EM LYON 2009 S J.F. COSSUTTA Lycée Marcelin BERTHELOT SAINT-MAUR

jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

EM LYON 2009 S

PROBLÈME 1

Partie I - Calcul d'une intégrale

1. • $f_{a,b} : x \to \dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

• Au voisinage de $0 : e^{-ax} = 1 - ax + \mathrm{o}(x)$ et $e^{-bx} = 1 - bx + \mathrm{o}(x)$ donc $e^{-ax} - e^{-bx} = (b - a)x + \mathrm{o}(x)$.

Ainsi $\dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = (b - a) + \mathrm{o}(1)$ au voisinage de 0. Dans ces conditions $\lim\limits_{x \to 0} f_{a,b}(x) = b - a$.

$f_{a,b}$ est donc prolongeable par continuité en 0. Par conséquent $\displaystyle\int_0^1 f_{a,b}(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

• a et b sont strictement positifs donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 f_{a,b}(x)\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{a}\dfrac{ax}{e^{ax}} - \dfrac{1}{b}\dfrac{bx}{e^{bx}}\right) = 0$ par croissance comparée.

On a donc également $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 \left|f_{a,b}(x)\right|\right) = 0$ et ainsi $|f_{a,b}(x)| = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

De plus $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge et, $|f_{a,b}|$ et $x \to \dfrac{1}{x^2}$ sont positives sur $[1, +\infty[$.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_{a,b}(x)\,\mathrm{d}x$.

Finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{a,b}(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x \text{ converge.}}$$

2. a. Soit (ε, X) un élément de $]0, +\infty[^2$ tel que $\varepsilon \leqslant X$.

Notons que $x \to \dfrac{e^{-ax}}{x}$ est continue sur $[\varepsilon, X]$ et que la fonction $x \to ax$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Ceci autorise le changement de variable $y = a\,x$ dans ce qui suit.

$$\int_\varepsilon^X \frac{e^{-ax}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-y}}{y/a}\,\frac{1}{a}\,\mathrm{d}y = \int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y.$$

De manière analogue on obtient : $\displaystyle\int_\varepsilon^X \frac{e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{b\varepsilon}^{bX} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y.$

Pour tout (ε, X) appartenant à $]0, +\infty[^2$ tel que $\varepsilon \leqslant X$:
$\displaystyle\int_\varepsilon^X \frac{e^{-ax}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y$ et $\displaystyle\int_\varepsilon^X \frac{e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{b\varepsilon}^{bX} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y.$

b. Soit (ε, X) un élément de $]0, +\infty[^2$ tel que $\varepsilon \leqslant X$.

$$\int_\varepsilon^X \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_\varepsilon^X \frac{e^{-ax}}{x}\,\mathrm{d}x - \int_\varepsilon^X \frac{e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y - \int_{b\varepsilon}^{bX} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y.$$

$$\int_\varepsilon^X \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y + \int_{b\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y - \int_{b\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y.$$

$$\int_\varepsilon^X \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y.$$

Pour tout (ε, X) appartenant à $]0, +\infty[^2$ tel que $\varepsilon \leqslant X$:
$$\int_\varepsilon^X \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y.$$

3. a. • $y \to 1 - e^{-y}$ et $y \to \dfrac{1}{y}$ sont continues sur $]0, +\infty[$. Par produit h est continue sur $]0, +\infty[$.

• $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$. Alors $e^{-y} - 1 \underset{y\to 0}{\sim} -y$ donc $1 - e^{-y} \underset{y\to 0}{\sim} y$. Finalement $\dfrac{1-e^{-y}}{y} \underset{y\to 0}{\sim} 1$.

Alors $\displaystyle\lim_{y\to 0} \frac{1-e^{-y}}{y} = 1 = h(0)$. Ceci suffit très largement pour dire que h est continue en 0.

L'application h de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall y \in [0, +\infty[,\ h(y) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-y}}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

b. Soit ε un réel strictement positif.

h est continue sur $[0, +\infty[$. Considérons alors une primitive H de h sur $[0, +\infty[$.

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}-1}{y}\,\mathrm{d}y + \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} h(y)\,\mathrm{d}y + \Big[\ln|y|\Big]_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} = H(b\varepsilon) - H(a\varepsilon) + \big(\ln(|b\varepsilon|) - \ln(|a\varepsilon|)\big).$$

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y = H(b\varepsilon) - H(a\varepsilon) + \big(\ln(b\varepsilon) - \ln(a\varepsilon)\big) = H(b\varepsilon) - H(a\varepsilon) + \ln\left(\frac{b\varepsilon}{a\varepsilon}\right) = H(b\varepsilon) - H(a\varepsilon) + \ln\frac{b}{a}\cdot$$

Or H est continue en 0 donc $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \big(H(b\varepsilon) - H(a\varepsilon)\big) = H(0) - H(0) = 0$.

Donc $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(H(b\varepsilon) - H(a\varepsilon) + \ln\frac{b}{a}\right) = \ln\frac{b}{a}\cdot$

$$\boxed{\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y = \ln\frac{b}{a}\cdot}$$

c. Soit X un élément de $]0, +\infty[$.

