

Un défi métrologique: la détection des ondes gravitationnellesPremière Partie: Dispositif interférentiel et méthode de détectionA. - Interféromètre de Michelson.1. Interférences entre deux ondes monochromatiques cohérentes

$$A.1^*a. \quad \Delta(\pi, t) = a e^{j\omega t} [e^{-j\varphi_1(\pi)} + e^{-j\varphi_2(\pi)}]$$

$$A.1^*b. \quad I(\pi) = \Delta \Delta^* = 2a^2 (1 + \cos(\varphi_2(\pi) - \varphi_1(\pi))) \quad a^2 = I_0 \text{ éclaircissement d'une onde seule.}$$

$$A.1^*c. \quad \text{Maximum pour } \Delta\varphi(\pi) = 2N\pi \quad \text{Minimum pour } \Delta\varphi(\pi) = (2N+1)\pi$$

2. Source monochromatique

A.2^*a. Contact optique pour $\delta_0 = 0$. On peut, par exemple, réaliser les anneaux décalés d'une source ponctuelle (laser + lentille biconvexe) puis caractériser pour faire grossir les anneaux au maximum. On peut affiner en lumière blanche, le Michelson étant réglé au loin d'au, on amène la frange centrale au centre de la figure sur l'écran.

$$A.2^*b. \quad I(\delta_0) = 2I_0 (1 + \cos \frac{2\pi\delta_0}{\lambda})$$

$$A.2^*c. \quad I(\delta) - I(\delta_0) = 2I_0 (\cos \frac{2\pi\delta}{\lambda} - \cos \frac{2\pi\delta_0}{\lambda}) = 2I_0 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \sin \frac{2\pi\delta_0}{\lambda} \times LE \right)$$

$$(\Delta I)_{\text{pg}} = \frac{4I_0\pi}{\lambda} LE \sin \frac{2\pi\delta_0}{\lambda}$$

$$A.2^*d. \quad (\Delta I)_{\text{pg}} \text{ maximum si } \sin \frac{2\pi\delta_0}{\lambda} = \pm 1 \Rightarrow \delta_0 = (2N+1)\frac{\lambda}{4}$$

$$A.2^*e. \quad \frac{(\Delta I)_{\text{pg}}}{I_0} = \frac{4\pi LE}{\lambda} \approx 1,2 \cdot 10^{-3}$$

3. Influence de la largeur spectrale du LASER

A.3^*a. On valeur moyenne sur le temps des ondes de fréquences $\neq$ additionnent leurs intensités

$$I_0 = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} I_{\omega} d\omega = K \Delta\omega.$$

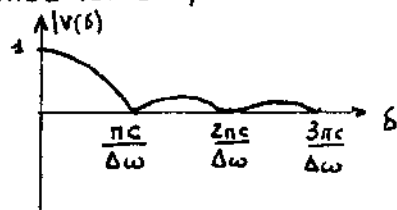
$$A.3^*b. \quad dI = 2K (1 + \cos \frac{\delta\omega}{c}) d\omega = \frac{2I_0}{\Delta\omega} (1 + \cos \frac{\omega\delta}{c}) d\omega. \quad (\text{erreur de texte: } \omega_0 \rightarrow \omega)$$

$$A.3^*c. \quad I = \frac{2I_0}{\Delta\omega} \left(\Delta\omega + \frac{c}{\delta} \left(\sin \frac{\delta}{c} (\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}) - \sin \frac{\delta}{c} (\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}) \right) \right)$$

$$= 2I_0 \left(1 + \frac{2c}{\delta\Delta\omega} \sin \frac{\delta\Delta\omega}{2c} \cos \frac{\delta\omega_0}{c} \right) \Rightarrow V(\delta) = \text{sinc} \left(\frac{\delta\Delta\omega}{2c} \right)$$

si $\Delta\omega = 0 \quad |V(\delta)| = 1$: raie parfaitement monochromatique.

$$A.3^*d. \quad |V(\delta)|: \text{contraste des franges. } \left(\frac{I_M - I_m}{I_M + I_m} \right).$$



