EDHEC 2010 S J.F. COSSUTTA Lycée Marcelin BERTHELOT SAINT-MAUR

jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

EXERCICE 1

---

1) $(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \sum_{k=1}^{n} x_k$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U car c'est une fonction poynôme.

$(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U car c'est une fonction rationnelle dont le domaine de définition contient U.

Par produit :

$$\boxed{f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } U.}$$

2) Notons que f admet des dérivées partielles premières en tout point de U car elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

Soit $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un point de U. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\frac{\partial f_n}{\partial x_i}(X) = 1 \times \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(-\frac{1}{x_i^2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_i^2} \sum_{k=1}^{n} x_k$.

$\nabla f_n(X) = 0_{\mathbb{R}^n} \iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(X) = 0 \iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_i^2} \sum_{k=1}^{n} x_k = 0.$

Rappelons que $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ appartient à U donc, pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, x_i est strictement positif.

$$\nabla f_n(X) = 0_{\mathbb{R}^n} \iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i^2 = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}} \iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}}.$$

$$\nabla f_n(X) = 0_{\mathbb{R}^n} \iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n \text{ et } x_1 = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}} \iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n \text{ et } x_1 = \sqrt{\frac{n\, x_1}{n\, \frac{1}{x_1}}}.$$

$$\nabla f_n(X) = 0_{\mathbb{R}^n} \iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n \text{ et } x_1 = \sqrt{x_1^2} \iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n \text{ et } x_1 = x_1 \iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n.$$

$$\boxed{\text{f_n possède une infinité de points critiques. L'ensemble des points critiques de f_n est l'ensemble des éléments $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de U tels que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.}}$$

3) a) Soit $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un point de U. Soit i et j deux éléments de $[\![1, n]\!]$. $\frac{\partial f_n}{\partial x_i}(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_i^2} \sum_{k=1}^{n} x_k$.

Si j est différent de i : $\frac{\partial^2 f_n}{\partial x_j\, \partial x_i}(X) = -\frac{1}{x_j^2} - \frac{1}{x_i^2} \times 1 = -\frac{1}{x_i^2} - \frac{1}{x_j^2}$.

Si j est égal à i : $\frac{\partial^2 f_n}{\partial x_j\, \partial x_i}(X) = -\frac{1}{x_i^2} + \frac{2}{x_i^3} \sum_{k=1}^{n} x_k - \frac{1}{x_i^2} \times 1 = -\frac{2}{x_i^2} + \frac{2}{x_i^3} \sum_{k=1}^{n} x_k$.

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \forall X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U,\ \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_j\,\partial x_i}(X) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x_i^2} + \dfrac{2}{x_i^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k & \text{si } i = j \\ -\dfrac{1}{x_i^2} - \dfrac{1}{x_j^2} & \text{si } i \neq j \end{cases}.}$$

b) Soit A un point critique de f_n. Il existe un réel strictement positif a tel que A soit le n-uplet $(a, a, \dots, a)$.

$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \dfrac{\partial^2 f_n}{\partial x_i^2}(A) = -\dfrac{2}{a^2} + \dfrac{2}{a^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a = -\dfrac{2}{a^2} + \dfrac{2}{a^3}\,(n\,a) = n\,\dfrac{2}{a^2} - \dfrac{2}{a^2}$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f_n}{\partial x_j\,\partial x_i}(A) = -\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{a^2} = -\dfrac{2}{a^2}$.

$$\frac{\partial^2 f_n}{\partial x_j\,\partial x_i}(A) = \begin{cases} n\,\dfrac{2}{a^2} - \dfrac{2}{a^2} & \text{si } i = j \\ -\dfrac{2}{a^2} & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

Alors la Hessienne $\nabla^2 f_n(A) = \left(\dfrac{\partial^2 f_n}{\partial x_j\,\partial x_i}(A)\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ de f_n en A est : $n\,\dfrac{2}{a^2}\,I_n - \dfrac{2}{a^2}\,J_n$. $\nabla^2 f_n(A) = \dfrac{2}{a^2}\big(n\,I_n - J_n\big)$.

$$\boxed{\text{La Hessienne de } f_n \text{ en un de ses points critiques est proportionnelle à } K_n = n\,I_n - J_n.}$$

4) a) Notons (par anticipation !) v_n la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Toute les colonnes de J_n sont égales à v_n et v_n n'est pas nulle. Le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par les colonnes de J_n est donc de dimension 1. Ainsi :

$$\boxed{J_n \text{ est une matrice de rang } 1.}$$

J_n est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le rang est strictement inférieur à n car n est supérieur ou égal à 2. J_n n'est donc pas inversible. Alors 0 est une valeur propre de J_n et le sous-espace propre associé est de dimension $n - \operatorname{rg} J_n$ donc de dimension $n-1$.

$$\boxed{0 \text{ est valeur propre de } J_n \text{ et la dimension du sous-espace propre associé est } n-1.}$$

b) $J_n\,v_n = J_n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n\,v_n$ et v_n n'est pas nul(le).

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Le vecteur } v_n, \text{ élément de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \text{ dont tous les coefficients sont égaux à 1 est un vecteur propre de } J_n \\ \text{associé à la valeur prorpre } n.\end{array}}$$

c) 0 est une valeur propre de J_n dont le sous-espace propre associé est de dimension $n-1$ et n est une valeur propre de J_n dont le sous-espace propre associé est de dimension supérieure ou égale à 1. Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres de J_n est inférieure ou égale à n :

1. 0 et n sont les seules valeurs propres de J_n.
2. Le sous-espace propre de J_n associé à la valeur propre n est de dimension 1.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } J_n \text{ sont } 0 \text{ et } n.}$$

Montrons que les valeurs propres de K_n sont 0 et n.

Version 1 Soit λ une valeur propre de K_n. Il existe un élément non nul X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $K_n\,X = \lambda\,X$.

Alors $\lambda\,X = K_n\,X = (n\,I_n - J_n)\,X = n\,X - J_n\,X$. Donc $J_n\,X = (n-\lambda)\,X$. Comme X n'est pas nul, $n-\lambda$ est une valeur propre de J_n. Ainsi $n-\lambda = 0$ ou $n-\lambda = n$. Donc $\lambda = n$ ou $\lambda = 0$. Alors $\operatorname{Sp} K_n \subset \{0, 1\}$.

v_n n'est pas nul et $K_n\,v_n = (n\,I_n - J_n)\,v_n = n\,I_n\,v_n - J_n\,v_n = n\,v_n - n\,v_n = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = 0\,v_n$ donc 0 est une valeur propre de K_n.

Soit X un vecteur propre de J_n associé à la valeur propre 0.