$\forall \varepsilon \in]0, X]$, $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{X} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y.$

Ce qui précède montre alors que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{X} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y \right) = \ln \frac{b}{a} - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y.$$

Donc $\displaystyle\int_{0}^{X} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln \frac{b}{a} - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y.$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } X \text{ de }]0,+\infty[,\ \int_{0}^{X} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln \frac{b}{a} - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y.}$$

d. Soit X un élément de $]0,+\infty[$.

Nous avons vu que $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y$ converge donc pour tout réel z strictement positif $\displaystyle\int_{z}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y$ converge également.

Alors $\displaystyle\int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y = \int_{aX}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y - \int_{bX}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y$ car ces deux intégrales convergent puisque aX et bX sont des réels strictement positifs.

De plus $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \int_{aX}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y = 0$ (resp. $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \int_{bX}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y = 0$) comme reste d'une intégrale convergente.

Ainsi $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y = \lim_{X\to+\infty} \left(\int_{aX}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y - \int_{bX}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y \right) = 0 - 0 = 0.$

Donc $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \int_{0}^{X} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{X\to+\infty} \left(\ln \frac{b}{a} - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y \right) = \ln \frac{b}{a}\cdot$ Finalement :

$$\boxed{\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln \frac{b}{a}\cdot}$$

Partie II - Étude d'un produit scalaire

---

1. Notons E' l'espace vectoriel réel des applications de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

• E est contenu dans E'.

• Posons $\forall x \in [0,+\infty[,\ f_0(x) = 0$. f_0 est bornée sur $[0,+\infty[$, f_0 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et $f_0(0) = 0$.

Ainsi f_0 est un élément de E donc E n'est pas vide.

• Soient f et g deux éléments de E et soit λ un réel.

▷ f (resp. g) est bornée sur $[0,+\infty[$. Donc il existe un réel positif M_f (resp. M_g) tel que

$\forall x \in [0,+\infty[,\ |f(x)| \leqslant M_f$ (resp. $\forall x \in [0,+\infty[,\ |g(x)| \leqslant M_g$).

$\forall x \in [0, +\infty[,\ |\lambda\, f(x) + g(x)| \leqslant |\lambda|\, |f(x)| + |g(x)| \leqslant |\lambda|\, M_f + M_g$ donc $\lambda\, f + g$ est bornée sur $[0, +\infty[$.

$\triangleright$ f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ donc $\lambda\, f + g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

$\triangleright$ $(\lambda\, f + g)(0) = \lambda\, f(0) + g(0) = \lambda \times 0 + 0 = 0$.

Par conséquent $\lambda\, f + g$ appartient à E. Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{E \text{ est un sous-espace vetoriel de l'espace vectoriel réel des applications de } [0, +\infty[\text{ dans } \mathbb{R}.}$$

2. • $\forall x \in [0, +\infty[,\ |f_1(x)| = |\sin x| \leqslant 1$ donc f_1 est bornée sur $[0, +\infty[$.

f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ car sin est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$f_1(0) = \sin 0 = 0$.

Donc f_1 appartient à E.

• $f_2(0) = \cos 0 = 1 \neq 0$. f_2 n'appartient pas à E.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - 1) = +\infty$ donc f_3 n'est pas bornée sur $[0, +\infty[$. f_3 n'appartient pas à E.

• $\forall x \in [0, +\infty[,\ 0 \leqslant e^{-x} \leqslant 1$ donc $\forall x \in [0, +\infty[,\ 0 \leqslant f_4(x) = 1 - e^{-x} \leqslant 1$. f_4 est bornée sur $[0, +\infty[$.

$x \to 1 - e^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc f_4 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

$f_4(0) = e^{-0} - 1 = 0$.

Par conséquant f_4 appartient à E.

$$\boxed{f_1 \text{ et } f_4 \text{ sont deux éléments de } E.\ f_2 \text{ et } f_3 \text{ n'appartiennent pas à } E.}$$

3. a. Soit f un élément de E. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. Donc f est dérivable en 0.

En remarquant que f est nulle en 0 il vient : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = f'(0)$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } f \text{ de } E : \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)\ .}$$

b. Soient f et g deux éléments de E. Posons $\forall x \in]0, +\infty[,\ \varphi(x) = \dfrac{f(x)\, g(x)}{x^2}$.

• φ est continue sur $]0, +\infty[$ car f, g et $x \to \dfrac{1}{x^2}$ sont continues sur $]0, +\infty[$.

• $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)\, g(x)}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{f(x)}{x}\, \dfrac{g(x)}{x} \right) = f'(0)\, g'(0)$.

Ainsi φ est prolongeable par continuité en 0 donc $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\, \mathrm{d}x$ converge.

• f (resp. g) est bornée sur $[0, +\infty[$. Donc il existe un réel positif M_f (resp. M_g) tel que

$\forall x \in [0,+\infty[,\ |f(x)| \leqslant M_f$ (resp. $\forall x \in [0,+\infty[,\ |g(x)| \leqslant M_g$).

$\forall x \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant |\varphi(x)| = \dfrac{|f(x)|\,|g(x)|}{x^2} \leqslant \dfrac{M_f\,M_g}{x^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{M_f\,M_g}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge (car $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge).

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} |\varphi(x)|\,\mathrm{d}x$. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente donc convergente.

Finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

$$\boxed{\text{Si } f \text{ et } g \text{ sont deux éléments de } E,\ \int_0^{+\infty} \frac{f(x)\,g(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \text{ converge.}}$$

4. • Notons que pour tout élément (f,g) de E^2, $(f\,|\,g)$ appartient à $\mathbb{R}$.

• Soient f, g et ℓ trois éléments de E. Soit λ un réel.

$(\lambda\, f + g\,|\,\ell) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\big(\lambda\, f(x) + g(x)\big)\,\ell(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda\, f(x)\,\ell(x) + g(x)\,\ell(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$

$(\lambda\, f + g\,|\,\ell) = \lambda \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)\,\ell(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} \frac{g(x)\,\ell(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lambda\,(f\,|\,\ell) + (g\,|\,\ell)$ car toutes les intégrales convergent.

$\forall (f,g,\ell) \in E^3,\ (\lambda\, f + g\,|\,\ell) = \lambda\,(f\,|\,\ell) + (g\,|\,\ell).$

• Soient f et g deux éléments de E. $(f\,|\,g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)\,g(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{g(x)\,f(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = (g\,|\,f).$

$\forall (f,g) \in E^2,\ (f\,|\,g) = (g\,|\,f).$

• Soit f un élément de E. $\forall x \in]0,+\infty[,\ \dfrac{f(x)\,f(x)}{x^2} \geqslant 0$ donc $(f\,|\,f) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)\,f(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$

$\forall f \in E,\ (f\,|\,f) \geqslant 0.$

• Soit f un élément de E tel que $(f\,|\,f) = 0$.

▷ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\big(f(x)\big)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x = 0.$

▷ $x \to \dfrac{\big(f(x)\big)^2}{x^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

▷ $x \to \dfrac{\big(f(x)\big)^2}{x^2}$ est positive sur $]0,+\infty[$.

▷ $0 \neq +\infty$!

Les quatre points précédents permettent de dire que $\forall x \in]0,+\infty[,\ \dfrac{\big(f(x)\big)^2}{x^2} = 0.$

Alors $\forall x \in]0,+\infty[,\ \big(f(x)\big)^2 = 0$ donc $\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = 0.$

Comme $f(0) = 0 : \forall x \in [0,+\infty[,\ f(x) = 0$. Ainsi $f = 0_E$.

$\forall f \in E,\ (f\,|\,f) = 0 \Rightarrow f = 0_E.$

Les cinq points précédents montrent que :

$$\boxed{(.\,|\,.) \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

5. Soient f et g deux éléments de E. Soient A et B deux réels strictement positifs.

Posons $u = fg$ et $\forall x \in]0,+\infty[,\ v(x) = -\dfrac{1}{x}\cdot$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. De plus $\forall x \in]0,+\infty[,\ u'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x^2}\cdot$

Ceci légitime l'intégration par parties suivantes.

$$\int_A^B \frac{f(x)\,g(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{f(x)\,g(x)}{x}\right]_A^B - \int_A^B \left(-\frac{f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)}{x}\right)\mathrm{d}x.$$

$$\int_A^B \frac{f(x)\,g(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{f(A)\,g(A)}{A} - \frac{f(B)\,g(B)}{B} + \int_A^B \frac{f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)}{x}\,\mathrm{d}x \quad (\bigstar).$$

f (resp. g) est bornée sur $[0,+\infty[$. Donc il existe un réel positif M_f (resp. M_g) tel que

$\forall x \in [0,+\infty[,\ |f(x)| \leqslant M_f$ (resp. $\forall x \in [0,+\infty[,\ |g(x)| \leqslant M_g$).

Alors $0 \leqslant \left|\dfrac{f(B)\,g(B)}{B}\right| = \dfrac{|f(B)|\,|g(B)|}{B} \leqslant \dfrac{M_f\,M_g}{B}\cdot$

Comme $\displaystyle\lim_{B\to+\infty} \frac{M_f\,M_g}{B} = 0$ il vient par encadrement $\displaystyle\lim_{B\to+\infty} \frac{f(B)\,g(B)}{B} = 0$.

De plus $\displaystyle\lim_{A\to 0} \frac{f(A)\,g(A)}{A} = \lim_{A\to 0}\left(\frac{f(A)}{A}\,g(A)\right) = f'(0)\times g(0) = f'(0)\times 0 = 0$ (d'après le résultat de **3. a.** et la continuité de g en 0).

$\displaystyle\lim_{B\to+\infty} \frac{f(B)\,g(B)}{B} = 0,\ \lim_{A\to 0} \frac{f(A)\,g(A)}{A} = 0$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)\,g(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

Il résulte alors de $(\bigstar)$ que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)\,g(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Ainsi $\displaystyle(f\,|\,g) = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)\,g(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Pour tout couple (f,g) d'éléments de E, $\displaystyle(f\,|\,g) = \int_0^{+\infty} \frac{f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge et $\displaystyle(f\,|\,g) = \int_0^{+\infty} \frac{f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

6. a. Soit α un réel strictement positif.

$\forall x \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant e^{-\alpha x} \leqslant 1$ donc $\forall x \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant u_\alpha(x) = 1 - e^{-\alpha x} \leqslant 1$. u_α est bornée sur $[0,+\infty[$.