A.3^*e. Les maximums secondaires sont obtenus

$$\text{pour } \sin \frac{\delta\Delta\omega}{2c} \approx 1 \text{ et valent } \frac{2c}{\delta\Delta\omega}$$

$$\text{si } \delta \gg \frac{2\pi c}{\Delta\omega} \Rightarrow |V(\delta)|_{\text{max}} \ll \frac{1}{\pi} \text{ on ne verra plus les franges.}$$

A.3^*f. Si on admet un contraste "honorable" jusqu'à $\delta = \frac{\pi c}{2\Delta\omega}$ on aura donc

$$\frac{\Delta\omega_{\text{max}}}{\omega_0} = \frac{\pi c}{2\delta_{\text{max}}\omega_0} = \frac{\pi c}{2\delta_{\text{max}} \times 2\pi c} = \frac{\lambda}{4\delta_{\text{max}}} \approx \frac{10^{-6}}{40} = 2,5 \cdot 10^{-8}$$

B. Prise en compte des fluctuations du LASER

2/

1. Influence des fluctuations de puissance.

B.1*.a. $(\Delta I)_{\text{puce}} = 2\Delta I_0 (1 + \cos \frac{2\pi \delta_0}{\lambda})$

B.1*.b. $(\Delta I)_{\text{puce}}$ minimum si $\cos \frac{2\pi \delta_0}{\lambda} = -1$ condition en opposition avec celle d'un maximum de détection.

2. Dispositif de Pound, Drever, Hall.

B.2*.a. $\delta = \delta_0 + LE + 2(n_2 - n_1)e$.

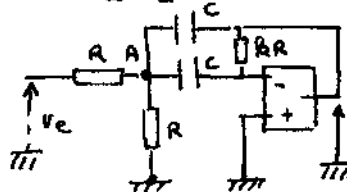
B.2*.b. $\delta = \delta_0 + LE + 2(2a_0 \cos \Omega t)e \Rightarrow I = 2I_0 (1 + \cos(\underbrace{\frac{2\pi \delta_0}{\lambda}}_{\Phi_0} + \underbrace{\frac{2\pi LE}{\lambda}}_{\alpha} + \underbrace{\frac{8\pi e a_0}{\lambda}}_{2m} \cos \Omega t))$

3. Filtrage du signal détecté: choix du filtre.

B.3*.a. On doit utiliser un filtre passe bande centré sur Ω pour ne garder (si possible) que le terme dépendant de E .

B.3*.b. pour $\Omega = 0$ C circuit ouvert $\Rightarrow V_s = 0$
 $\Omega \rightarrow \infty$ C v court circuit $\Rightarrow V_s = 0 \Rightarrow$ passe bande!

B.3*.c. $V^- = V^+ = 0$



$$j\omega C V_A = -\frac{V_s}{R} \quad \frac{V_e - V_A}{R} = \frac{V_A}{R} - \frac{V_s}{R} + (V_A - V_s)j\omega C$$

$$\rightarrow V_A = -\frac{V_s}{j\omega R C \omega} \quad V_e = +2V_A - \frac{V_s}{R} + j\omega C V_A - j\omega C V_s$$

$$\rightarrow V_e = -\frac{2V_s}{j\omega R C \omega} - \frac{2V_s}{R} - j\omega C V_s$$

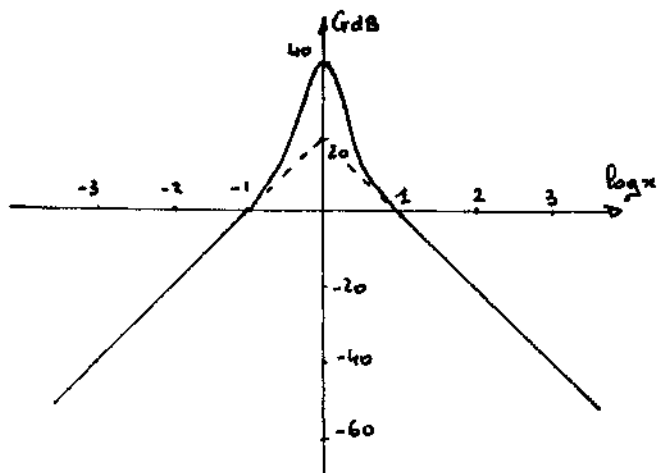
$$\underline{H} = \frac{V_s}{V_e} = \frac{-1}{\frac{2}{R} + \frac{2}{j\omega R C \omega} + j\omega C} = \frac{-R/2}{1 + \frac{1}{j\omega R C \omega} + j\omega \frac{R}{2}} \sim \frac{H_0}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$$

avec $H_0 = -\frac{R}{2}$ $\frac{Q}{\Omega_0} = \frac{RRC}{2}$ $Q\Omega_0 = \frac{1}{RC} \rightarrow Q^2 = \frac{R}{2}$ or $\Omega_0 = \sqrt{\frac{2}{R}} \times \frac{1}{RC}$

