

Etude d'un gravimètre à lévitation de sphère supraconductrice
A. Chimie : le Niobium
1. Caractères structuraux

b. $n = 1 + 8 \cdot (1/8) = 2$

c. $\rho = (2 \cdot M) / (N_A a^3) = 8510 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

d. $R = (a \sqrt{3}) / 4 = 143 \text{ pm}$

e. $c = 2 \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) / a^3 = 0,68$

2. Etude de l'oxydation du Niobium

a. n.o. = 5

$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^2 4d^3$ si on applique Klechkowski (en fait : $5s^1 4d^4$) donc 5 électrons de valence ce qui est en accord avec le n.o.

b. $\frac{4}{5} \text{Nb}_{(s)} + \text{O}_{2(g)} = \frac{2}{5} \text{Nb}_2\text{O}_{5(s)} \quad (1) \quad \Delta_r H^\circ_1(298) = -760 \text{ kJ/mol}$ et $\Delta_r S^\circ_1(298) = -179 \text{ J/K/mol}$

c. $\Delta_r H^\circ_1 < 0$ donc sens \leftarrow

d. variance : $v = (3-1) + 2 - 3 = 1$ donc on ne peut choisir indépendamment T et P.

Avec un constituant supplémentaire (et sans réactions supplémentaires), $v = 2$ donc on peut.

e. $\ln \left(\frac{P^\circ}{p_{\text{O}_2, \text{eq}}} \right) = \ln K^\circ(T) = - \frac{\Delta_r G^\circ(T)}{RT}$ d'où $\ln \left(\frac{p_{\text{O}_2, \text{eq}}}{P^\circ} \right) = -285$ à $T = 298$.

f. $A(T) = RT \cdot \ln \left(\frac{p_{\text{O}_2}}{p_{\text{O}_2, \text{eq}}} \right)$ d'où $A(298) = 7.10^{15}$ et la réaction d'oxydation est très favorisée

thermodynamiquement.

g. Il doit y avoir formation d'une couche protectrice d'oxyde qui empêche la poursuite de l'oxydation.

3. Diagramme d'Ellingham

b. Fusion de l'aluminium : $\text{Al}_{(s)} = \text{Al}_{(l)}$ avec $\Delta H = 10600 \text{ J/mol}$ et $\Delta S = 11,3 \text{ J/K/mol}$ d'où $T_A = \Delta H / \Delta S = 938 \text{ K}$. (les tables donnent 660 K !)

c. $2\text{C}_{(s)} + \text{O}_{2(g)} = 2\text{CO}_{(g)}$ d'où $\Delta S = 2 S^\circ(\text{CO}_{(g)}) - S^\circ(\text{O}_{2(g)}) - 2 S^\circ(\text{C}_{(s)}) > 0$ car

l'entropie du solide est plus faible que celles des gaz

$S^\circ(\text{CO}_{(g)}) \approx S^\circ(\text{O}_{2(g)})$ car molécules diatomiques

donc $\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T \Delta_r S^\circ$ a une pente négative.

4. Exploitation du diagramme

a. $5\text{C} + \text{Nb}_2\text{O}_5 = 5\text{CO} + 2\text{Nb}$ déplacée vers la droite si (3) est en dessous de (1) donc pour $T > 1500 \text{ K}$. La réaction est donc endothermique. Cette température élevée conduit à utiliser d'autres réducteurs.

b. $\frac{10}{3} \text{Al} + \text{Nb}_2\text{O}_5 = \frac{5}{3} \text{Al}_2\text{O}_3 + 2\text{Nb}$ déplacée vers la droite si (2) est en dessous de (1) ce qui est bien réalisé. $\Delta_r H^\circ = -935 \text{ kJ/mol}$.

c. $\Delta_r H^0 + \int_{1000}^T \left(\frac{5}{3} C_p(\text{Al}_2\text{O}_3) + 2C_p(\text{Nb}) \right) dT = 0$ d'où $T \approx 6000$ K. A cette température tout est vaporisé (et les C_p ne sont pas restés constants) !