X n'est pas nul et $K_n\,X = (n\,I_n - J_n)\,X = n\,I_n\,X - J_n\,X = n\,X$ donc n est une valeur propre de K_n.

Finalement $\operatorname{Sp} K_n = \{0, n\}$.

Version 2 $\operatorname{Sp} J_n = \{0, n\}$, $\dim \text{SEP }(J_n, 0) = n-1$ et $\dim \text{SEP }(J_n, n) = 1$. Don J_n est diagonalisable (normal pour une matrice symétrique à coefficient réels).

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_{n-1})$ une base de SEP $(J_n, 0) = n-1$ et (X_n) une base de SEP $(J_n, n) = 1$.

$\mathcal{B} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de J_n respectivement associés aux valeurs propres 0, 0, ..., 0, n car $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \text{SEP }(J_n, 0) \oplus \text{SEP }(J_n, n)$.

Notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathcal{B}$. P est inversible et $P^{-1}J_nP$ est la matrice diagonale $D_n = \operatorname{Diag}(0, 0, \dots, 0, n)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Alors $P^{-1}K_nP = P^{-1}(n\,I_n - J_n)P = n\,P^{-1}I_nP - P^{-1}J_nP = n\,I_n - \operatorname{Diag}(0, 0, \cdots, 0, n)$.

$P^{-1}K_nP = \operatorname{Diag}(n, n, \cdots, n, n) - \operatorname{Diag}(0, 0, \cdots, 0, n) = \operatorname{Diag}(n, n, \cdots, n, 0)$.

K_n est donc semblable à la matrice diagonale $\operatorname{Diag}(n, n, \cdots, n, 0)$. Ces deux matrices ont même valeurs propres. Ainsi les valeurs propres de K_n sont 0 et n.

$$\boxed{\text{les valeurs propres de } K_n \text{ sont } 0 \text{ et } n.}$$

Exercice Retrouver ce résultat en remarquant que K_n est symétrique à coefficients réels et que $X^2 - n\,X$ en est un polynôme annulateur.

Remarque SEP $(K_n, 0) =$ SEP (J_n, n) *et* SEP $(K_n, n) =$ SEP $(J_n, 0)$.

d) Soit $A = (a, a, \dots, a)$ un point critique de f_n. La hessienne $\nabla^2 f_n(A)$ est proportionnelle à K_n.

Plus précisément $\nabla^2 f_n(A) = \dfrac{2}{a^2}\,K_n$.

Les valeurs propres de $\nabla^2 f_n(A)$ sont donc 0 et $\dfrac{2}{a^2}\,n$. Elles sont donc positives ou nulles sans être strictement positives.

La Hessienne de f_n en un de ses points critiques ne permet pas de savoir si f_n admet un extremum local en ce point.

5) a) Soit (x_1, x_2) un élément de $\mathbb{R}^2$.

$(x_1 + x_2)^2 - 4\,x_1\,x_2 = x_1^2 + x_2^2 + 2\,x_1\,x_2 - 4\,x_1\,x_2 = x_1^2 + x_2^2 - 2\,x_1\,x_2 = (x_1 - x_2)^2 \geqslant 0$. Donc $(x_1 + x_2)^2 \geqslant 4\,x_1\,x_2$.

$$\boxed{\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ (x_1 + x_2)^2 \geqslant 4\,x_1\,x_2.}$$

b) Soit $A = (a, a)$ un point critique de f_2. Soit (x_1, x_2) un élément de $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

$$f_2(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1}\right) = 1 + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + 1 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 2\,x_1\,x_2}{x_1\,x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1\,x_2}.$$

Or $(x_1+x_2)^2 \geqslant 4\,x_1\,x_2$ et $x_1\,x_2 > 0$ donc $f_2(x_1,x_2) = \dfrac{(x_1+x_2)^2}{x_1\,x_2} \geqslant 4 = (2\,a)\left(\dfrac{2}{a}\right) = (a+a)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a}\right) = f_2(A)$.

$\forall (x_1,x_2) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[,\ f_2(x_1,x_2) \geqslant f_2(A)$ Donc f_2 admet en A un minimum global égale à 4.

$$\boxed{f_2 \text{ admet sur }]0,+\infty[\times]0,+\infty[\text{ un minimum global en tous ses points critiques qui vaut } 4.}$$

6) L'inégalité de Cauchy Schwarz appliquée dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique indique que :

$\forall (a_1,a_2,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall (b_1,b_2,\dots,b_n) \in \mathbb{R}^n,\ \left|\sum\limits_{k=1}^n a_k\,b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{k=1}^n a_k^2}\sqrt{\sum\limits_{k=1}^n b_k^2}$ ou $\left(\sum\limits_{k=1}^n a_k\,b_k\right)^2 \leqslant \sum\limits_{k=1}^n a_k^2 \sum\limits_{k=1}^n b_k^2$.

Soit $A = (a,a,\dots,a))$ un point critique de f_n. Notons que $f(A) = (n\,a)\left(n\,\dfrac{1}{a}\right) = n^2$.

Soit $X = (x_1,x_2,\dots,x_n)$ un élément de U.

Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $(\sqrt{x_1},\sqrt{x_2},\dots,\sqrt{x_n})$ et $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x_1}},\dfrac{1}{\sqrt{x_2}},\dots,\dfrac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$. On obtient :

$$\left(\sum_{k=1}^n \sqrt{x_k}\,\frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n (\sqrt{x_k})^2\right)\left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2\right) = \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}\right) = f(x_1,x_2,\dots,x_n) = f(X).$$

Or : $\left(\sum\limits_{k=1}^n \sqrt{x_k}\,\dfrac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2 = \left(\sum\limits_{k=1}^n 1\right)^2 = n^2 = f(A)$. Donc $f(A) \leqslant f(X)$.

Donc $\forall X \in U,\ n^2 = f(A) \leqslant f(X)$. f admet en A un minimum global qui vaut n^2.

$$\boxed{f_n \text{ admet sur } U \text{ un minimum global en tous ses points critiques qui vaut } n^2.}$$

EXERCICE 2

---

1) u est un vecteur non nul de E puisque sa norme est 1, donc $\mathrm{Vect}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 1.

E étant un espace vectoriel euclidien de dimension n, $(\mathrm{Vect}(u))^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

$$\boxed{\text{La dimention de } (\mathrm{Vect}(u))^\perp \text{ est } n-1.}$$

2) • Soit x un élément de E. $f_\lambda(x) = \lambda\,(x\,|\,u)\,u + x$ est un élément de E comme combinaison linéaire de deux éléments de E.

f_λ est une application de E dans E.

• Soient x et y deux éléments de E et soit λ un réel.

