le temps t et la position x et donc le problème de causalité disparaît. Notre modèle n'est valable que si le champ magnétique évolue à une fréquence plus petite que c/λ_{pl} , donc qualitativement

$$\left| \frac{1}{B_0} \frac{dB_0}{dt} \right| \ll \frac{c}{\lambda_{\text{pl}}} .$$

1.3.3 Ondes d'Alfvén dans un plasma cinétique avec champ magnétique

25. Les électrons éliminent rapidement le champ électrique qu'ils voient (condition de conducteur parfait), donc dans le référentiel de leur mouvement d'ensemble :

$$\vec{E}' = \vec{0} = \vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} .$$

Autrement dit, la force de Lorentz qui agit sur eux est constamment nulle :

$$\boxed{m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = 0 .}$$

26. D'après le choix de la forme du champ magnétique et l'hypothèse d'ARQS, on voit que $\vec{\text{rot}} \vec{\text{B}}$ est porté seulement par \vec{e}_y , or \vec{v}_p est selon \vec{e}_x car on cherche des solutions d'oscillations protoniques unidirectionnelles. Attention à l'erreur dans l'énoncé, on doit déduire de cette question que $(\vec{j}_e + \vec{j}_p) \cdot \vec{e}_x = 0$.
27. On peut écrire le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{\text{E}} &= \frac{e(n_p - n_e)}{\varepsilon_0} = 0 , \\ \text{div } \vec{\text{B}} &= 0 , \\ \vec{\text{rot}} \vec{\text{E}} &= -\frac{\partial \vec{\text{B}}}{\partial t} , \\ \vec{\text{rot}} \vec{\text{B}} &= -\mu_0 e n_e \vec{v}_e + \mu_0 e n_p \vec{v}_p , \\ m_p \frac{d\vec{v}_p}{dt} &= e(\vec{\text{E}} + \vec{v}_p \wedge \vec{\text{B}}) . \end{aligned}$$

L'équation du mouvement projeté sur \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z donne :

$$\begin{aligned} m_p \frac{\partial v_p(z, t)}{\partial t} &= e E_x , \\ E_y &= v_p(z, t) B_0 , \\ E_z &= 0 . \end{aligned}$$

Puis l'équation de Maxwell Faraday donne :

$$\begin{aligned} \partial_t B(z, t) &= \partial_z E_y , \\ \partial_z E_x &= \partial_x E_z , \\ \partial_x E_y &= \partial_y E_x . \end{aligned}$$

D'où on en déduit :

$$\partial_t B(z, t) = B_0 \partial_z v_p(z, t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 B(z, t)}{\partial t^2} = B_0 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial v_p(z, t)}{\partial t} = \frac{B_0 e}{m_p} \frac{\partial E_x}{\partial z} .$$

L'équation de Maxwell-Ampère projetée sur \vec{e}_y donne :

$$\partial_z B(z, t) = -\mu_0 n_e e v_{e,y} .$$

Donc en utilisant $\vec{\text{E}} + \vec{v}_e \wedge \vec{\text{B}} = \vec{0}$, cela donne, projeté sur \vec{e}_x :

$$E_x = -v_{e,y} B_0 = \frac{B_0}{\mu_0 n_e e} \partial_z B(z, t) .$$

On obtient bien ce qu'il faut en remplaçant :

$$\boxed{\frac{\partial^2 B(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{v_A^2} \frac{\partial^2 B(z, t)}{\partial t^2} = 0 .}$$

28. On a $v_A = \sqrt{\frac{B_0^2}{\mu_0 n_p m_p}}$, car $n_e = n_p = n_0$ et comme c'est incompressible, c'est donc constant. La vitesse d'Alfvén est donc la vitesse de propagation des perturbations magnétiques.
29. $v_A \approx 59 \text{ km.s}^{-1}$. Comme $v_A < v_{\text{SN}}$, le vent solaire est superalfvénique.

2 Le vent solaire

30. On se place à $R = 1 \text{ UA}$, la masse perdue pendant dt vaut $dM = n_0 \times 4\pi R^2 v_{\text{SN}} dt \times m_p$ (en négligeant la masse des électrons), ce qui donne un temps de vie de

$$\tau_{\text{SN}} = \frac{M_{\odot}}{4\pi n_{\oplus} R^2 v_{\text{SN}} m_p} \approx 1,6 \times 10^{21} \text{ s} = 4,9 \times 10^{13} \text{ ans} .$$

Où $n_{\oplus} = 7,1 \times 10^6 \text{ m}^{-3}$ est la densité particulière du vent solaire au niveau de la Terre. La perte de masse par le vent solaire n'est pas le mécanisme qui fixe la durée de vie du Soleil (de l'ordre de 10^{10} ans).