B. Physique : Lévitiation d'une sphère supraconductrice dans un champ magnétique

1. Champ magnétique au voisinage de l'axe de révolution

a. Soit P un point de (C) : $d\vec{\mathcal{M}}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$ avec $PM^3 = (a^2+z^2)^{3/2}$, $d\vec{\ell} = a d\theta \vec{m}_\theta$ et

$\vec{PM} = (-a\vec{m}_r + z\vec{m}_z)$, d'où $\oint d\vec{\ell} \wedge \vec{PM} = 2\pi a^2 \vec{m}_z$. D'où le résultat de l'énoncé.

b. Le plan xOz est un plan d'antisymétrie donc contient $\vec{\mathcal{M}}$ en un de ses points.

Le plan yOz est un plan d'antisymétrie donc en deux points symétriques par rapport à ce plan les champs $\vec{\mathcal{M}}$ sont symétriques : $B_x(-x,z) = -B_x(x,z)$ et $B_z(-x,z) = B_z(x,z)$.

c. B_r est une fonction impaire de r et B_z une fonction paire.

d. $\text{div} \vec{\mathcal{M}} = \frac{B_r}{r} + \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 2I\alpha(z) + If'(z) = 0$ d'où $\alpha(z) = -\frac{1}{2} f'(z)$.

e. $\text{rot} \vec{\mathcal{M}} = \vec{m}_\theta \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) = I\vec{m}_\theta [r\alpha'(z) - 2r\beta(z)] = \vec{0}$ d'où $\beta(z) = -\frac{1}{4} f''(z)$.

On retrouve bien les expressions du texte.

2. Force exercée sur un anneau supraconducteur

a. Prenons comme surface de bord (C') le disque d'axe z. Alors :

$$\Phi = \iint B_z dS = I\pi b^2 f(z) + I\beta(z) \iint r^4 dr d\theta \approx I\pi b^2 f(z).$$

$$\text{b. } R'I' + L' \frac{dI'}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi b^2 f(z) \frac{dI}{dt}.$$

$$\text{c. } \frac{dI'}{dt} = -\frac{\pi b^2 f(z)}{L'} \frac{dI}{dt} \text{ donc } I'(t) = -\frac{\pi b^2 f(z)}{L'} I(t) + \text{cst et } I_0' = -\frac{\pi b^2 f(z)}{L'} I_0.$$

$$\text{d. } d\mathcal{E} = I_0' d\vec{\ell} \wedge \vec{\mathcal{M}} = I_0' d\ell \vec{m}_\theta \wedge (B_r \vec{m}_r + B_z \vec{m}_z) = I_0' d\ell (B_z \vec{m}_r - B_r \vec{m}_z) \quad \text{où } d\ell = b d\theta,$$

$$B_r = I_0 b \alpha(z) \quad \text{et} \quad B_z = I_0 f(z) + I_0 b^2 \beta(z). \quad \text{Donc}$$

$$\mathcal{E} = I_0' [b B_z \oint \vec{m}_r d\theta - \vec{m}_z b B_r \oint d\theta] = -2\pi b^2 I_0 I_0' \alpha(z) \vec{m}_z \text{ soit}$$

$$\mathcal{E} = \frac{2\pi^2 b^4}{L'} I_0^2 f(z) \alpha(z) \vec{m}_z.$$

$$\text{e. } F_z = -\frac{\pi^2 b^4}{L'} I_0^2 f(z) f'(z) \text{ d'où } E_p = \frac{\pi^2 b^4}{2L'} I_0^2 f^2(z) = K B_0(z) \text{ où } K = \frac{\pi^2 b^4}{2L'}.$$

3. Equilibre de lévitation magnétique d'une sphère supraconductrice

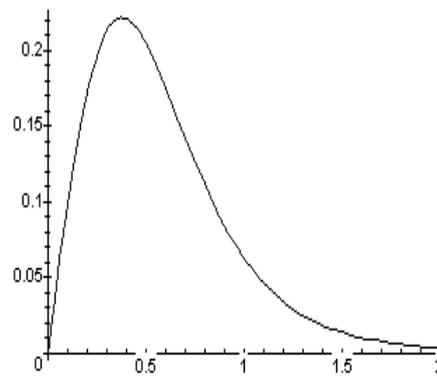
a. $\mathcal{E}(M) = NI_0 f(z) \mathcal{M}_z$ d'où $E_p = \frac{\pi \mu_0 R^3 a^2 N^2 I_0^2}{4(a^2 + z^2)^3}$ puis

$$F(z) = -\frac{\partial E_p}{\partial z} = \gamma \frac{z}{(a^2 + z^2)^4} I_0^2 \text{ avec } \gamma = \frac{3\pi \mu_0 R^3 a^2 N^2}{2}.$$