$f_\lambda(\alpha\,x+y) = \lambda\,(\alpha\,x+y\,|\,u)\,u + \alpha\,x + y = \lambda\,\big(\alpha\,(x\,|\,u) + (y\,|\,u)\big)\,u + \alpha\,x + y = \lambda\,\alpha\,(x\,|\,u)\,u + \lambda\,(y\,|\,u)\,u + \alpha\,x + y$.

$f_\lambda(\alpha\,x+y) = \alpha\,(\lambda\,(x\,|\,u)\,u + x) + \lambda\,(y\,|\,u)\,u + y = \alpha\,f_\lambda(x) + f_\lambda(y)$.

$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ f_\lambda(\alpha\,x+y) = \alpha\,f_\lambda(x) + f_\lambda(y)$. f_λ est donc linéaire. Finalement :

$$\boxed{f_\lambda \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

3) Il s'agit de montre que $f_\lambda^2 - (\lambda+2)\,f_\lambda + (\lambda+1)\,\mathrm{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Soit x un élément de E. $f_\lambda^2(x) = f_\lambda\left(f_\lambda(x)\right) = f_\lambda\left(\lambda\,(x\,|\,u)\,u + x\right) = \lambda\,(x\,|\,u)\,f_\lambda(u) + f_\lambda(x)$.

$f_\lambda^2(x) = \lambda\,(x\,|\,u)\big(\lambda\,(u\,|\,u)\,u + u\big) + f_\lambda(x) = \lambda\,(x\,|\,u)\big((\lambda+1)\,u\big) + f_\lambda(x) = (\lambda+1)\,(\lambda\,(x\,|\,u)\,u) + f_\lambda(x)$.

$f_\lambda^2(x) = (\lambda+1)\,(\lambda\,(x\,|\,u)\,u + x) - (\lambda+1)\,x + f_\lambda(x) = (\lambda+1)\,f_\lambda(x) - (\lambda+1)\,x + f_\lambda(x) = (\lambda+2)\,f_\lambda(x) - (\lambda+1)\,x$.

Donc $f_\lambda^2(x) - (\lambda+2)\,f_\lambda(x) + (\lambda+1)\,x = 0_E$ ou $(f_\lambda^2 - (\lambda+2)\,f_\lambda + (\lambda+1)\,\mathrm{Id}_E)(x) = 0_E$ et ceci pour tout élément x de E.

Ainsi $f_\lambda^2 - (\lambda+2)\,f_\lambda + (\lambda+1)\,\mathrm{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Alors :

$$\boxed{X^2 - (\lambda+2)\,X + (\lambda+1) \text{ est un polynôme annulateur de } f_\lambda.}$$

4) a) Soient x et y deux éléments de E.

$(f_\lambda(x)\,|\,y) = (\lambda\,(x\,|\,u)\,u + x\,|\,y) = \lambda\,(x\,|\,u)\,(u\,|\,y) + (x\,|\,y) = \lambda\,(x\,|\,u)\,(y\,|\,u) + (x\,|\,y)$.

$(x\,|\,f_\lambda(y)) = (x\,|\,\lambda\,(y\,|\,u)\,u + y) = \lambda\,(y\,|\,u)(x\,|\,u) + (x\,|\,y) = \lambda\,(x\,|\,u)\,(y\,|\,u) + (x\,|\,y)$.

Donc $(f_\lambda(x)\,|\,y) = (x\,|\,f_\lambda(y))$ et ceci pour tout couple (x,y) d'éléments de E. Donc :

$$\boxed{f_\lambda \text{ est un endomorphisme symétrique de } E.}$$

b) $f_\lambda(u) = \lambda\,(u\,|\,u)\,u + u = \lambda\,u + u = (\lambda+1)\,u$ car $(u\,|\,u) = 1$ puisque u est unitaire.

Pour tout élément v de $(\mathrm{Vect}(u))^\perp$, $(v\,|\,u) = 0$ donc pour tout élément v de $(\mathrm{Vect}(u))^\perp$, $f_\lambda(v) = \lambda\,(v\,|\,u)\,u + v = v$.

$$\boxed{f_\lambda(u) = (\lambda+1)\,u \text{ et } f_\lambda(v) = v \text{ pour tout élément de } (\mathrm{Vect}(u))^\perp.}$$

c) $f_\lambda(u) = (\lambda+1)\,u$ et u est non nul donc $\lambda+1$ est une valeur propre de f_λ et le sous-espace propre associé contient la droite vectorielle engendrée par u.

$f_\lambda(v) = v$ pour tout élément de $(\mathrm{Vect}(u))^\perp$ et $(\mathrm{Vect}(u))^\perp$ contient un vecteur non nul car c'est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ que $n-1$ n'est pas nul.

Ainsi 1 est une valeur propre de f_λ et le sous-espace propre associé contient $(\mathrm{Vect}(u))^\perp$.

Notons que $\lambda+1$ et 1 sont distincts car λ n'est pas nul.

Dans ces conditions $\lambda+1$ et 1 sont deux valeurs propres distinctes de f_λ et les sous-espaces propres associés sont respectivement de dimension supérieure à 1 et à $n-1$.

La somme des dimensions des sous-espaces propres de f_λ étant inférieure ou à égale à la dimension n de E :

1. $\lambda+1$ et 1 sont les seules valeurs propres de f_λ.

2. La dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda+1$ est 1 et la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est $n-1$.

Mieux le sous-espace propre SEP $(f_\lambda, \lambda+1)$ de f_λ associé à la valeur propre $\lambda+1$ est de dimension 1 et contient la droite vectorielle engendrée par u. Alors SEP $(f_\lambda, \lambda+1) = \mathrm{Vect}(u)$.

Le sous-espace propre SEP $(f_\lambda, 1)$ de f_λ associé à la valeur propre 1 est de dimension $n-1$ et contient $(\mathrm{Vect}(u))^\perp$ qui est de dimension $n-1$. Alors SEP $(f_\lambda, 1) = (\mathrm{Vect}(u))^\perp$.

$$\boxed{\begin{array}{l}f_\lambda \text{ possède exactement deux valeurs propres distinctes : } \lambda+1 \text{ et } 1. \text{ Le sous-espace propre de } f \text{ associé à}\\ \text{la valeur propre } \lambda+1 \text{ est } \mathrm{Vect}(u). \text{ Le sous-espace propre } f \text{ associé à la valeur propre 1 est } (\mathrm{Vect}(u))^\perp.\end{array}}$$

5) a) • f_{-1} est un endomorphisme de E.

- De plus, d'après **3)**, $0_{\mathcal{L}(E)} = f_{-1}^2 - (-1+2)\, f_{-1} + (-1+1)\,\mathrm{Id}_E = f_{-1}^2 - f_{-1}$. Donc $f_{-1}^2 = f_{-1}$. Ainsi :

$$\boxed{f_{-1} \text{ est un projecteur.}}$$

b) f_{-1} est la projection sur $\mathrm{Im}\, f_{-1} = \mathrm{Ker}(f_{-1} - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, f_{-1}$.