31. L'énergie perdue pendant dt est l'énergie cinétique des particules (à 1 UA, on néglige l'énergie potentielle), donc

$$P_{\text{SN}} = 2\pi m_p v_{\text{SN}}^3 n_{\oplus} R^2 \approx 10^{20} \text{ W} .$$

Alors que la puissance électromagnétique s'écrit simplement

$$P_{\text{EM}} \approx 10^3 \times 4\pi R^2 = 2,8 \times 10^{26} \text{ W} .$$

La perte d'énergie est dominée par les photons par 6 ordres de grandeur.

2.1 Modèle hydrostatique de Chapman pour la couronne solaire (1957)

32. D'après la partie 1 sur l'écrantage, le plasma se comporte comme un bon conducteur, donc le champ électrique est nul, sauf bien sûr localement, mais ici les échelles de distance sont grandes devant la longueur de Debye $\lambda_D = 6,6 \text{ m}$.
33. $p(r) = p_p(r) + p_e(r) = n_p(r)k_B T(r) + n_e(r)k_B T(r) = 2n_p(r)k_B T(r)$.

Donc

$$p(r) = 2n_p(r)k_B T(r) .$$

34. En régime permanent, l'équation de diffusion de la chaleur s'écrit $\text{div } \vec{j}_{\text{th}} = 0$, ce qui donne l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 T^{5/2}(r) \frac{dT}{dr} \right) = 0 .$$

Avec la condition limite au limite $T(r = \infty) = 0$, on en déduit le résultat par une méthode de séparation des variables, avec $\mu = 2/7$.

35. On prend $r = 1 \text{ UA}$, ce qui donne

$$T(r = 1 \text{ UA}) \approx 6,8 \times 10^5 \text{ K} ,$$

ce qui est en accord qualitatif avec la donnée du tableau 1.

36. À l'aide de l'équilibre hydrostatique $\overrightarrow{\text{grad}} p = \rho \overrightarrow{g}$, puis de la loi des gaz parfaits ainsi que de l'expression précédente de ρ en fonction de p (si on néglige m_e devant m_p), on obtient ce qu'il faut une fois projeté sur $\overrightarrow{e_r}$ avec

$$H(r) = -\frac{2k_B T(r)}{m_p g(r)}.$$

Avec le théorème de Gauss, on a immédiatement :

$$g(r) = -\frac{GM_\odot}{r^2}.$$

Et enfin, en utilisant l'expression de $T(r)$, on a finalement pour $H(r)$:

$$H(r) = \frac{2k_B T_0 r_0^{2/7}}{GM_\odot m_p} r^{12/7}.$$

37. On obtient à l'aide de l'équation d'équilibre hydrostatique :

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{GM_\odot m_p}{2k_B T_0 r^2} \left(\frac{r}{r_0}\right)^\mu p(r).$$

L'expression de p_∞ s'écrit :

$$p_\infty = p_0 \exp \left[-\frac{7GM_\odot m_p}{10k_B T_0 r_0} \right].$$

38. On a $p_0 = 1,7 \times 10^{-6}$ Pa par la question 33, donc :

$$p_\infty = 3,7 \times 10^{-7} \text{ Pa}.$$

La pression ne s'annule pas à l'infini, ce qui suggère l'existence d'un vent solaire : la pression p_∞ est beaucoup plus grande que la pression du milieu interstellaire qui est de l'ordre de 10^{-14} Pa.

39. C'est un modèle statique d'une part, et d'autre part il suppose un plasma collisionnel, ce qui n'est pas notre cas. Dans un plasma cinétique, la diffusion de la température telle qu'elle a été modélisée ($\overrightarrow{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$) n'a plus de sens.

2.2 Modèle exosphérique du vent solaire

2.2.1 Distribution des vitesses au niveau de l'exobase

40. Il suffit d'utiliser l'intégrale donnée au début du sujet à trois reprises.
 41. Il suffit pour cela d'intégrer, dans l'espace des vitesses, $f_{e,p}(\overrightarrow{v})d^3\overrightarrow{v}$ sur une couronne sphérique d'épaisseur dv :

$$g_{e,p}(v)dv = \iiint_{dv} f_{e,p}(\overrightarrow{v})d^3\overrightarrow{v} = 4\pi v^2 f_{e,p}(\overrightarrow{v})dv$$

d'où le résultat.

