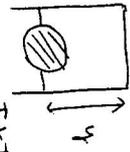


I.1. Vérification des niveaux

I.1.1



Écrivons la conservation de la matière

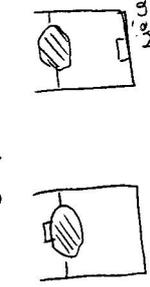
$$m = \rho_l (h_1 S - V_{imm}) + \rho_p V_p = \rho_l' S h_2$$

l'équilibre du solide (poids et poussée d'Archimède) permet de calculer le volume immergé $\rho_l V_{imm} = \rho_p V_{piece}$

$h_1 = h_2$ le niveau de l'eau ne varie pas

I.1.2 Écrivons à nouveau la conservation de la masse d'eau

$$m = \rho_l (h_1 S - V_{imm}) = \rho_l (h_2' S - V_{imm} - V_{piece})$$



V_{imm} et V_{imm}' : les volumes immergés de bois avant et après la chute de la pièce

équilibre { bouchon + pièce } $\rho_l V_{bois} + \rho_p V_{piece} = \rho_l V_{imm}$

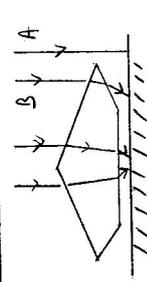
équilibre { bouchon } $\rho_l V_{bois} \neq \rho_l V_{imm}$

$$\rho_l h_1 S - (\rho_l V_{bois} + \rho_p V_{piece}) = \rho_l h_2' S - \rho_l V_{bois} - \rho_l V_{piece}$$

$$h_1' = h_1 + \frac{\rho_p}{\rho_l} \left(1 - \frac{\rho_p}{\rho_l}\right) < h_1 \quad \text{le niveau baisse}$$

I.2. La fraction

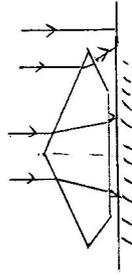
$m_1 > m_2$



dans ce cas $h_1 < h_2$ et les rayons se rapprochent de la normale

il y a donc une zone plus lumineuse sous le solide (et au centre) et un déficit de lumière entre A et B

$m_1 < m_2$



cette fois $h_1 < h_2$, il y a une zone moins lumineuse sous le sommet du solide et une zone plus lumineuse vers A et l'extérieur du solide

I.3.1 Une des pierres flotte dans l'isoleur de méthylène, on repère tout de suite la moissanite

I.3.2 la pierre n°1 (carbur clair) correspond au cas $m_1 < m_2$ avec m_2 (isoleur de méthylène = 1,75), il s'agit donc du verre flint

la pierre n°2 (carbur sombre) correspond au cas $m_1 < m_2$
 $m_1 = 1,95 > 1,75$.

Problème II Mesure et étude de la propagation des vibrations sismiques

II.1 Le mouvement pendulaire

II.1.1

N.B : l'angle θ n'est pas orienté dans le sens trigonométrique sur la figure, on l'oriente dans le sens trigonométrique dans le corrigé.

$$\vec{T} = -T\vec{e}_r$$

$$\vec{P} = mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = -m\ell\dot{\theta}^2\vec{e}_r + m\ell\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$$

II.1.2

Appliquons le principe fondamental de la dynamique à la masse m (la tige est sans masse) dans le référentiel galiléen d'étude :

$$m\vec{a} = \vec{T} + \vec{P}$$

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg \sin \theta$$

Dans le cas des petites oscillations :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

II.1.3

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 - mg\ell \cos \theta$$

La force \vec{T} ne travaille pas car elle est perpendiculaire au déplacement, le poids dérive d'une énergie potentielle, on est donc dans un cas de conservation de l'énergie mécanique.