Or $\mathrm{Ker}(f_{-1} - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{SEP}\ (f_{-1}, 1) = (\mathrm{Vect}(u))^{\perp}$ et $\mathrm{Ker}\, f_{-1} = \mathrm{SEP}\ (f_{-1}, 0) = \mathrm{SEP}\ (f_{-1}, (-1)+1) = \mathrm{Vect}(u)$. Donc :

$$\boxed{f_{-1} \text{ est le projecteur orthogonal sur } (\mathrm{Vect}(u))^{\perp}.}$$

EXERCICE 3

---

1) a) Posons $\forall t \in \mathbb{R},\ f_Y(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. f_Y est une densité de Y et de X.

Notons F_Y la fonction de répartition de Y. $\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \dfrac{x}{a} & \text{si } x \in [0, a] \\ 1 & \text{si } x \in]a, +\infty[\end{cases}$.

Notons F_{-Y} la fonction de répartition de $-Y$. $-Y$ prend ses valeurs dans $]-a, 0]$.

Donc $\forall x \in]-\infty, -a],\ F_{-Y}(x) = 0$ et $\forall x \in [0, +\infty[,\ F_{-Y}(x) = 1$.

Soit x un élément de $]-a, 0[$.

$F_{-Y}(x) = P(-Y \leqslant x) = P(Y \geqslant -x) = 1 - P(Y < -x) = 1 - P(Y \leqslant -x)$ car Y est une variable aléatoire à densité.

$F_{-Y}(x) = 1 - F_Y(-x) = 1 - \left(\dfrac{-x}{a}\right)$ car $-x$ appartient à $]0, a[$. Finalement : $F_{-Y}(x) = \dfrac{x-(-a)}{0-(-a)}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{-Y}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, -a] \\ \dfrac{x-(-a)}{0-(-a)} & \text{si } x \in]-a, 0[\\ 1 & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}.$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[-a, 0]$ ou sur $]-a, 0]$ ou sur $]-a, 0[$! !

$$\boxed{\text{La fonction } f_{-Y} \text{ définie par } \forall t \in \mathbb{R},\ f_{-Y}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} & \text{si } x \in [-a, 0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ est une densité de } -Y.}$$

$$\boxed{\text{La fonction } \widehat{f}_{-Y} \text{ définie par } \forall t \in \mathbb{R},\ \widehat{f}_{-Y}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} & \text{si } x \in]-a, 0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ est encore une densité de } -Y.}$$

b) X et $-Y$ sont deux variables aléatoires à densité indépendantes car X et Y sont indépendantes.

f_X est une densité de X bornée sur $\mathbb{R}$ et f_{-Y} est une densité de $-Y$ (également bornée sur $\mathbb{R}$).

Le théorème de convolution indique alors que $X - Y$ est une variables aléatoire à densité et que

$g : x \to \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, f_{-Y}(x-t)\, \mathrm{d}t$ en est une densité définie sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, f_{-Y}(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a \frac{1}{a}\, f_{-Y}(x-t)\,\mathrm{d}t.$

Le changement de variable $u = x - t$ ($t \to x - t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$) donne :

$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_x^{x-a} f_{-Y}(u)\,(-1)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a}\int_{x-a}^{x} f_{-Y}(u)\,\mathrm{d}u.$

Rappelons que $\forall t \in \mathbb{R},\ f_{-Y}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} & \text{si } x \in [-a, 0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

Notons que si $x \in]-\infty, -a[$ alors $[x-a, x] \subset]-\infty, -a[$ et si $x \in]a, +\infty[$ alors $[x-a, x] \subset]0, +\infty[$.

Par conséquent : $\forall x \in]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[,\ g(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{x-a}^{x} 0\,\mathrm{d}u = 0.$

$\forall x \in [-a, 0[,\ g(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{-a}^{x} \frac{\mathrm{d}u}{a} = \frac{1}{a^2}\big(x - (-a)\big) = \frac{a+x}{a^2} = \frac{a-|x|}{a^2}$ (si $x \in [-a, 0[,\ x - a < -a$).

$\forall x \in [0, a],\ g(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{x-a}^{0} \frac{\mathrm{d}u}{a} = \frac{1}{a^2}\big(0 - (x-a)\big) = \frac{a-x}{a^2} = \frac{a-|x|}{a^2}$ (si $x \in [0, a],\ x - a \in [-a, 0]$ et $x \geqslant 0$).

$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} \dfrac{a-|x|}{a^2} & \text{si } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ définie par} : \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} \dfrac{a-|x|}{a^2} & \text{si } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ est une densité de } X - Y.}$$

2) a) $\forall x \in]-\infty, 0[,\ H(x) = P(Z \leqslant x) = P(|X-Y| \leqslant x) = 0.$

$\forall x \in [0, +\infty[,\ H(x) = P(Z \leqslant x) = P(|X-Y| \leqslant x) = P(-x \leqslant X - Y \leqslant x) = G(x) - G(-x).$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ H(x) = \begin{cases} G(x) - G(-x) & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.}$$

b) Notons que g est une densité de $X - Y$ continue sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction de répartition G de $X - Y$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ G'(x) = g(x)$.

Par composition : $x \to G(-x)$ est de de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par différence $x \to G(x) - G(-x)$ est de de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur sur $[0, +\infty[$. H est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ car elle est nulle sur cet intervalle.

H est donc au moins dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$.

Remarque *H est de classe $\mathcal{C}^1$ SUR $]-\infty, 0[$ et Sur $[0, +\infty[$. Ceci montre qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et qu'elle est continue à droite en 0.*

De plus $\lim\limits_{x \to 0^-} H(x) = 0 = G(0) - G(-0) = H(0)$; H est donc continue à gauche en 0. Finalement H est continue en 0. Alors H est continue en tout point de $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Cela suffit pour dire que $Z = |X - Y|$ est une variable aléatoire à densité. Ce qui n'était pas demandé car admis dans le texte.

$\forall x \in]-\infty, 0[,\ H'(x) = 0.$

On a aussi : $\forall x \in]0, +\infty[,\ H'(x) = G'(x) + G'(-x) = g(x) + g(-x) = 2g(x)$ (g est paire sur $\mathbb{R}$).