42. La vitesse quadratique moyenne vaut :

$$\langle v_{e,p}^2 \rangle = \iiint_{-\infty}^{\infty} dv_x dv_y dv_z v^2 f_{e,p}(\vec{v}) = \int_0^{\infty} dv 4\pi v^4 g_{e,p}(v).$$

Donc

$$\langle v_{e,p}^2 \rangle = \frac{3k_B T_0}{m_{e,p}}.$$

La vitesse la plus probable est celle pour laquelle :

$$\frac{dg_{e,p}}{dv} = 0,$$

donc

$$w_{e,p} = \sqrt{\frac{2k_B T_0}{m_{e,p}}}.$$

Ces deux vitesses ne sont pas égales car les distributions $g_{e,p}$ ne sont pas symétriques.

43. Comme on est dans l'exosphère, il n'y a pas de collisions, donc l'énergie d'une particule se conserve et un simple bilan d'énergie entre l'exobase et l'infini donne :

$$v_{\text{lib}} = \left(\frac{2GM_{\odot}}{r_0} \right)^{1/2} \approx 2,7 \times 10^5 \text{ m.s}^{-1}.$$

C'est la même vitesse pour les électrons et les protons. Comme les électrons sont en moyenne plus rapides car plus légers, on s'attend à ce qu'il y en ait davantage qui s'échappent.

44. Voir question suivante.

45. Le nombre de particules quittant l'exobase entre t et $t+dt$ est égal au nombre de particules $d^2N_{e,p}$ comprises dans un bout de couronne sphérique d'épaisseur $dr = v_r dt$ et de base dS , et qui ont une vitesse supérieure à la vitesse de libération (on se place en coordonnées sphériques dans l'espace des vitesses) :

$$\begin{aligned} d^2N_{e,p} &= n_0 \int_{v_r^2+v_{\theta}^2+v_{\phi}^2 > v_{\text{lib}}^2} dv_r dv_{\theta} dv_{\phi} f_{e,p}(\vec{v}) \times v_r dt dS \\ d^2N_{e,p} &= n_0 dt dS \left(\frac{m_{e,p}}{2\pi k_B T_0} \right)^{3/2} 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_{v_{\text{lib}}}^{\infty} dv v^3 \cos \theta e^{-\frac{m_{e,p} v^2}{2k_B T_0}} \\ F_{e,p} &= \frac{d^2N_{e,p}}{dt dS} = \frac{n_0}{\sqrt{\pi} w_{e,p}^3} \int_{v_{\text{lib}}}^{\infty} dv v^3 e^{-\frac{v^2}{w_{e,p}^2}} \end{aligned}$$

On intègre entre 0 et $\pi/2$ pour ne prendre que les particules qui ont une vitesse radiale positive (et $v_r = v \cos \theta$). Avec une intégration par parties, on obtient le résultat demandé.

46. On a $w_e \approx 7,8 \times 10^6 \text{ m.s}^{-1}$ et $w_p \approx 1,9 \times 10^5 \text{ m.s}^{-1}$. Donc $F_e = 6,8 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}.\text{m}^{-2}$ et $F_p = 6,7 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}.\text{m}^{-2}$. Il va donc se créer une importante séparation de charge qui sera à l'origine d'un champ électrique (qui assurera la quasi-neutralité).

2.2.2 Première approche : modèle de Chamberlain (1960)

47. Comme on est à l'équilibre hydrostatique, on peut utiliser les distributions de Boltzmann et donc :

$$n_e(r) = n_0 \exp \left(- \frac{m_e(\phi_g(r) - \phi_g(r_0)) - e(V(r) - V(r_0))}{k_B T_0} \right).$$

$$n_p(r) = n_0 \exp \left(- \frac{m_p(\phi_g(r) - \phi_g(r_0)) + e(V(r) - V(r_0))}{k_B T_0} \right).$$

48. C'est immédiat à partir de $n_e = n_p$ (condition de neutralité), de la question précédente, et du fait que $V_{PR} \rightarrow 0$ pour $r \rightarrow \infty$. On trouve $V_{PR}(r_0) \approx 190 \text{ V}$.