B.3*.d. $G_{dB} = 20 \log |H| = 20 \log \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2}}$

$|H_0| = Q^2 = 100$

pour $x = 1$ $G_{dB, \max} = 40$



qd $x \rightarrow 0$ $G_{dB} = 40 - 20 + 20 \log x$

qd $x \rightarrow \infty$ $G_{dB} = 40 - 20 - 20 \log x$

B.3*.e. Bande passante à -3dB: bande de fréquence t.q. $|H| > \frac{|H_0|}{\sqrt{2}}$

limites données par $Q(x - \frac{1}{x}) = \pm 1$

pour +1: $x^+ = \frac{1}{2} (\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4})$

pour -1: $x^- = \frac{1}{2} (\frac{1}{Q} - \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4})$

$\Delta x = x^+ - x^- = \frac{1}{Q} \rightarrow \Delta \omega = \frac{\Omega_0}{Q}$

B.3*.f. Réglage le mieux adapté: $\Omega_0 = \Omega$.

4. Résultat du Filtrage

3/

B.4*a. $V_d(t) = \delta I_0 (m^2 + 2m\alpha E \cos \Omega t + m^2 \cos 2\Omega t)$

Le Filtrage supprime la composante continue m^2

la composante Ω_0 est multipliée par H_0

la composante à $2\Omega_0$ est multipliée par $\frac{H_0}{\sqrt{1 + \frac{9}{4}\Omega^2}} \sim \frac{H_0}{15}$

$$\rightarrow V_s(t) = \delta I_0 \left[2m\alpha E H_0 \cos \Omega t + \frac{m^2 H_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\Omega\right)^2}} \cos 2\Omega t \right]$$

$$\rightarrow A_\Omega = 2\delta I_0 H_0 m \alpha E \quad A_{2\Omega} = \frac{\delta I_0 H_0 m^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\Omega\right)^2}}$$

B.4*b. $(\Delta V)_{\text{pluc}} = (b A_{2\Omega} + A_\Omega) \frac{\Delta I_0}{I_0} = \delta H_0 m \left[\frac{mb}{\sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\Omega\right)^2}} + 2\alpha E \right] \Delta I_0$

$(\Delta V)_{\text{og}} = A_\Omega = 2\delta H_0 m I_0 \alpha E$

B.4*c. l'idéal est de trouver un filtre qui diminue au maximum $A_{2\Omega}$
On peut diminuer m , mais pas trop tout de même car la réponse A_Ω est proportionnelle à m .

A.N. $\frac{(\Delta V)_{\text{og}}}{(\Delta V)_{\text{pluc}}} = \frac{2\alpha E}{\frac{mb}{15} + 2\alpha E} \frac{I_0}{\Delta I_0} \sim 1,8$ c'est détectable mais difficilement!
negligeable

B.4*d. Un tel filtre diminue $A_{2\Omega}$. Une perte de 43dB correspond à une multiplication de H_0 par $10^{-43/20} = 7,1 \cdot 10^{-3}$ (et non $\frac{1}{15}$)

$\rightarrow \frac{(\Delta V)_{\text{og}}}{(\Delta V)_{\text{pluc}}} = \frac{2\alpha E}{7,1 \cdot 10^{-3} mb} \frac{I_0}{\Delta I_0} = 16$, c'est nettement mieux!