Précisons. $\forall x \in]0, a],\ H'(x) = 2\,g(x) = 2\,\dfrac{a-|x|}{a^2} = 2\,\dfrac{a-x}{a^2} = \dfrac{2(a-x)}{a^2}$ et $\forall x \in]a, +\infty[,\ H'(x) = 0.$

Finalement : $\forall x \in]0, a],\ H'(x) = \dfrac{2(a-x)}{a^2}$ et $\forall x \in]-\infty, 0[\cup]a, +\infty[,\ H'(x) = 0.$

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} \dfrac{2(a-x)}{a^2} & \text{si } x \in [0,a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

h est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec H' sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. Ainsi h est une densité de Z.

$$\boxed{\text{La fonction } h \text{ définie par : } \forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} \dfrac{2(a-x)}{a^2} & \text{si } x \in [0,a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ est une densité de } Z = |X-Y|.}$$

3) D'une pierre plusieurs coups. Soit k dans $\mathbb{N}$.

Montrons que Z possède un moment d'ordre k, c'est à dire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k\, h(t)\, \mathrm{d}t$ converge.

$t \to t^k\, h(t)$ est nulle sur $]-\infty, 0[$ et sur $]a, +\infty[$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t^k\, h(t)\, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} t^k\, h(t)\, \mathrm{d}t$ convergent et valent 0.

$\forall t \in [0,a],\ t^k\, h(t) = t^k\, \dfrac{2(a-t)}{a^2}$. Ainsi $t \to t^k\, h(t)$ est continue sur $[0,a]$ donc $\displaystyle\int_0^a t^k\, h(t)\, \mathrm{d}t$ existe.

Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k\, h(t)\, \mathrm{d}t$ converge et vaut $\displaystyle\int_0^a t^k\, h(t)\, \mathrm{d}t$. Donc Z possède un moment d'ordre k qui vaut $\displaystyle\int_0^a t^k\, h(t)\, \mathrm{d}t$.

Le cours montre alors que Z^k possède une espérance qui vaut $\displaystyle\int_0^a t^k\, h(t)\, \mathrm{d}t$.

$$E(Z^k) = \int_0^a t^k\, h(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^a t^k\, \frac{2(a-t)}{a^2}\, \mathrm{d}t = \frac{2}{a^2} \int_0^a (a\, t^k - t^{k+1})\, \mathrm{d}t = \frac{2}{a^2} \left[a\, \frac{t^{k+1}}{k+1} - \frac{t^{k+2}}{k+2} \right]_0^a.$$

$$E(Z^k) = \frac{2}{a^2} \left(a\, \frac{a^{k+1}}{k+1} - \frac{a^{k+2}}{k+2} \right) = 2\, a^k \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = \frac{2\, a^k}{(k+1)(k+2)}.$$

En particulier $E(Z)$ existe et vaut $\dfrac{2\,a}{6}$ ou $\dfrac{a}{3}$, et $E(Z^2)$ existe et vaut $\dfrac{2\,a^2}{12}$ ou $\dfrac{a^2}{6}$.

Alors Z possède une variance qui vaut $\dfrac{a^2}{6} - \left(\dfrac{a}{3}\right)^2$ ou $\dfrac{a^2}{18}$.

$$\boxed{Z \text{ possède une espérance et une variance. } E(Z) = \frac{a}{3} \text{ et } V(Z) = \frac{a^2}{18}.}$$

4) Notons que si U est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[0,1[$ alors $a\,U$ est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[0,a[$.

```
Function z(a:real):real; Var x,y:real; Begin
x:=a*random;y:=a*random;z:=abs(x-y); End;
```

PROBLÈME

Préliminaire : un résultat utile pour la partie 2.

---

1) a) Soit k un élément de $\mathbb{N}^*$. $t \to \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est décroissante sur $[k, k+1]$ donc : $\forall t \in [k, k+1],\ \dfrac{1}{\sqrt{k+1}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{t}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

$k \leqslant k+1$ et $t \to \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est continue sur $[k, k+1]$. En intégrant ce qui précède il vient :

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} = \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{k+1}} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot}$$

b) Soit n dans $[\![2, +\infty[\![$ En utilisant ce qui précède on obtient par sommation :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot$ Ce qui donne encore : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot$

$$\boxed{\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot}$$

2) Soit n un élément de $[\![2, +\infty[\![$. $\displaystyle\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \Big[2\sqrt{t}\Big]_1^n = 2\sqrt{n} - 2.$

En utilisant **1) b)** on a alors : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\sqrt{n} - 2 \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot$

Ainsi $\displaystyle 2\sqrt{n} - 2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\sqrt{n} - 1\cdot$

Notons que ceci vaut encore pour $n = 1$ car $2\sqrt{1} - 2 = 0$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1$, $2\sqrt{1} - 1 = 1$. Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2\sqrt{n} - 2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\sqrt{n} - 1.}$$

Remarque *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. $\displaystyle 2\sqrt{n} - 2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\sqrt{n} - 1.$

En divisant par $2\sqrt{n}$ *on obtient :* $\displaystyle 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}\cdot$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$ *et* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}\right) = 1$ *il vient par encadrement :* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) = 1.$

Alors : $\displaystyle\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}.}$

Partie 1 : Convergence complète.

---

1) Soit ε un réel strictement positif.

Comme la suite (X_n) converge complètement vers X, la série terme général $P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon)$ converge.

Alors $\displaystyle\lim_{n\to 0} P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = 0$ et ceci pour tout réel ε strictement positif. Donc (X_n) converge en probabilité vers X.

$$\boxed{\text{Si } (X_n) \text{ converge complètement vers } X \text{ alors } (X_n) \text{ converge en probabilité vers } X.}$$

2) Nous comprendrons que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, Y_n suit la loi de Poisson de paramètre $\dfrac{1}{n}\cdot$

a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $Y_n(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ P(Y_n = k) = \dfrac{(\frac{1}{n})^k}{k!}\, e^{-\frac{1}{n}}$.

$P(Y_n \geqslant 1) = 1 - P(Y_n < 1) = 1 - P(Y_n = 0) = 1 - e^{-\frac{1}{n}}$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ P(Y_n \geqslant 1) = 1 - e^{-\frac{1}{n}}.}$$

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Soit ε un réel strictement positif.

L'événement $\{Y_n \geqslant \varepsilon\}$ est contenu dans l'événement $\{Y_n > 0\}$ qui est lui même égal à l'événement $\{Y_n \geqslant 1\}$.

Par croissance de la probabilité P on a : $P(Y_n \geqslant \varepsilon) \leqslant P(Y_n > 0) = P(Y_n \geqslant 1) = 1 - e^{-\frac{1}{n}}$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*, \text{ et pour tout réel } \varepsilon \text{ strictement positif, } P(Y_n \geqslant \varepsilon) \leqslant 1 - e^{-\frac{1}{n}}.}$$

c) Soit ε un réel strictement positif.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant P(|Y_n - 0| \geqslant \varepsilon) = P(|Y_n| \geqslant \varepsilon) = P(Y_n \geqslant \varepsilon) \leqslant 1 - e^{-\frac{1}{n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right) = 0$.