49. À l'aide d'un bilan d'énergie analogue à la question 43, on trouve

$$v_{\text{lib}}^{e,p} = \left(-2\phi_g(r_0) \pm \frac{2eV_{PR}(r_0)}{m_{e,p}} \right)^{1/2}.$$

C'est-à-dire
$$v_{\text{lib}}^{e,p} = \left(\frac{GM_\odot}{r_0} \frac{m_p + m_e}{m_{e,p}} \right)^{1/2}.$$

50. La question précédente donne :

$$\frac{v_{\text{lib}}^e}{w_e} = \frac{v_{\text{lib}}^p}{w_p} = \frac{GM_\odot(m_p + m_e)}{r_0 k_B T_0} \quad \text{et} \quad \frac{v_{\text{lib}}^e}{v_{\text{lib}}^p} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}}.$$

En utilisant l'équation donnée, on en déduit :

$$\frac{F_e}{F_p} = \frac{w_e}{w_p} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}} \approx 42.$$

Donc malgré la neutralité, le modèle de Chamberlain prévoit que le Soleil se charge positivement.

51. L'hypothèse de neutralité est trop contraignante, il faut se contenter de la quasi-neutralité pour lever ce problème. En effet, $n_p \neq n_e$ d'après l'équation de Poisson.

2.2.3 Modèle de Lemaire et Scherer (1971)

52. Le fait que la vitesse v_{lib}^p soit négligeable montre que le potentiel gravitationnel $m_p \phi_g(r_0)$ compense à peu près le potentiel électrique $eV(r_0)$. Or, comme $m_p \gg m_e$, on en déduit que $eV(r_0) \gg m_e \phi_g(r_0)$, donc la vitesse de libération des électrons se simplifie comme demandé.

53. Il suffit d'écrire la condition de nullité du courant électrique, qui donne :

$$\left(1 + \frac{eV(r_0)}{k_B T_0} \right) e^{-\frac{eV(r_0)}{k_B T_0}} = \sqrt{\frac{m_e}{m_p}} \left(1 + \left(\frac{v_{\text{lib}}^p}{w_p} \right)^2 \right) e^{-\left(\frac{v_{\text{lib}}^p}{w_p} \right)^2}.$$

Ensuite, il suffit de constater que $\frac{v_{\text{lib}}^p}{w_p} \ll \frac{eV(r_0)}{k_B T_0}$, qui est équivalent à avoir $\frac{v_{\text{lib}}^p}{v_{\text{lib}}^e} \ll \left(\frac{m_e}{m_p} \right)^{1/4}$, car avec PR, on avait $\frac{v_{\text{lib}}^p}{v_{\text{lib}}^e} = \left(\frac{m_e}{m_p} \right)^{1/2}$ et $m_e \ll m_p$. On obtient alors ce qu'il faut.

54. On trouve $V(r_0) \approx 880 \text{ V}$. C'est normal de trouver davantage qu'à la question 48 car il faut davantage chasser les protons pour assurer une nullité du courant électrique.
55. On fait un bilan d'énergie entre l'exobase et l'infini, où $\frac{3k_B T_0}{2m_p}$ représente l'énergie cinétique au niveau de l'exobase. Puis on utilise le fait que la température, comme les potentiels électrique et gravitationnel tendent vers zéro à l'infini :

$$\frac{v_{\text{SN}}^2}{2} \simeq \frac{3k_B T_0}{2m_p} + \frac{eV(r_0)}{m_p} - \frac{GM_{\odot}}{r_0} .$$

56. On trouve $v_{\text{SN}} \approx 430 \text{ km.s}^{-1}$, ce qui est le bon ordre de grandeur. Chacun des termes dans le bilan précédent est du même ordre de grandeur : $2,6 \times 10^{10} \text{ J.kg}^{-1}$ pour l'énergie thermique, $8,8 \times 10^{10} \text{ J.kg}^{-1}$ pour l'énergie électrique et $-3,7 \times 10^{10} \text{ J.kg}^{-1}$ pour l'énergie gravitationnelle.