b. $\frac{d}{dz} \frac{z}{(a^2 + z^2)^4} = \frac{a^2 - 7z^2}{(a^2 + z^2)^5}$ d'où $z_m = \frac{a}{\sqrt{7}} \approx 0,38 a$

et $F_m = \frac{c\gamma}{a^7} I_0^2$ avec $c = \frac{1}{\sqrt{7}} \left(\frac{7}{8}\right)^4 \approx 0,22$

c. Il faut $F_m > mg$ soit $I_0 > \sqrt{\frac{mga^7}{c\gamma}} = I_m \approx 11,8 \text{ A.}$



d. Il y a deux intersections de $y_1 = F(z)$ avec $y_2 = mg$ telles que $z_1 < z_m < z_2$.

En z_1 : si z augmente (resp. diminue), $F(z)$ augmente (resp. diminue) et la sphère continue à monter (resp. descendre). Cette position est donc instable.

En z_2 : si z augmente (resp. diminue), $F(z)$ diminue (resp. augmente) et la sphère redescend (resp. remonte). Cette position est donc stable.

e. En $z = z_s = z_2$,

$$\mathcal{E}(M) = NI_0 \mathcal{M}_z [f(z_s) + \beta(z_s)r^2 + \dots] + NI_0 \mathcal{M}_r [\alpha(z_s)r + \dots]$$

d'où $E_p = \frac{\pi R^3 N^2 I_0^2}{\mu_0} [f_s^2 + (\alpha_s^2 + 2f_s \alpha_s)r^2 + \beta_s^2 r^4 + \dots]$

soit $E_p \approx \frac{\pi R^3 N^2 I_0^2}{\mu_0} [f_s^2 + (\alpha_s^2 + 2f_s \alpha_s)r^2]$ d'où

$$F_r = -\frac{\partial E_p}{\partial r}.$$

Vu la forme parabolique de ce potentiel, on voit que $r = 0$ est une position d'équilibre stable si $(\alpha_s^2 + 2f_s \alpha_s) > 0$.

f. $(\alpha_s^2 + 2f_s \alpha_s) = \frac{\mu_0^2 a^4}{16} \left[\frac{6a^2 - 15z_s^2}{(a^2 + z_s^2)^5} \right] > 0$ si $z_s < a \sqrt{\frac{2}{5}} \approx 0,63 a$.

Finalement, on doit avoir : $\frac{a}{\sqrt{7}} < z_s < a \sqrt{\frac{2}{5}}$.

4. Principe des mesures de variation de χ_0 . Sensibilité.

a. De $mg = \gamma I_0^2 \frac{z_s}{(a^2 + z_s^2)^4}$ on déduit, à I_0 constante, $\ln(z_s) - 4\ln(a^2 + z_s^2) = \ln(g) + \text{cst}$ puis

$$\varepsilon = \left| \frac{dz_s}{dg} \right| = \left| \frac{z_s(a^2 + z_s^2)}{g(a^2 - 7z_s^2)} \right|.$$

b. $\varepsilon = \frac{5a}{6g} = 4,25 \cdot 10^{-3}$.

c. $\delta z = 4,2 \cdot 10^{-11}$. très faible !

d. Ici, à z_s constant, on a $2\ln(I_0) = \ln(g) + \text{cst}$ d'où $\delta I_0 = \frac{I_0}{2} \frac{\delta g}{g} = 6,25 \cdot 10^{-9}$ très faible !

5. Mesures du déplacement de la sphère par pont de capacités.

a. e est assez petit devant R , d'où $C_0 \approx \frac{\varepsilon_0 S}{e} = 12,4 \cdot 10^{-12}$ F.

b. Si $\delta z > 0$ (resp. < 0), l'épaisseur du condensateur « plan » supérieur diminue (resp. augmente) et sa capacité augmente (resp. diminue) et inversement pour le condensateur inférieur. Un DL : $\left(1 - \frac{\delta z}{e}\right) \approx 1 + \frac{\delta z}{e}$ donnerait effectivement $k \approx 1$, mais la variation de

l'épaisseur n'est pas uniforme puisque au voisinage de (A) elle reste pratiquement égale à e . La valeur $k \approx 0,5$ correspond à une moyenne sur l'épaisseur.