$x \to 1 - e^{-\alpha x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc u_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

$u_\alpha(0) = 1 - e^{-\alpha\times 0} = 1 - 1 = 0$. Ceci achève de montrer que u_α appartient à E.

$$\boxed{\forall \alpha \in]0,+\infty[,\ u_\alpha \in E.}$$

b. Soient α et β deux réels strictement positifs.

$(u_\alpha \,|\, u_\beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u'_\alpha(x)\, u_\beta(x) + u_\alpha(x)\, u'_\beta(x)}{x}\, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha\, e^{-\alpha x}\,(1-e^{-\beta x}) + (1-e^{-\alpha x})\, \beta\, e^{-\beta x}}{x}\, \mathrm{d}x.$

$(u_\alpha \,|\, u_\beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\alpha\, \left(e^{-\alpha x} - e^{-(\alpha+\beta)x}\right) + \beta\, \left(e^{-\beta x} - e^{-(\alpha+\beta)x}\right)}{x}\, \mathrm{d}x.$

α, β et $\alpha+\beta$ étant strictement positifs, **I.3.d** montre que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-(\alpha+\beta)x}}{x}\, \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta x} - e^{-(\alpha+\beta)x}}{x}\, \mathrm{d}x$ convergent et valent respectivement $\ln \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha}$ et $\ln \dfrac{\alpha+\beta}{\beta}\cdot$

Alors $(u_\alpha \,|\, u_\beta) = \alpha \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-(\alpha+\beta)x}}{x}\, \mathrm{d}x + \beta \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta x} - e^{-(\alpha+\beta)x}}{x}\, \mathrm{d}x = \alpha\, \ln \frac{\alpha+\beta}{\alpha} + \beta\, \ln \frac{\alpha+\beta}{\beta}\cdot$

$(u_\alpha \,|\, u_\beta) = \alpha\, \ln \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha} + \beta\, \ln \dfrac{\alpha+\beta}{\beta} = (\alpha+\beta)\, \ln(\alpha+\beta) - \alpha\, \ln\alpha - \beta\, \ln\beta.$

$$\boxed{\text{Pour tout couple } (\alpha,\beta) \text{ d'éléments de }]0,+\infty[: (u_\alpha \,|\, u_\beta) = \alpha\, \ln \frac{\alpha+\beta}{\alpha} + \beta\, \ln \frac{\alpha+\beta}{\beta}\cdot}$$

$$\boxed{\text{Pour tout couple } (\alpha,\beta) \text{ d'éléments de }]0,+\infty[: (u_\alpha \,|\, u_\beta) = (\alpha+\beta)\, \ln(\alpha+\beta) - \alpha\, \ln\alpha - \beta\, \ln\beta.}$$

c. Soient α et β deux réels strictement positifs.

$\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha} > 1$ et $\dfrac{\alpha+\beta}{\beta} > 1$ donc $\ln \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha} > 0$ et $\ln \dfrac{\alpha+\beta}{\beta} > 0$.

Ainsi $(u_\alpha \,|\, u_\beta) = \alpha\, \ln \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha} + \beta\, \ln \dfrac{\alpha+\beta}{\beta} > 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout couple } (\alpha,\beta) \text{ d'éléments de }]0,+\infty[: (u_\alpha \,|\, u_\beta) > 0.}$$

Partie III - Étude de densités de variables aléatoires

---

1. • $\forall x \in]-\infty, 0],\ v(x) = 0 \geqslant 0$!

Soit un x un élément de $]0,+\infty[$. $4\,c^2 x \geqslant c^2\, x$ donc $e^{-c^2\, x} \geqslant e^{-4\, c^2\, x}$. Alors $e^{-c^2\, x} - e^{-4\, c^2\, x} \geqslant 0$.

Comme $x\, \ln 4$ est strictement positif : $v(x) = \dfrac{e^{-c^2\, x} - e^{-4\, c^2\, x}}{x\, \ln 4} \geqslant 0$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R},\ v(x) \geqslant 0$.

• v est nulle sur $]-\infty, 0]$ donc v est continue sur $]-\infty, 0]$.

$x \to e^{-c^2\, x} - e^{-4\, c^2\, x}$ et $x \to \dfrac{1}{x\, \ln 4}$ sont continues sur $]0,+\infty[$. Par produit v est continue sur $]0,+\infty[$.

Finalement v est au moins continue sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

• $\displaystyle\int_{-\infty}^0 v(x)\, \mathrm{d}x$ existe et vaut 0 car v est nulle sur $]-\infty, 0]$.

c^2 et $4\,c^2$ sont des réels strictement positifs donc, d'après **I.3.d.** : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-c^2x} - e^{-4c^2x}}{x}\,\mathrm{d}x$ existe et vaut $\ln \dfrac{4\,c^2}{c^2}$ ou $\ln 4$.

Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} v(x)\,\mathrm{d}x$ existe et vaut $\dfrac{1}{\ln 4} \times \ln 4$ ou 1. Finalement $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} v(x)\,\mathrm{d}x$ existe et vaut 1.

Les trois points précédents montrent que :

$$\boxed{v \text{ est une densité d'une variable aléatoire réelle.}}$$

2. $\forall x \in]-\infty, 0],\ x\,v(x) = 0$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\,v(x)\,\mathrm{d}x$ existe et vaut 0.