2.2.4 Distribution suprathermique des électrons : modèle de Pierrard et Lemaire (1996)

57. Une distribution suprathermique va augmenter sensiblement le flux d'électron, sans forcément changer la densité moyenne, donc augmenter le champ électrique accélérateur.
58. Il suffit de dériver la distribution de la norme des vitesses $g_e(v) = 4\pi v^2 f_e(\vec{v})$ et on trouve sans difficulté que w est effectivement la vitesse la plus probable.
59. La vitesse quadratique moyenne s'écrit :

$$\langle v^2 \rangle = 2 \frac{A_{\kappa}}{(\kappa w^2)^{3/2}} \int_0^{\infty} dv \frac{v^4}{\left(1 + \frac{v^2}{\kappa w^2}\right)^{1+\kappa}} .$$

En appelant I l'intégrale, on montre à l'aide d'une IPP que :

$$I = \frac{3w^2}{2} \int_0^{\infty} dv \frac{v^2}{\left(1 + \frac{v^2}{\kappa w^2}\right)^{\kappa}} .$$

Puis il suffit de multiplier dans l'intégrale par $(1 + v^2/(\kappa w^2))$ au numérateur et au dénominateur pour montrer que :

$$I = \frac{3w^2}{2} \int_0^{\infty} dv \frac{v^2}{\left(1 + \frac{v^2}{\kappa w^2}\right)^{1+\kappa}} + \frac{3}{2\kappa} I .$$

Enfin, on utilise la normalisation pour intégrer la seule intégrale qui reste, ce qui fournit le résultat demandé. On déduit que nécessairement $\kappa > 3/2$.

60. À partir de la définition de la température cinétique qui est $m_e \langle v^2 \rangle / 2 = 3k_B T_0 / 2$, on a immédiatement le résultat suivant :

$$w^2 = \frac{2\kappa - 3}{\kappa} \frac{k_B T_0}{m_e} \quad \Rightarrow \quad w \approx 5,5 \times 10^6 \text{ m.s}^{-1} .$$

61. On a :

$$F_e(r_0) \approx \frac{n_0}{2} \frac{A_\kappa}{(\kappa w^2)^{3/2}} \int_{v_{\text{lib}}^e}^{\infty} dv \frac{v^3}{(v^2/\kappa w^2)^{\kappa+1}} .$$

D'où

$$F_e(r_0) = \frac{n_0 A_\kappa}{4} \frac{\kappa^{1/2}}{(\kappa - 1)} w \left(\frac{\kappa w^2}{v_{\text{lib}}^e} \right)^{\kappa-1} .$$

On aurait pu aussi calculer le flux de façon exacte :

$$F_e(r_0) = \frac{n_0}{4\kappa^{3/2}} w A_\kappa \left(1 + \frac{v_{\text{lib}}^e{}^2}{w^2} \right) \left(1 + \frac{v_{\text{lib}}^e{}^2}{\kappa w^2} \right)^{-\kappa} .$$

62. En égalant le flux d'électrons avec le flux de protons qui s'exprime à l'aide de l'équation (7) avec $v_{\text{lib}}^p = 0$, on obtient :

$$\frac{v_{\text{lib}}^e{}^2}{w^2} = \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\kappa^{\kappa-1/2} A_\kappa}{\kappa - 1} \frac{w}{w_p} \right]^{1/(\kappa-1)} = \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\kappa^{\kappa-1/2} A_\kappa}{\kappa - 1} \sqrt{\frac{2\kappa - 3}{2\kappa}} \sqrt{\frac{m_p}{m_e}} \right]^{1/(\kappa-1)}$$

On obtient le résultat demandé à l'aide de

$$v_{\text{lib}}^e \approx \sqrt{\frac{2eV(r_0)}{m_e}}$$

On doit aussi utiliser l'expression de w trouvée plus haut et on trouve pour β_κ :

$$\beta_\kappa = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\kappa^{\kappa-1/2} A_\kappa}{\kappa - 1} \sqrt{\frac{2\kappa - 3}{2\kappa}} .$$

63. L'expression précédente donne que $U_0 = \frac{eV(r_0)}{k_B T_0} \approx 16$. Avec cette valeur, on voit que le potentiel électrostatique domine dans le bilan d'énergie de la question 55, de telle sorte qu'on peut écrire :

$$v_{\text{SN}} \approx \left(\frac{2eV(r_0)}{m_p} \right)^{1/2} \approx 700 \text{ km.s}^{-1} .$$

On voit donc que modifier la queue de la distribution des vitesses électroniques au niveau de l'exobase suffit à considérablement augmenter la vitesse d'éjection des protons, donc du vent solaire.

64. On n'a pas tenu compte du champ magnétique solaire, ni de la rotation du Soleil. Ces deux effets rajoutent des termes dans le bilan d'énergie.