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 - mg\ell \cos \theta = \text{constante}$$

$$m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\ell \sin \theta \dot{\theta} = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$$

II.1.4 Par définition du moment cinétique $\sigma_y = \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{e}_y = m\ell^2\dot{\theta}$.

$$\mathcal{M}_{0y}(\vec{P}) = (\vec{OG} \wedge m\vec{g}) \cdot \vec{e}_y = -mg\ell \sin \theta$$

$$\mathcal{M}_{0y}(\vec{T}) = (\vec{OM} \wedge \vec{T}) \cdot \vec{e}_y = 0$$

Appliquons le théorème du moment cinétique scalaire au pendule par rapport à l'axe Oy fixe dans le référentiel galiléen d'étude.

$$\frac{d\sigma_{0y}}{dt} = \mathcal{M}_{0y}$$

$$m\ell^2\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta$$

II.1.5 L'énergie potentielle du pendule est $E_p = mgZ$, $Z = -y \cos \beta + z \sin \beta$ avec $y = 0$ et $z = -\ell \cos \theta$.

L'énergie cinétique du pendule vaut $E_c = \frac{1}{2}mv^2(M) = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2$.

L'énergie mécanique du pendule vaut $E_m = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta \sin \beta$.

II.1.6 On se trouve toujours dans un cas de conservation de l'énergie mécanique. En dérivant E_m , on obtient :

$$m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl \sin \theta \beta \sin \dot{\theta} = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g \sin \beta}{\ell} \sin \theta = 0$$

II.1.7

$$\mathcal{M}_{0y}(\vec{P}) = -mgl \sin \theta \sin \beta$$

$$\frac{d\sigma_{0y}}{dt} = \mathcal{M}_{0y}(\vec{P})$$

Pour de petites oscillations,

$$m\ell^2\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta \sin \beta \simeq -mgl\theta \sin \beta = -C\theta$$

On peut donc assimiler l'action de la pesanteur à celle d'un ressort de torsion de moment $-C\theta$ avec $C = mgl \sin \beta$.

II.2 Vibration horizontale

II.2.1 Un tel dispositif est sensible à l'accélération du sol.

II.2.2 Dans le référentiel du socle en translation par rapport au référentiel terrestre galiléen, $\vec{f}_e = -m\ddot{x}(t)\vec{e}_x$.

II.2.3 Dans le référentiel du socle non galiléen, on peut appliquer le théorème du moment cinétique scalaire à la masse m par rapport à l'axe Oz fixe en tenant compte des forces d'inertie (entraînement seulement ici).

$$md^2\ddot{\theta} = -C\theta - \gamma \frac{d\theta}{dt} + (d\vec{e}_r \wedge -m\ddot{x}\vec{e}_x) \cdot \vec{e}_z$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\gamma}{md^2}\dot{\theta} + \frac{C}{md^2}\theta = \frac{\ddot{x} \cos \theta}{d}$$

II.2.4 $\ddot{x} = -\Omega^2 x_o \cos \Omega t$; $S(t) = D\theta(t)$; petites oscillations $\cos \theta \simeq 1$.

$$\ddot{S} + \frac{\gamma}{md^2}\dot{S} + \frac{C}{md^2}S = -\frac{D}{md}f_e(t)$$

$$\underline{S}(-\Omega^2 + j\Omega \frac{\gamma}{md^2} + \frac{C}{md^2}) = -\frac{D}{md} \underline{F}_e$$

$$\underline{H}(\Omega) = \frac{-\frac{D}{md}}{\frac{C}{md^2} - \Omega^2 + j\Omega \frac{\gamma}{md^2}}$$

II.2.5 On reconnaît un filtre du second ordre passe-bas avec $\Omega_o^2 = \frac{C}{md^2}$.

$$\underline{H} = \frac{-\frac{Dd}{C}}{1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_o^2} + j\Omega \frac{\gamma}{C}}$$

$$|\underline{H}| = \frac{\frac{Dd}{C}}{\sqrt{(1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_o^2})^2 + \Omega^2 \frac{\gamma^2}{C^2}}}$$

Posons $H_o = \frac{Dd}{C}$ et $Q = \frac{C}{\gamma\Omega_o} = \frac{d\sqrt{mC}}{\gamma}$.