Par encadrement on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|Y_n - 0| \geqslant \varepsilon) = 0$ et ceci pour tout réel ε strictement positif. Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite } (Y_n) \text{ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine nulle.}}$$

d) $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$. Alors $e^{-x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -x$. Ceci donne $1 - e^{-x} \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Par conséquent $P(|Y_n - 0| \geqslant 1) = P(Y_n \geqslant 1) = 1 - e^{-\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}\cdot$ Or la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ est divergente et à termes positifs.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général $P(|Y_n - 0| \geqslant 1)$ est divergente. Dans ces condition la suite (Y_n) ne peut converger complètement vers la variable aléatoire certaine nulle.

$$\boxed{\text{La suite } (Y_n) \text{ ne converge pas complètement vers la variable aléatoire certaine nulle.}}$$

Partie 2 : étude d'un exemple.

Disons dès le départ que la démarche poposée ne permet pas de montrer le résultat final.

1) a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. S_n est une variable aléatoire finie donc elle possède une espérance et une variance.

Par linéarité de l'espérance : $E(S_n) = E\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} B_k\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(B_k) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}\cdot$

Supposons $n \geqslant 2$. $V(S_n) = V\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} B_k\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} V(B_k) + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \operatorname{cov}(B_i, B_j)$.

Or les variables de la suite $(B_k)_{k\geqslant 1}$ sont deux à deux indépendantes donc : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i<j \Rightarrow \operatorname{cov}(B_i,B_j) = 0$.

Notons aussi que : $\forall k \in [\![1,n]\!],\ V(B_k) = \dfrac{1}{\sqrt{k}}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{k}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{k}} - \dfrac{1}{k}\cdot$

Finalement : $V(S_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} V(B_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{\sqrt{k}} - \dfrac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\cdot$

Observons que ceci vaut encore pour $n = 1$ car $V(B_1) = \frac{1}{\sqrt{1}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{1}$! !

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ et } V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\cdot}$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(S_n) - V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant 0$. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(S_n) - V(S_n) \geqslant 0$. Alors :

$$\boxed{\text{pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}^*,\ V(S_n) \leqslant E(S_n).}$$

2) a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Notons que $E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ donc $E(S_n)$ n'est pas nul(le).

$Z_n = \frac{S_n}{E(S_n)}\cdot$ S_n possède une espérance et une variance donc il en est de même pour Z_n.

$E(Z_n) = E\left(\frac{S_n}{E(S_n)}\right) = \frac{1}{E(S_n)}\, E(S_n) = 1$. $V(Z_n) = V\left(\frac{S_n}{E(S_n)}\right) = \left(\frac{1}{E(S_n)}\right)^2 V(S_n)$.

Notons que $V(Z_n) \leqslant \left(\frac{1}{E(S_n)}\right)^2 E(S_n) = \frac{1}{E(S_n)}$ car $V(S_n) \leqslant E(S_n)$ et $\left(\frac{1}{E(S_n)}\right)^2 \geqslant 0$.

Soit ε un réel strictement positif. Z_n possède une variance donc nous pouvons lui appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Alors $P(|Z_n - 1| \geqslant \varepsilon) = P(|Z_n - E(Z_n)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(Z_n)}{\varepsilon^2} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2\, E(S_n)}\cdot$

$$\boxed{\text{Pour tout réel strictement positif } \varepsilon \text{ et pour tout } n \text{ élément de } \mathbb{N}^* : P(|Z_n - 1| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2\, E(S_n)}\cdot}$$

b) Soit ε un réel strictement positif. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant P(|Z_n - 1| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2\, E(S_n)}\cdot$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. En utilisant le préliminaire on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2\sqrt{n} - 1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot$

Comme $\lim_{n \to +\infty} (2\sqrt{n} - 1) = +\infty$ il vient : $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ ou $\lim_{n \to +\infty} E(S_n) = +\infty$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant P(|Z_n - 1| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2\, E(S_n)}$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\varepsilon^2\, E(S_n)} = 0$.

On obtient alors par encadrement $\lim_{n \to +\infty} P(|Z_n - 1| \geqslant \varepsilon) = 0$ et ceci pour tout réel ε strictement positif.

$$\boxed{(Z_n) \text{ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à } 1.}$$

3) Dans la remarque de la question 2) du préliminaire nous avons montré que $E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

Ainsi $\frac{1}{E(S_n)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}\cdot$ Alors $\frac{1}{E(S_{n^4})} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n^4}} = \frac{1}{2\,n^2}\cdot$

Comme $\frac{1}{2\,n^2}$ est une série convergente à termes positifs, les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général $\frac{1}{E(S_{n^4})}$ converge.

Soit ε un réel strictement positif.

La série de terme général $\dfrac{1}{\varepsilon^2\, E(S_{n^4})}$ converge et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant P(|Z_{n^4} - 1| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon^2\, E(S_{n^4})}$.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général $P(|Z_{n^4} - 1| \geqslant \varepsilon)$ converge.

$$\boxed{\text{Pour tout réel strictement positif } \varepsilon, \text{ la série de terme général } P(|S_{n^4} - 1| \geqslant \varepsilon) \text{ converge.}}$$

4) a) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et soit ω un élément de Ω.

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ B_k(\omega) \geqslant 0$. Comme $e_n^4 \leqslant n < (e_n+1)^4$:

$0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{e_n^4} B_k(\omega) \leqslant \sum_{k=1}^{n} B_k(\omega) \leqslant \sum_{k=1}^{(e_n+1)^4} B_k(\omega)$ et ainsi $0 \leqslant S_{e_n^4}(\omega) \leqslant S_n(\omega) \leqslant S_{(e_n+1)^4}(\omega)$.

$\forall \omega \in \Omega,\ 0 \leqslant S_{e_n^4}(\omega) \leqslant S_n(\omega) \leqslant S_{(e_n+1)^4}(\omega)$. Donc $0 \leqslant S_{e_n^4} \leqslant S_n \leqslant S_{(e_n+1)^4}$.

Par croissance de l'espérance on a encore $0 \leqslant E(S_{e_n^4}) \leqslant E(S_n) \leqslant E(S_{(e_n+1)^4})$.

Notons que $E(S_{e_n^4}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{e_n^4} \frac{1}{\sqrt{k}} > 0$. Alors $0 < E(S_{e_n^4}) \leqslant E(S_n) \leqslant E(S_{(e_n+1)^4})$.