II. Rayonnement gravitationnel par un système de deux étoiles à neutrons.

1. Point matériel en rotation autour d'un astre

1*a. $\vec{F} = -\frac{GMm\vec{r}}{r^3}$ $-\frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{\nabla} \ln \frac{1}{r} \rightarrow E_p(r) = -\frac{GMm}{r} + C$ (0 à l'infini)

1*b. $\frac{d\vec{L}_{A/R}}{dt} = \vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{0}$ $\vec{L}_{A/R} = C^{te} = m \vec{AS} \wedge \vec{v}_S = m \vec{AS}_0 \wedge \vec{v}_{S_0}^{initial}$
 $\vec{AS}_0$ et $\vec{v}_{S_0}$ définissent un plan, $\vec{L}_{A/R} \perp$ à ce plan. et $\vec{v}_S \perp \vec{L}_{A/R}$
reste dans ce plan $\rightarrow$ trajectoire plane.

1*c. trajectoire circulaire $F = \frac{GMm}{R^2} = m\omega^2 R \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$

1*d. pour un satellite de période T , sur une trajectoire elliptique de $\frac{1}{2}$ grand axe a : $\frac{T^2}{a^3} = C^{te}$.

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \rightarrow \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$

1*e. $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m (\omega R)^2 - \frac{GMm}{R} = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{R}$

Energie < 0 correspondant à un système lié.

2. Système binaire: point matériel fictif

2*a. système isolé $2M \frac{d\vec{v}_B}{dt} = 0 \quad \vec{v}_B = \text{cte. dans } (R)$

2*b. Référentiel barycentrique: centré sur B, en translation $\backslash (R)$. Ici translation à vitesse constante $\rightarrow$ réf. galiléen.

2*c. $\vec{BF} = A_1 A_2 \Rightarrow \frac{d^2 \vec{BF}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{BA}_2}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{BA}_1}{dt^2} = -\frac{GM \vec{A_1 A_2}}{A_1 A_2^3} - \frac{GM \vec{A_1 A_2}}{A_1 A_2^3}$

La force n'exerçant sur A_2 est $-\frac{GM^2 \vec{A_1 A_2}}{A_1 A_2^3}$

Soit μ la masse de F $\rightarrow$ on doit avoir $\mu \frac{d^2 \vec{BF}}{dt^2} = -\frac{GM^2 \vec{A_1 A_2}}{A_1 A_2^3}$

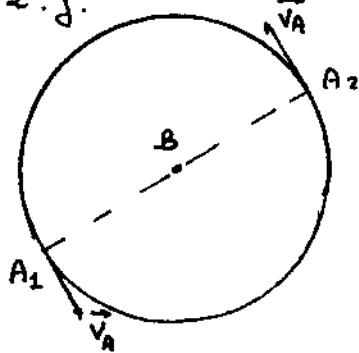
$\rightarrow -2\mu \frac{GM \vec{A_1 A_2}}{A_1 A_2^3} = \frac{GM^2 \vec{A_1 A_2}}{A_1 A_2^3} \Rightarrow \mu = \frac{M}{2}$

2*d. $\frac{M}{2} \omega^2 R = \frac{GM^2}{R^2} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2GM}{R^3}}$

2*e. $T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{2GM}} \rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{2GMT^2}{4\pi^2}} = 456 \text{ km.}$

$\underline{v_A} = \frac{R}{2} \omega = \frac{2\pi}{2T} R = 14300 \text{ km/s}$

2*f.



3. Energie mécanique du système

3*a. Second théorème de Koenig.

$E_c = E_c^* + \frac{1}{2} (2M) v_B^2 = E_c^* + M v_B^2$

3*b. $E_c^* = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{2}\right) (\omega R)^2 = \frac{M \omega^2 R^2}{4} = \frac{M R^2}{4} \times \frac{2GM}{R^3} = \frac{GM^2}{2R}$

3*c. $E_p = -\frac{GM^2}{R}$ (E_p doit dériver la force agissant sur A_2)

$\rightarrow E_m = M v_B^2 - \frac{GM^2}{2R}$

4. Effondrement du système binaire

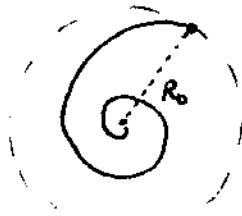
4*a. Une force non conservative ne dérive pas d'un potentiel. On ne peut donc pas entrer sa contribution dans E_m .