$\tan \varphi = \frac{-Q \frac{\Omega}{\Omega_o}}{1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_o^2}}$ avec $\sin \varphi > 0$ donc $0 \leq \varphi \leq \pi$. Pour $\Omega = \Omega_o$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. $\varphi = 0$ pour les hautes pulsations et vaut π pour les basses pulsations.

Le diagramme de Bode en amplitude ne présente pas de résonance car $Q = 0.274 < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Il présente une asymptote à $-40dB/décade$ pour les hautes pulsations et vaut $H_{dBmax} = 20 \log H_o$ pour les basses pulsations.

II.2.6 $H_o = 0,33$, $\Omega_o = 5,47 \text{ rad}$ et $f_o = 0,87 \text{ Hz}$. $S_{max} = H_o F_{emax}$ avec $F_{emax} = m\Omega^2 x_o = m4\pi^2 f^2 x_o$, $S_{max} = D\theta_{max} = 0,395 \text{ m}$ et $\theta_{max} = 0,395 \text{ rad} > 0,1 \text{ rad}$, cela fait sortir l'appareil de son régime normal de fonctionnement.

II.3 Sismomètre de Lehman

II.3.1 Fonctionnement du capteur électromagnétique

II.3.1.1 Dans le référentiel de l'aimant permanent (référentiel du bras mobile), la bobine tourne à la vitesse angulaire $-\dot{\theta}$ par rapport à l'axe Oz .

Le conducteur MN est mobile dans un champ magnétique uniforme : $e_{MN} = \int_M^N (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = v_o B_o \ell$

II.3.1.2 $e_{P_1 P_2} = e_{PQ} + e_{QM} + e_{MN} + e_{NP} = v_o B_o \ell$ avec $e_{PQ} = 0$, $e_{QM} = 0$ et $e_{NP} = 0$. C'est valable tant que le segment PQ est dans le demi espace $x < 0$.

II.3.1.3 $\Phi(t) = B_o((L/2 + x_C)2R + \frac{\pi R^2}{2})$ et $e_{P_1 P_2}(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_o \dot{x}_C 2R = -2B_o R v_o$.

II.3.1.4 C'est l'inductance propre notée L.

II.3.1.5 On peut noter $\frac{dR}{dn} = \frac{R_1 - R_o}{N}$.

$$\Phi(t) = \int_{R_o}^{R_1} B_o((L/2 + x_C)2R + \frac{\pi R^2}{2}) dn = \int_{R_o}^{R_1} \frac{NB_o}{R_1 - R_o} ((L/2 + x_C)2R dR + \frac{\pi R^2}{2} dR)$$

$$\Phi(t) = \frac{NB_o}{R_1 - R_o} ((L/2 + x_C)(R_1^2 - R_o^2) + \frac{R_1^3 - R_o^3}{6})$$

$$e_N(t) = -\frac{d\Phi_N}{dt} = -NB_o \dot{x}_C (R_1 + R_o)$$

Ce résultat est pertinent car on retrouve le résultat du II.3.1.3 quand $R_1 = R_o = R$.

II.3.2 Sensibilité du détecteur et constante de rappel

II.3.2.1 $s(t) = \alpha \dot{\theta}$ et $J\ddot{\theta} = -C\theta - \gamma \frac{d\theta}{dt} + md\ddot{x} \cos \theta$. Pour les petits angles :

$$\ddot{\theta} + \gamma \frac{\dot{\theta}}{md^2} + \frac{C}{md^2} \theta = -\frac{F_e(t)}{md}$$

$$\underline{\theta}(-\Omega^2 + j\Omega \frac{\gamma}{md^2} + \frac{C}{md^2}) = -\frac{F_e}{md}$$

$$\underline{s} = \alpha j\Omega \underline{\theta} = -\frac{j\alpha\Omega}{md} \frac{F_e}{\Omega_o^2 - \Omega^2 + j\Omega \frac{\gamma}{md^2}}$$

$$\underline{H}(\Omega) = \frac{-\frac{j\alpha\Omega}{md}}{\Omega_o^2 - \Omega^2 + j\Omega \frac{\gamma}{md^2}} = \frac{-\frac{\alpha d}{\gamma}}{1 - j\frac{\Omega_o^2 md^2}{\Omega \gamma} + j\Omega \frac{md^2}{\gamma}}$$