$\forall x \in]0, +\infty[,\ x\,v(x) = \dfrac{1}{\ln 4}\big(e^{-c^2x} - e^{-4c^2x}\big)$.

Si λ est un réel strictement positif le cours sur les lois exponentielles nous autorise à dire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda\,e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ existe et vaut 1.

Ainsi pour tout réel strictement positif λ, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ existe et vaut $\dfrac{1}{\lambda}\cdot$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-c^2x}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-4c^2x}\,\mathrm{d}x$ existent et valent respectivement $\dfrac{1}{c^2}$ et $\dfrac{1}{4c^2}\cdot$

Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,v(x)\,\mathrm{d}x$ existe et vaut $\dfrac{1}{\ln 4}\,\dfrac{1}{c^2} - \dfrac{1}{\ln 4}\,\dfrac{1}{4\,c^2}$ ou $\dfrac{3}{4\,c^2\,\ln 4}\cdot$

Finalement $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,v(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\dfrac{3}{4\,c^2\,\ln 4}\cdot$ Par conséquent :

$$\boxed{X \text{ admet une espérance qui vaut } \frac{3}{4\,c^2\,\ln 4}\cdot}$$

3. a. Nous noterons F_X et F_Y les fonctions de répartition de X et de Y.

Y prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ donc $\forall x \in]-\infty, 0[,\ F_Y(x) = 0$.

$\forall x \in [0, +\infty[,\ F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(\sqrt{X} \leqslant x) = P(X \leqslant x^2) = F_X(x^2)$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} F_X(x^2) & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

Montrons que F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R}^*$.

• $x \to x^2$ et F_X sont continues sur $\mathbb{R}$ donc par composition $x \to F_X(x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Alors F_Y est continue sur $[0, +\infty[$ donc continue en tout point de $]0, +\infty[$ et continue à droite en 0.

F_Y est nulle sur l'intervalle ouvert $]-\infty, 0[$, donc F_Y est continue en tout point de $]-\infty, 0[$.

Observons que $F_Y(0) = F_X(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} v(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Alors $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} F_Y(x) = 0 = F_Y(0)$; F_Y est continue à gauche en 0.

Ceci achève de montrer que F_Y est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

• v est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc F_X est au moins de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ F'_X(x) = v(x)$.

$x \to x^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x^2 \in \mathbb{R}^*$. Donc par composition $x \to F_X(x^2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi F_Y est de classes $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

F_Y étant nulle sur $]-\infty, 0[$ elle est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$.

F_Y est donc au moins de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{Y = \sqrt{X} \text{ est une variable aléatoire à densité.}}$$

$\forall x \in]-\infty, 0[,\ F_Y(x) = 0$ donc $\forall x \in]-\infty, 0[,\ F'_Y(x) = 0$.

$\forall x \in]0, +\infty[,\ F_Y(x) = F_X(x^2)$ donc $\forall x \in]0, +\infty[,\ F'_Y(x) = 2\,x\,F'_X(x^2) = 2\,x\,v(x^2)$.

$\forall x \in]0, +\infty[,\ F'_Y(x) = 2\,x\,\dfrac{e^{-c^2x^2} - e^{-4c^2x^2}}{x^2\,\ln 4} = 2\,x\,\dfrac{e^{-c^2x^2} - e^{-4c^2x^2}}{x^2\,2\,\ln 2} = \dfrac{e^{-c^2x^2} - e^{-4c^2x^2}}{x\,\ln 2}\cdot$

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-c^2x^2} - e^{-4c^2x^2}}{x\,\ln 2} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

f_Y est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec F'_Y sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. Ainsi f_Y est une densité de Y.

$$\boxed{\text{La fonction } f_Y \text{ définie par} : \forall x \in \mathbb{R},\ f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-c^2x^2} - e^{-4c^2x^2}}{x\,\ln 2} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \text{ est une densité de } Y.}$$

b. $Y^2 = X$ et X possède une espérance. Ainsi $E(Y^2)$ existe donc Y possède un moment d'ordre 2 donc une espérance et une variance.

$E(Y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f_y(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x\,f_y(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln 2}\int_0^{+\infty} (e^{-c^2x^2} - e^{-4c^2x^2})\,\mathrm{d}x.$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{c}{\sqrt{\pi}}\,e^{-c^2x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\frac{1}{\sqrt{2}\,c}}\,e^{-\frac{x^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}c}\right)^2}}$.

Ainsi $x \to \dfrac{c}{\sqrt{\pi}}\,e^{-c^2x^2}$ est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi normale de paramètres 0 et $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}\,c}\right)^2$.