Donc $0 < \dfrac{1}{E(S_{(e_n+1)^4})} \leqslant \dfrac{1}{E(S_n)} \leqslant \dfrac{1}{E(S_{e_n^4})}$.

Comme $0 \leqslant S_{e_n^4} \leqslant S_n \leqslant S_{(e_n+1)^4}$ il vient par produit : $\dfrac{S_{e_n^4}}{E(S_{(e_n+1)^4})} \leqslant \dfrac{S_n}{E(S_n)} \leqslant \dfrac{S_{(e_n+1)^4}}{E(S_{e_n^4})}$.

Ce qui donne encore : $\dfrac{S_{e_n^4}}{E(S_{(e_n+1)^4})} \leqslant Z_n \leqslant \dfrac{S_{(e_n+1)^4}}{E(S_{e_n^4})}$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ \frac{S_{e_n^4}}{E(S_{(e_n+1)^4})} \leqslant Z_n \leqslant \frac{S_{(e_n+1)^4}}{E(S_{e_n^4})}.}$$

b) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$\dfrac{S_{e_n^4}}{E(S_{(e_n+1)^4})} = \dfrac{E(S_{e_n^4})\, Z_{e_n^4}}{E(S_{(e_n+1)^4})} = \dfrac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})}\, Z_{e_n^4}$ et $\dfrac{S_{(e_n+1)^4}}{E(S_{e_n^4})} = \dfrac{E(S_{(e_n+1)^4})\, Z_{(e_n+1)^4}}{E(S_{e_n^4})} = \dfrac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})}\, Z_{(e_n+1)^4}$.

Comme $\dfrac{S_{e_n^4}}{E(S_{(e_n+1)^4})} \leqslant Z_n \leqslant \dfrac{S_{(e_n+1)^4}}{E(S_{e_n^4})}$: $\dfrac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})}\, Z_{e_n^4} \leqslant Z_n \leqslant \dfrac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})}\, Z_{(e_n+1)^4}$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ \frac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})}\, Z_{e_n^4} \leqslant Z_n \leqslant \frac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})}\, Z_{(e_n+1)^4}.}$$

5) a) Rappelons une fois encore que $E(S_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e_n^4 = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (e_n+1)^4 = +\infty$ car $\forall n \in \mathbb{N},\ e_n^4 \leqslant n < (e_n+1)^4$.

Ainsi $E(S_{e_n^4}) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{e_n^4} = 2\, e_n^2$ et $E((e_n+1)^4) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{(e_n+1)^4} = 2\,(e_n+1)^2$.

$\dfrac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\,(e_n+1)^2}{2\,(e_n)^2} = \dfrac{(e_n+1)^2}{(e_n)^2} = \left(1 + \dfrac{1}{e_n}\right)^2$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e_n = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{e_n}\right)^2 = 1$. Alors

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})}=1.}$$

b) Soit ε un réel strictement positif.

En utilisant la définition de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})}=1$ on obtient l'existence d'un élément n_1 de $\mathbb{N}^*$ tel que :

$\forall n\in[\![n_1,+\infty[\![,\ \left|\dfrac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})}-1\right|\leqslant\varepsilon$. Alors $\forall n\in[\![n_1,+\infty[\![,\ -\varepsilon\leqslant\dfrac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})}-1\leqslant\varepsilon.$

Donc : $\forall n\in[\![n_1,+\infty[\![,\ 1-\varepsilon\leqslant\dfrac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})}\leqslant 1+\varepsilon$. En particulier : $\forall n\in[\![n_1,+\infty[\![,\ \dfrac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})}\leqslant 1+\varepsilon.$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})}=1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})}=1.$

Observons que $\dfrac{2+\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}=1-\dfrac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}$ et posons $\varepsilon'=\dfrac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}$.

Comme ε' est un réel strictement positif on montre encore qu'il existe un élément n_2 de $\mathbb{N}^*$ tel que :

$\forall n\in[\![n_2,+\infty[\![,\ 1-\varepsilon'\leqslant\dfrac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})}\leqslant 1+\varepsilon'.$

Ceci donne : $\forall n\in[\![n_2,+\infty[\![,\ \dfrac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})}\geqslant 1-\varepsilon'=1-\dfrac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}=\dfrac{2+\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}.$

Posons $n_0=\mathrm{Max}(n_1,n_2)$. Alors $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![,\ \dfrac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})}\leqslant 1+\varepsilon\quad$ et $\quad E(S_{(e_n+1)^4})\geqslant\dfrac{2+\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}.$

$$\boxed{\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+*},\ \exists n_0\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ n\geqslant n_o\Rightarrow\frac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})}\leqslant 1+\varepsilon\quad\text{et}\quad E(S_{(e_n+1)^4})\geqslant\frac{2+\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}.}$$

c) Soit ε un réel strictement positif.

Il existe un élément n_0 de $\mathbb{N}^*$ tel que $\forall n\in[\![n_0,+\infty[\![,\ \dfrac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})}\leqslant 1+\varepsilon\quad$ et $\quad E(S_{(e_n+1)^4})\geqslant\dfrac{2+\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}.$

Soit n un élément de $[\![n_0,+\infty[\![$. Montrons que : $\{Z_n\leqslant 1-\varepsilon\}\subset\{Z_{e_n^4}-1\leqslant-\varepsilon^2\}$ et $\{Z_n\geqslant 1+\varepsilon\}\subset\left\{Z_{(e_n+1)^4}-1\geqslant\dfrac{\varepsilon}{2}\right\}.$

• Si $\{Z_n\leqslant 1-\varepsilon\}$ est l'événement impossible alors $\{Z_n\leqslant 1-\varepsilon\}\subset\{Z_{e_n^4}-1\leqslant-\varepsilon^2\}$!

Supposons $\{Z_n\leqslant 1-\varepsilon\}$ non vide. Alors nécessairement $1-\varepsilon$ est positif ou nul car Z_n prend ses valeurs dans $[0,+\infty[$.

Soit ω un élément de Ω tel que $Z_n(\omega)\leqslant 1-\varepsilon$.

Alors d'après **4) b)** $\dfrac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})}\,Z_{e_n^4}(\omega)\leqslant Z_n(\omega)\leqslant 1-\varepsilon$ donc $Z_{e_n^4}(\omega)\leqslant(1-\varepsilon)\,\dfrac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})}$ car les espérances sont strictement positives.

Comme $\dfrac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})}\leqslant 1+\varepsilon$ et $1-\varepsilon\geqslant 0$ (d'où l'intérêt du premier cas) on obtient : $Z_{e_n^4}(\omega)\leqslant 1-\varepsilon^2$ ou $Z_{e_n^4}(\omega)-1\leqslant\varepsilon^2$.