II.3.2.2 On reconnaît un filtre du second ordre passe-bande avec $\omega_o^2 = \frac{C}{md^2}$, $A_o = -\frac{\alpha d}{\gamma}$ et $Q = \frac{C}{\gamma \omega_o} = \frac{d\sqrt{mC}}{\gamma}$.

II.3.2.3 La résonance a lieu quelque soit la valeur de Q pour $\Omega = \omega_o$ et $H_{dBmax} = 20 \log |A_o|$.

$$\underline{H}(\Omega) = \frac{-\frac{\alpha d}{\gamma}}{1 + jQ(\frac{\Omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\Omega})}$$

$\tan \varphi = -Q\left(\frac{\Omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\Omega}\right)$ avec $\cos \varphi < 0$ donc $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$. Pour $\Omega = \omega_o$, $\varphi = 0$. $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ pour les hautes pulsations et vaut $\frac{\pi}{2}$ pour les basses pulsations.

Le diagramme de Bode en amplitude présente deux asymptotes à $-20dB/décade$ pour les hautes pulsations et à $+20dB/décade$ pour les basses pulsations.

II.3.2.4 Si le signal excitateur est brusquement coupé, on observe le régime libre d'un oscillateur amorti : régime pseudopériodique si $Q > \frac{1}{2}$, régime apériodique si $Q < \frac{1}{2}$ et régime apériodique critique si $Q = \frac{1}{2}$. L'oscillateur retourne à l'équilibre.

Le démarrage dépend des conditions initiales. Si $Q > \frac{1}{2}$, le signal oscille avant de tendre vers $s = 0$. Si $Q < \frac{1}{2}$, le signal décroît sans osciller en tendant vers $s = 0$.

II.3.2.5 Il faut se placer dans le cas du régime apériodique critique car il correspond au retour le plus rapide à l'équilibre.

$Q = \frac{1}{2}$ d'où $C = \frac{\gamma^2}{4md^2}$. A.N : $C = 1 J rad^{-1}$.

II.4 Propagation d'ondes de vibrations acoustiques

II.4.1 Dans un problème à symétrie sphérique, p ne dépend que de r . On peut donc écrire :

$$\Delta p(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rp(r))}{\partial r^2}$$

Dans un espace homogène et isotrope, l'équation de propagation de d'Alembert s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta p(r, t) - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2(p(r, t))}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rp(r, t))}{\partial r^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2(p(r, t))}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned}$$

II.4.2

$$\begin{aligned} \Delta p(r, t) &= -\frac{p_o k}{r} \sin(kr - \omega t) = -\frac{\omega^2 p_o}{c_s^2 kr} \sin(kr - \omega t) \\ k^2 &= \frac{\omega^2}{c_s^2} \end{aligned}$$

Les surfaces d'onde ont pour équation $r = \text{constante}$ donc sont sphériques.

II.4.3 Z s'appelle impédance acoustique.

II.4.4 Par définition de la valeur moyenne temporelle du flux d'énergie :

$$\left\langle \int \int \vec{j}_e \cdot \overrightarrow{d^2S} \right\rangle = \left\langle \int \int p(r, t) \vec{v}(r, t) \cdot \vec{e}_r R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \right\rangle = \left\langle \frac{4\pi p_o^2 \sin^2(kr - \omega t)}{Zk^2} \right\rangle = \frac{2\pi p_o^2}{Zk^2}$$

On remarque qu'elle est indépendante du rayon R de la sphère choisie pour la calculer.

II.4.5 La puissance est constante en effet j_e décroît en $\frac{1}{r^2}$ et la surface en r^2 , cela exprime la conservation de l'énergie acoustique.