Par contre entre (A) et (Σ) l'épaisseur est voisine d'un extremum et varie donc très peu.

c. Montage inverseur avec deux résistances égales.

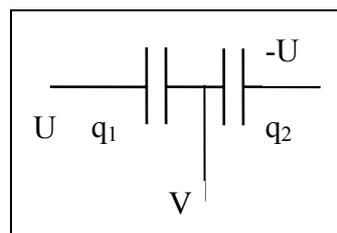
d. Soit A'' le noeud commun aux trois condensateurs : le courant dans C' étant négligeable (impédance d'entrée de l'oscillo. très grande), on a pratiquement (pour les parties variables des tensions) $V_{A''} = V_{A'} = V$, d'où $\underline{V} = \frac{jC_1\omega - jC_2\omega}{jC_1\omega + jC_2\omega} \underline{U} = \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} \underline{U}$ puis

$V(t) = kU \frac{\delta z}{e} \cos(\omega t)$. Donc $2V_m = 2kU \frac{\delta z}{e} = 10^{-5}$ V mesurable.

e. Quand $\delta z = 0$ la symétrie de la répartition des charges par rapport au plan horizontal passant par le centre de la sphère implique que la force totale est nulle.

D'autre part, on a $q_1 + q_2 = 0$ et $2U = \frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_2}$ d'où

$q_1 = -q_2 = \frac{2C_1C_2}{C_1 + C_2} U \cos(\omega t)$. Mais ces charges, égales en valeur



absolue, se répartissent sur des surfaces légèrement différentes : une portion de sphère correspondant à $0 < \theta < \theta_k$ a une aire $S_k = 2\pi R^2(1 - \cos(\theta_k))$. Donc, quand $\delta z \neq 0$, les surfaces à associer aux deux condensateurs sont respectivement : $S_1 = 2\pi R^2(1 - \cos(\theta_1))$ et

$S_2 = 2\pi R^2(1 - \cos(\theta_2))$ avec $\cos(\theta_1) = \frac{\frac{h}{2} - \delta z}{R}$ et $\cos(\theta_2) = \frac{\frac{h}{2} + \delta z}{R}$. Les densités superficielles

de charge (moyennées sur les surfaces) sont donc différentes, ainsi que les forces associées et

la résultante n'est plus nulle. Plus précisément : $F_k = \frac{\sigma_k^2 S_k}{2\varepsilon_0} = \frac{q_k^2}{2\varepsilon_0 S_k}$ d'où, en posant

—

$$S_0 = 2\pi R^2 \left(1 - \frac{h}{2R}\right), F_1 = \frac{q_1^2}{2\epsilon_0 S_0} \left(1 + \frac{\frac{\delta z}{R}}{1 - \frac{h}{2R}}\right)^{-1} \approx \frac{q_1^2}{2\epsilon_0 S_0} \left(1 - \frac{\frac{\delta z}{R}}{1 - \frac{h}{2R}}\right) \text{ et}$$

$$F_2 = \frac{q_2^2}{2\epsilon_0 S_0} \left(1 - \frac{\frac{\delta z}{R}}{1 - \frac{h}{2R}}\right)^{-1} \approx \frac{q_2^2}{2\epsilon_0 S_0} \left(1 + \frac{\frac{\delta z}{R}}{1 - \frac{h}{2R}}\right). \text{ Enfin, } \vec{F} = (F_1 - F_2) \mathbb{M}_z \approx -\frac{q^2}{\epsilon_0 S_0 R} \delta z \cdot \mathbb{M}_z.$$

Puisque : $\frac{2C_1 C_2}{C_1 + C_2} \approx C_0$ et $\langle U(t)^2 \rangle = U^2/2$, il reste au premier ordre :

$$\langle F_z \rangle \approx -\frac{\epsilon_0 S_0 U^2}{2e^2 R} \delta z = -4,13 \cdot 10^{-12} \text{ N. D'où } \frac{\delta g}{g} = |\langle F_z \rangle / m| = 8,26 \cdot 10^{-10} \approx 10^{-9}. \text{ C'est le bon}$$

ordre de grandeur.

La méthode à courant constant semble donc applicable puisqu'on peut mesurer les variations de z correspondantes (10^{-11}).

6. Conclusion.

a. Chute libre ou liée (pendule ..)

b. Marées ; mouvements des plaques formant la croûte terrestre.