Ceci achève de montrer que $\{Z_n\leqslant 1-\varepsilon\}\subset\{Z_{e_n^4}-1\leqslant-\varepsilon^2\}$.

• Soit ω un élément de Ω tel que $Z_n(\omega)\geqslant 1+\varepsilon$.

Alors d'après **4) b)** $1+\varepsilon\leqslant Z_n(\omega)\leqslant\dfrac{E(S_{(e_n+1)^4})}{E(S_{e_n^4})}\,Z_{(e_n+1)^4}(\omega)$ donc $Z_{(e_n+1)^4}(\omega)\geqslant(1+\varepsilon)\,\dfrac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})}$ car les espérances sont strictement positives.

Comme $\dfrac{E(S_{e_n^4})}{E(S_{(e_n+1)^4})} \geqslant \dfrac{2+\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}$ et que $1+\varepsilon$ est positif on obtient : $Z_{(e_n+1)^4}(\omega) \geqslant (1+\varepsilon)\dfrac{2+\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} = \dfrac{2+\varepsilon}{2} = 1+\dfrac{\varepsilon}{2}\cdot$

Ainsi $Z_{(e_n+1)^4}(\omega) - 1 \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\cdot$ Ceci achève de montrer que $\{Z_n \geqslant 1+\varepsilon\} \subset \left\{Z_{(e_n+1)^4} - 1 \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\right\}$.

$$\boxed{\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \geqslant n_0 \Rightarrow \{Z_n \leqslant 1-\varepsilon\} \subset \{Z_{e_n^4} - 1 \leqslant -\varepsilon^2\} \text{ et } \{Z_n \geqslant 1+\varepsilon\} \subset \left\{Z_{(e_n+1)^4} - 1 \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}.}$$

d) Soit ε un réel strictement positif.

Il existe n_0 dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \in [\![n_0, +\infty[\![$, $\{Z_n \leqslant 1-\varepsilon\} \subset \{Z_{e_n^4} - 1 \leqslant -\varepsilon^2\}$ et $\{Z_n \geqslant 1+\varepsilon\} \subset \left\{Z_{(e_n+1)^4} - 1 \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\right\}$.

Soit n un élément de $[\![n_0, +\infty[\![$. $P(|Z_n - 1| \geqslant \varepsilon) = P(\{Z_n - 1 \geqslant \varepsilon\} \cup \{Z_n - 1 \leqslant -\varepsilon\}) = P(\{Z_n \geqslant 1+\varepsilon\} \cup \{Z_n \leqslant 1-\varepsilon\})$.

Par incompatibilité on obtient : $P(|Z_n - 1| \geqslant \varepsilon) = P(Z_n \geqslant 1+\varepsilon) + P(Z_n \leqslant 1-\varepsilon)$.

Rappelons que : $\{Z_n \leqslant 1-\varepsilon\} \subset \{Z_{e_n^4} - 1 \leqslant -\varepsilon^2\}$ et $\{Z_n \geqslant 1+\varepsilon\} \subset \left\{Z_{(e_n+1)^4} - 1 \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}$.

Par croissance de P on obtient : $P(Z_n \leqslant 1-\varepsilon) \leqslant P(Z_{e_n^4} - 1 \leqslant -\varepsilon^2)$ et $P(Z_n \geqslant 1+\varepsilon) \leqslant P\left(Z_{(e_n+1)^4} - 1 \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$.

Alors $P(|Z_n - 1| \geqslant \varepsilon) \leqslant P(Z_{e_n^4} - 1 \leqslant -\varepsilon^2) + P\left(Z_{(e_n+1)^4} - 1 \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$.

Observons que : $\{Z_{e_n^4} - 1 \leqslant -\varepsilon^2\} \subset \{|Z_{e_n^4} - 1| \geqslant \varepsilon^2\}$ et $\left\{Z_{(e_n+1)^4} - 1 \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\right\} \subset \left\{|Z_{(e_n+1)^4} - 1| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\right\}$.

La croissance de P donne alors :

$P(|Z_n - 1| \geqslant \varepsilon) \leqslant P(Z_{e_n^4} - 1 \leqslant -\varepsilon^2) + P\left(Z_{(e_n+1)^4} - 1 \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant P(|Z_{e_n^4} - 1| \geqslant \varepsilon^2) + P\left(|Z_{(e_n+1)^4} - 1| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$.

$$\boxed{\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \geqslant n_0 \Rightarrow P(|Z_n - 1| \geqslant \varepsilon) \leqslant P(|Z_{e_n^4} - 1| \geqslant \varepsilon^2) + P\left(|Z_{(e_n+1)^4} - 1| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right).}$$

e) Soit ε un réel strictement positif.

Visiblement l'idée du concepteur était alors de nous faire dire que les séries de termes généraux $P(|Z_{e_n^4} - 1| \geqslant \varepsilon^2)$ et $P\left(|Z_{(e_n+1)^4} - 1| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ sont convergentes grace à **3)** et qu'ainsi, en utilisant les règles de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $P(|Z_n - 1| \geqslant \varepsilon)$ est convergente.

Sauf que la convergence de la série de terme général $P(|Z_{n^4} - 1| \geqslant 1)$ obtenue en **3)** ne donne pas nécessairement la convergence de la série de terme général $P(|Z_{e_n^4} - 1| \geqslant 1)$.

$(e_n^4)_{n\geqslant 1}$ est une suite qui tend vers $+\infty$ mais ce n'est pas une sous-suite de $(n^4)_{n\geqslant 1}$ car elle n'est pas strictement croissante.

Notons par exemple que e_1, e_2, ..., e_{15} sont égaux à 1.

Disons de manière imagée qu'il y a beaucoup plus de termes dans la série de terme général $P(|Z_{e_n^4} - 1| \geqslant 1)$ que dans la série de terme général $P(|Z_{n^4} - 1| \geqslant 1)$. Comme les séries sont à termes positifs...

Nous avions obtenu la convergence de la série de terme général $P(|Z_{n^4} - 1| \geqslant 1)$ à partir de

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant P(|Z_{n^4} - 1| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon^2\, E(S_{n^4})}$ et de $\dfrac{1}{\varepsilon^2\, E(S_{n^4})} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\varepsilon^2\, n^2}\cdot$

Observons que $e_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{\frac{1}{4}}$. Alors ici :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant P(|Z_{{e_n}^4} - 1| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon^2\, E(S_{{e_n}^4})}$ et de $\dfrac{1}{\varepsilon^2\, E(S_{{e_n}^4})} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\varepsilon^2\, {e_n}^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\varepsilon^2\, n^{\frac{1}{2}}}\cdot$

Un peu court ou le contraire si tu veux mais en tout cas c'est raté...

$\boxed{\text{Dessine moi un mouton.}}$