II.5 Propagation d'ondes sismiques

II.5.1 La loi de Snell-Descartes s'écrit $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ donc $\sin i_1 = n \sin i_2$. Le rayon réfracté se rapproche de la normale.

II.5.2 En optique $L = \int n ds$, on peut définir l'analogie du chemin optique par $\int \frac{ds}{v(z)} = \int dt = \tau$ qui est bien la durée de propagation de l'onde sismique le long du rai sismique.

II.5.3 Le rayon réfracté à chaque interface reste dans le plan d'incidence défini par le premier rayon et la normale à la première interface (Oxz ici).

$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 = n_m \sin i_m = \text{constante}$ en optique qu'on peut traduire ici par $\frac{\sin i(x)}{V(z(x))} = \text{constante}$.

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - i(x)\right) = \frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 i(x)}}{\sin i(x)}$$

$$\sin^2 i(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

$$\sin i(x) = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}$$

II.5.4 i augmente avec z , n diminue avec z et $V(z)$ augmente. On peut comparer cette situation à celle d'un mirage optique.

II.5.5 $\frac{\sin i(x)}{V(z(x))} = \text{constante} = \frac{1}{V(h)}$ pour $i = \frac{\pi}{2}$ et $\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{V(h)}{V(z)}$.

II.5.6 Développons à l'ordre 1 en $\frac{Kz}{V_o} < \frac{Kh}{V_o} \ll 1$:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{V_o + Kh}{V_o + Kz}$$

$$1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \left(\frac{V_o + Kh}{V_o + Kz}\right)^2 \simeq 1 + \frac{2K(h-z)}{V_o}$$

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{2K(h-z)}{V_o}}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{(h-z)}} = \sqrt{\frac{2K}{V_o}} dx$$

En intégrant, on obtient $\sqrt{h} - \sqrt{h-z} = \sqrt{\frac{K}{2V_o}} x$, la trajectoire est bien donnée par :

$$z(x) = h - \left(\sqrt{h} - x\sqrt{\frac{K}{2V_o}}\right)^2$$

Il s'agit d'une parabole et $z(x)$ s'annule pour $\sqrt{h} - x\sqrt{\frac{K}{2V_o}} = \pm\sqrt{h}$ ce qui correspond à $x = 0$ et

$$x = 2\sqrt{\frac{2V_o h}{K}} = \sqrt{\frac{8V_o h}{K}} = x_A$$

II.5.7 $\int_{OA} \frac{ds}{v(z)} = \tau_{OA} = \tau_{OC}$. De plus, $\cos(\frac{\pi}{2} - i_o) = \frac{CB}{AB}$ d'où $CB = \sin i_o(x_B - x_A)$.

$$\tau_{OB} - \tau_{OA} = \frac{CB}{V_o} = \frac{\sin i_o(x_B - x_A)}{V_o}$$

II.5.8 $V_a = \frac{x_B - x_A}{\tau(x_B) - \tau(x_A)} = \frac{V_o}{\sin i_o} = V(h)$

II.5.9 Calculons $h(\Delta)$.

$$h(\Delta) = \frac{1}{G} \int_0^\Delta du \sqrt{2 \frac{V_o + \frac{K^2 \Delta^2}{8V_o}}{V_o + \frac{K^2 u^2}{8V_o}} - 1}$$

$$\frac{KG\Delta^2}{8\Delta_o} = \int_0^\Delta du \sqrt{2(1 + \frac{K^2 \Delta^2}{8V_o^2})(1 - \frac{K^2 u^2}{8V_o^2}) - 1} = \int_0^\Delta du \sqrt{2} \sqrt{\frac{K^2(\Delta^2 - u^2)}{8V_o^2}}$$

$$\frac{G\Delta^2}{\sqrt{16}} = \int_0^\Delta du \sqrt{\Delta^2 - u^2}$$

Avec le changement de variables $u = \Delta \sin \theta$:

$$\frac{G\Delta^2}{4} = \Delta^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4} \Delta^2$$

$$G = \pi$$