On a $\frac{dE_m}{dt} = -P_g \quad E_m \downarrow \quad v_B = \text{cte} \Rightarrow \left| \frac{GM^2}{2R} \right| \uparrow \rightarrow R \downarrow$

4*b. $\frac{d}{dt} \left(-\frac{GM^2}{2R} \right) = -K M^2 R^4 \left(\frac{2GM}{R^3} \right)^3 \Rightarrow \frac{G}{2R^2} \frac{dR}{dt} = -\frac{8KG^3 M^3}{R^5}$

$\rightarrow \frac{dR}{dt} = -\frac{16KG^3 M^3}{R^3} \quad \alpha = 16KG^3 M^3$

4*c. $R^3 dR = -\alpha dt \Rightarrow \frac{R^4 - R_0^4}{4} = -\alpha t \quad R = R_0 \left(1 - \frac{4\alpha t}{R_0^4} \right)^{\frac{1}{4}}$



4*d. Contact qd $R = a \Rightarrow \frac{a^4}{R_0^4} = 1 - \frac{4\alpha t_c}{R_0^4}$

$\rightarrow t_c = \frac{R_0^4}{4\alpha} \left(1 - \left(\frac{a}{R_0} \right)^4 \right) \quad \text{et } \omega_c = \sqrt{\frac{2GM}{a^3}}$

A.N: $\alpha = 16 \text{ KG}^2 \text{M}^3$ $K = \frac{8G}{5c^5} = 4,39 \cdot 10^{-53} \text{ si}$

$\rightarrow \alpha = 6,86 \cdot 10^{19} \text{ m}^4 \text{ s}^{-1}$ $\frac{a}{R_0} \ll 1 \Rightarrow t_c \neq \frac{R_0^4}{4\alpha} = 163 \mu$

$\omega_c = 6833 \text{ rad.s}^{-1}$

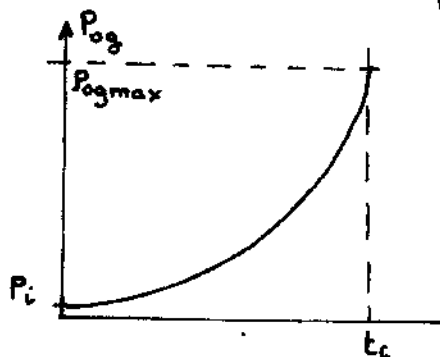
4.*e. $\left| \frac{dR}{dt} \right|$ doit rester $\ll R\omega$ pour que la relation donnant E_m , qui suppose la trajectoire circulaire reste valable.

à l'instant du contact $\left| \frac{dR}{dt} \right| = \frac{\alpha}{a^3} = 8575 \text{ km.s}^{-1}$ et $R\omega_c = 136660 \text{ km.s}^{-1}$

On voit donc que $\left| \frac{dR}{dt} \right|$ reste $\ll R\omega$ même jusqu'au contact.

5. Aspect énergétique

5.*a. $P_{og} = KM^2 R^4 \left(\frac{2GM}{R^3} \right)^3 = \frac{8KM^5 G^3}{R^5} = \frac{8KM^5 G^3}{R_0^5 \left(1 - \frac{4\alpha t}{R_0^4} \right)^{5/4}} = \frac{P_i}{\left(1 - \frac{4\alpha t}{R_0^4} \right)^{5/4}}$



5.*b. avec $P_i = 8,7 \cdot 10^{41} \text{ W}$ $P_{ogmax} = 5,6 \cdot 10^{48} \text{ W}$

On voit que ces puissances sont énormes par rapport à celle reçue du soleil

5.*c. $E_{og} = \int_0^{t_c} \frac{P_i}{\left(1 - \frac{4\alpha t}{R_0^4} \right)^{5/4}} dt = \frac{R_0^4 P_i}{\alpha} \left[1 + \frac{1}{\left(1 - \frac{4\alpha t_c}{R_0^4} \right)^{1/4}} \right]$

avec $1 - \frac{4\alpha t_c}{R_0^4} = \left(\frac{a}{R_0} \right)^4$

$E_{og} = \frac{R_0^4}{\alpha} \times \frac{8KM^5 G^3}{R_0^5} \left[\frac{R_0}{a} + 1 \right]$

$E_{og} \neq \frac{8KM^5 G^3}{16KG^2 M^3 a} = \frac{GM^2}{2a}$

correspond à l'énergie totale finale! (en He rigueur: $\frac{GM^2}{2a} \left(\frac{R_0 - a}{R_0} \right)$)

F I N.