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{\sqrt{\pi}}\,e^{-c^2x^2}\,\mathrm{d}x$ existe et vaut 1. Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c^2x^2}\,\mathrm{d}x$ existe et vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{c}\cdot$

Par parité $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-c^2x^2}\,\mathrm{d}x$ existe et vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2c}\cdot$

En remplaçant c par $2c$ on peut dire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-4c^2x^2}\,\mathrm{d}x$ existe et vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{4c}\cdot$ Alors :

$$E(Y)=\frac{1}{\ln 2}\int_0^{+\infty}\left(e^{-c^2x^2}-e^{-4c^2x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln 2}\int_0^{+\infty} e^{-c^2x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{\ln 2}\int_0^{+\infty} e^{-4c^2x^2}\,\mathrm{d}x.$$

$$E(Y)=\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2c}-\frac{\sqrt{\pi}}{4c}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{4\,c\,\ln 2}.$$

$$\boxed{Y \text{ possède une espérance qui vaut : } \frac{\sqrt{\pi}}{4\,c\,\ln 2}.}$$

$$V(Y)=E(Y^2)-\big(E(Y)\big)^2=E(X)-\big(E(Y)\big)^2=\frac{3}{4\,c^2\,\ln 4}-\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4\,c\,\ln 2}\right)^2=\frac{3}{4\,c^2\,\ln 4}-\frac{\pi}{16\,c^2\,(\ln 2)^2}$$

$$\boxed{Y \text{ possède une variance qui vaut : } \frac{3}{4\,c^2\,\ln 4}-\frac{\pi}{16\,c^2\,(\ln 2)^2} \text{ ou } \frac{6\,\ln 2-\pi}{16\,c^2\,(\ln 2)^2}.}$$

PROBLÈME 2

Partie I - Deux exemples

---

1. $(R_\theta)^2=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos^2\theta+\sin^2\theta & \cos\theta\,\sin\theta-\sin\theta\,\cos\theta\\ \sin\theta\,\cos\theta-\cos\theta\,\sin\theta & \sin^2\theta+\cos^2\theta\end{pmatrix}.$

$(R_\theta)^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2.$

$$\boxed{(R_\theta)^2=I_2.}$$

La fonction cos prend une infinité de valeurs donc $\{R_\theta\,,\,\theta\in\mathbb{R}\}$ est un ensemble infini et tous ses éléments sont des racines carrées de I_2. Ainsi :

$$\boxed{I_2 \text{ admet une infinité de racines carrées.}}$$

2. Supposons qu'il existe une matrice $R=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $R^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Alors $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=R^2=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ca+dc & cb+d^2\end{pmatrix}.$

Donc $a^2+bc=c(a+d)=d^2+bc=0$ et $b(a+d)=1$.

Nécessairement $a+d$ n'est pas nul. Ainsi $c=0$. Alors $a^2=d^2=0$. Donc $a=d=0$, ce qui contredit $a+d\neq 0$.

$$\boxed{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \text{ n'admet pas de racine carrée.}}$$

Partie II - Racine carrées d'une matrice de la forme $\mathbf{I_n+N}$ avec $\mathbf{N}$ nilpotente

1. $\sqrt{1+t}=(1+t)^{\frac{1}{2}}=1+\dfrac{1}{2}\,t+\dfrac{(1/2)(1/2-1)}{2!}\,t^2+\dfrac{(1/2)(1/2-1)(1/2-2)}{3!}\,t^3+\mathrm{o}(t^3)$ au voisinage de 0.

$\sqrt{1+t}=1+\dfrac{1}{2}\,t-\dfrac{1}{8}\,t^2+\dfrac{1}{16}\,t^3+\mathrm{o}(t^3)$ au voisinage de 0.

$$\boxed{\sqrt{1+t}=1+\frac{1}{2}\,t-\frac{1}{8}\,t^2+\frac{1}{16}\,t^3+\mathrm{o}(t^3)\text{ au voisinage de 0.}}$$

2. • **Version 1**. On calcule !

Posons $S=1+X-\big(a_0+a_1\,X+a_2\,X^2+a_3\,X^3\big)^2$. Alors $S=1+X-\left(1+\dfrac{1}{2}\,X-\dfrac{1}{8}\,X^2+\dfrac{1}{16}\,X^3\right)^2$.

$S=1+X-\left(1+\dfrac{1}{4}\,X^2+\dfrac{1}{64}\,X^4+\dfrac{1}{256}\,X^6+X-\dfrac{1}{4}\,X^2+\dfrac{1}{8}\,X^3-\dfrac{1}{8}\,X^3+\dfrac{1}{16}\,X^4-\dfrac{1}{64}\,X^5\right)$.

$S=-\dfrac{1}{64}\,X^4-\dfrac{1}{256}\,X^6-\dfrac{1}{16}\,X^4+\dfrac{1}{64}\,X^5=-\dfrac{5}{64}\,X^4+\dfrac{1}{64}\,X^5-\dfrac{1}{256}\,X^6=X^4\left(-\dfrac{5}{64}+\dfrac{1}{64}\,X-\dfrac{1}{256}\,X^2\right)$.

Donc $1+X=\left(1+\dfrac{1}{2}\,X-\dfrac{1}{8}\,X^2+\dfrac{1}{16}\,X^3\right)^2+X^4\left(-\dfrac{5}{64}+\dfrac{1}{64}\,X-\dfrac{1}{256}\,X^2\right)$.

$Q=-\dfrac{5}{64}+\dfrac{1}{64}\,X-\dfrac{1}{256}\,X^2$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $1+X=\left(1+\dfrac{1}{2}\,X-\dfrac{1}{8}\,X^2+\dfrac{1}{16}\,X^3\right)^2+X^4\,Q(X)$ ou tel que $1+X=(a_0+a_1\,X+a_2\,X^2+a_3\,X^3)^2+X^4\,Q(X)$.