2.3 Vent solaire avec champ magnétique : spirale de Parker

65. On a dans le référentiel en rotation (pour $r > r_0$) :

$$\begin{aligned} v'_r &= v_{\text{SN}} , \\ v'_\theta &= 0 , \\ v'_\varphi &= -(r - r_0)\Omega_\odot \sin \theta . \end{aligned}$$

Ces équations s'intègrent car v_{SN} est supposée constante. En éliminant le temps t , on obtient :

$$\begin{aligned} \theta(r) &= \text{constante} , \\ \varphi(r) &= \varphi_0 - \frac{\Omega_{\odot}}{v_{\text{SN}}} (r - r_0) . \end{aligned}$$

66. $\text{div } \vec{B} = 0$ donne $\partial_r(r^2 B_r) = 0$, donc :

$$B_r(r) = B_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 ,$$

en remarquant qu'au niveau de l'exobase, le champ magnétique est purement radial.

67. Il suffit d'écrire la condition que \vec{B} est colinéaire à la vitesse, c'est-à-dire $B_{\varphi}/B_r = v'_{\varphi}/v'_r$ puis le résultat de la question précédente pour aboutir à :

$$\vec{B} = B_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \vec{e}_r - B_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 (r - r_0) \frac{\Omega_{\odot} \sin \theta}{v_{\text{SN}}} \vec{e}_{\varphi} .$$

D'où le résultat pour la norme.

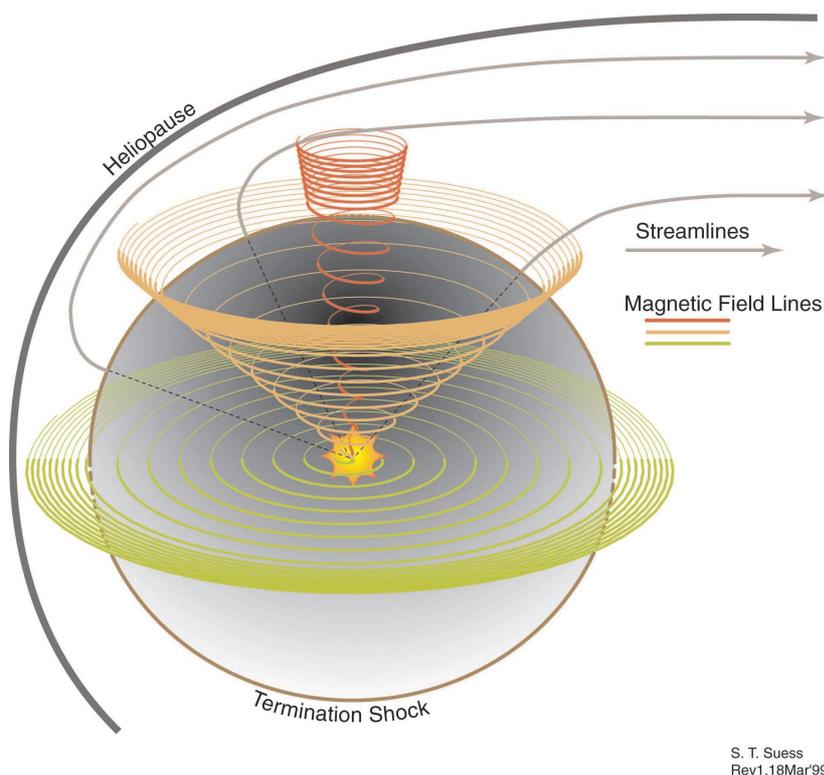


FIG. 1: Spiral de Parker. Image credit : Steve Suess, NASA/MSFC.

68. La forme des lignes de champ est complètement différente, avec une spirale ici (voir FIG. 1). La composante radiale décroît en $1/r^2$ alors que la composante tangentielle décroît en $1/r$. Ce champ magnétique est différent de celui donné par un dipôle magnétique qui donnerait une décroissance en $1/r^3$.

69. On obtient, à partir de la valeur du champ magnétique du tableau 1 :

$$B_{\oplus} = 7 \times 10^{-9} \text{ T à } D = 1 \text{ UA} \gg r_0 \text{ et } \theta = \pi/2 ,$$

donc

$$B_0 \approx \left(\frac{D}{r_0} \right)^2 \frac{B_{\oplus}}{\left(1 + \frac{D^2 \Omega_{\odot}^2}{v_{\text{SN}}^2} \right)^{1/2}} \approx 8,7 \times 10^{-6} \text{ T} ,$$

ce qui colle qualitativement avec les observations. On trouve un angle de :

$$\Theta = \text{Arctan} \left(\frac{D \Omega_{\odot}}{v_{\text{SN}}} \right)^2 \approx 47^\circ .$$

Fin du sujet