• **Version 2**. Avec peu de calculs et surtout avec la possibilité de généraliser à l'ordre p...

Posons $P=a_0+a_1\,X+a_1\,X+a_2\,X^2+a_3\,X^3$. $P=1+\dfrac{1}{2}\,X-\dfrac{1}{8}\,X^2+\dfrac{1}{16}\,X^3$.

$\sqrt{1+t}=1+\dfrac{1}{2}\,t-\dfrac{1}{8}\,t^2+\dfrac{1}{16}\,t^3+\mathrm{o}(t^3)=P(t)+\mathrm{o}(t^3)$ au voisinage de 0.

Alors il existe un réel α appartenant à $]0,1[$ et une application ε de $]-\alpha,\alpha[$ dans $\mathbb{R}$ tels que $\forall t\in]-\alpha,\alpha[$, $\sqrt{1+t}=P(t)+t^3\,\varepsilon(t)$ et $\lim\limits_{t\to0}\varepsilon(t)=0$.

$\forall t\in]-\alpha,\alpha[,\ 1+t=\big(P(t)\big)^2+2\,P(t)\,t^3\,\varepsilon(t)+t^6\,\big(\varepsilon(t)\big)^2$.

$\forall t\in]-\alpha,\alpha[-\{0\},\ \dfrac{1+t-\big(P(t)\big)^2}{t^3}=2\,P(t)\,\varepsilon(t)+t^3\,\big(\varepsilon(t)\big)^2$.

Ainsi $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1+t-\big(P(t)\big)^2}{t^3}=2\times P(0)\times0+0^3\times0^2=0$.

$1+X-P^2$ est un polynôme de degré au plus 6 (en fait de degré 6...). $1+X-P^2=\displaystyle\sum_{k=0}^{6}b_k\,X^k$ où $(b_0,b_1,\dots,b_6)\in\mathbb{R}^6$.

Supposons qu'il existe un élément i_0 de $[\![0,3]\!]$ tel que $b_{i_0}\neq0$. Notons alors j le plus petit élément de $\{k\in[\![0,3]\!]\mid b_k\neq0\}$.

$1+X-P^2=\displaystyle\sum_{k=j}^{6} b_k\, X^k$ et b_j n'est pas nul.

Alors $1+t-P^2(t) \underset{t\to 0}{\sim} b_j\, t^j$. Donc $\dfrac{1+t-P^2(t)}{t^3} \underset{t\to 0}{\sim} b_j\, t^{j-3}$.

Or $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{1+t-\big(P(t)\big)^2}{t^3}=0$ donc $\displaystyle\lim_{t\to 0}\big(b_j\, t^{3-j}\big)=0$. Comme b_j n'est pas nul : $\displaystyle\lim_{t\to 0} t^{3-j}=0$.

En particulier $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} t^{3-j}=0$. Or $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} t^{3-j}=+\infty$ si $j<3$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} t^{3-j}=1$ si $j=3$. Une légère contradiction apparaît ! !

Ainsi $\forall j\in[\![0,3]\!],\ b_j=0$. Donc $1+X-P^2=\sum_{j=4}^{6} b_j\, X^j = X^4 \sum_{j=4}^{6} b_j\, X^{j-4}$.

Ainsi $Q=\sum_{j=4}^{6} b_j\, X^{j-4}$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$ tel que $1+X=P^2+X^4\, Q(X)$ donc tel que $1+X=\big(a_0+a_1\, X+a_2\, X^2+a_3\, X^3\big)^2+X^4\, Q(X)$.

$$\boxed{\text{Il existe un élément } Q \text{ de } \mathbb{R}[X] \text{ tel que } 1+X=(a_0+a_1\, X+a_2\, X^2+a_3\, X^3)^2+X^4\, Q(X).}$$

3. $I_n+N=(a_0\, I_n+a_1\, N+a_2\, N^2+a_3\, N^3)^2+N^4\, Q(N)$ et $N^4=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Donc $(a_0\, I_n+a_1\, N+a_2\, N^2+a_3\, N^3)^2=I_n+N$.

Par conséquent $a_0\, I_n+a_1\, N+a_2\, N^2+a_3\, N^3$ ou $I_n+\dfrac{1}{2}\, N-\dfrac{1}{8}\, N^2+\dfrac{1}{16}\, N^3$ est une racine carrée de I_n+N.

$$\boxed{I_n+\frac{1}{2}\, N-\frac{1}{8}\, N^2+\frac{1}{16}\, N^3 \text{ est une racine carrée de } I_n+N.}$$

Partie III - Racines carrées d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres strictement positives et deux à deux distinctes

---

1. a. Soit SEP (f,λ) un sous-espace propre de f et x un élément de ce sous-espace propre. $f(x)=\lambda\, x$.

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$. Donc $f\big(g(x)\big)=g\big(f(x)\big)=g\big(\lambda\, x\big)=\lambda\, g(x)$. Donc $g(x)$ appartient à SEP (f,λ).

Pour tout élément x de SEP (f,λ), $g(x)$ appartient à SEP (f,λ) ; SEP (f,λ) est stable par g.

$$\boxed{\text{Chaque sous-espace propre de } f \text{ est stable par } g.}$$

Remarque De même chaque sous-espace propre de g est stable par f.

b. Notons que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ admettant n valeurs propres deux à deux distinctes et que n est la dimension de $\mathbb{R}^n$.

Alors non seulement f est diagonalisable mais ses sous espaces propres sont des droites vectorielles.

Soit x un vecteur propre de f et λ la valeur propre associée. x est un vecteur non nul de SEP (f, λ) et SEP (f, λ) est une droite vectorielle. Ainsi SEP $(f, \lambda) = \text{Vect}(x)$.

D'après ce qui précède $g(x)$ appartient à SEP (f, λ) donc à $\text{Vect}(x)$. Alors il existe un réel α tel que : $g(x) = \alpha\, x$. Comme x n'est pas nul, x est un vecteur propre de g.

$$\boxed{\text{Tout vecteur propre de } f \text{ est vecteur propre de } g.}$$

c. f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ admettant n valeurs propres deux à deux distinctes et n est la dimension de $\mathbb{R}^n$. Ainsi :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$$

Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de f. $\mathcal{B}$ est encore une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de g. Ainsi la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale.

$$\boxed{\text{La matrice de } g \text{ dans une base } \mathcal{B} \text{ de } \mathbb{R}^n \text{ constituée de vecteurs propres de } f \text{ est diagonale.}}$$

f est diagonalisable donc il existe au moins une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de f. La matrice de g dans cette base étant diagonale, nécessairement :

$$\boxed{g \text{ est diagonalisable.}}$$

2. a. A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes donc A est diagonalisable. Ainsi :

$$\boxed{\text{il existe une matrice inversible } P \text{ de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } D = P^{-1}AP \text{ soit une matrice diagonale.}}$$

Remarque Si nous ne le redisons pas, dans la suite P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $D = P^{-1}AP$ soit diagonale et $D = \text{Diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$.

b. Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.

$D = \text{Diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$. $\text{Sp}\, A = \text{Sp}\, D = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$. Comme les valeurs propres de A sont des réels (strictement) positifs : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ d_i \geqslant 0$.

Posons $\Delta_0 = \text{Diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \ldots, \sqrt{d_n})$ et $R_0 = P\Delta_0P^{-1}$.

Notons que $A = PDP^{-1}$. De plus :

$\Delta_0^2 = \left(\text{Diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \ldots, \sqrt{d_n})\right)^2 = \text{Diag}\left(\left(\sqrt{d_1}\right)^2, \left(\sqrt{d_2}\right)^2, \ldots, \left(\sqrt{d_n}\right)^2\right) = \text{Diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n) = D.$

Alors $R_0^2 = (P\Delta_0 P^{-1})^2 = P\Delta_0^2 P^{-1} = PDP^{-1} = A$. R_0 est une racine carrée de A.

Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.

Si $D = \text{Diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ alors $P\,\text{Diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \ldots, \sqrt{d_n})P^{-1}$ est une racine carrée de A.

c. $AR = R^2R = R^3 = RR^2 = RA$.

Si R est une racine carré de $A : AR = RA$.

Soit $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Notons f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ de matrices A et R dans la base $\mathcal{B}_0$. f a n valeurs propres deux à deux distinctes car c'est le cas pour A par hypothèse. De plus $f \circ g = g \circ f$ car $AR = RA$.

P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ et une seule telle que P soit la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$.

Remarque Si $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ *et si* $P = (p_{i,j})$, $\mathcal{B} = ({e'}_1, {e'}_2, \ldots, {e'}_n)$ *avec, pour tout* j *dans* $[\![1, n]\!]$, $e'_j = \sum\limits_{i=1}^{n} p_{i,j}\, e_i$.

$D = P^{-1}AP$ est alors la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Comme D est diagonale, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de f. **1.c** permet alors de dire que la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale.

Or la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est $P^{-1}RP$. Ainsi $P^{-1}RP$ est diagonale.

Si R est une racine carré de A et si P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale alors $P^{-1}RP$ est diagonale.

d. P est toujours une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale. $D = \text{Diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$.

Notons que $\text{Sp}\, A = \text{Sp}\, D = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$. Par hypothèse les valeurs propres de A sont strictement positives. Par conséquent les réels d_1, d_2, ..., d_n sont strictement positifs.

Ce qui précède montre que si R est une racine carrée de A alors il existe une matrice diagonale Δ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}RP = \Delta$ ou $R = P\Delta P^{-1}$.

Ainsi les racines carrées de A sont du type $P\Delta P^{-1}$ où Δ est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il est donc légitime de rechercher les racines carrées de A sous la forme $P\Delta P^{-1}$ où Δ est une matrice diagonale.

Soit alors une matrice diagonale $\Delta = \mathrm{Diag}(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Posons $R = P\Delta P^{-1}$.

$R^2 = A \Longleftrightarrow \left(P\Delta P^{-1}\right)^2 = PDP^{-1} \Longleftrightarrow P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} \Longleftrightarrow \Delta^2 = D$.

Notons que la dernière équivalence est justifiée par le fait que P est inversible.

$R^2 = A \Longleftrightarrow (\mathrm{Diag}(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n))^2 = \mathrm{Diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n) \Longleftrightarrow \mathrm{Diag}(\delta_1^2, \delta_2^2, \ldots, \delta_n^2) = \mathrm{Diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$.

$R^2 = A \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \delta_i^2 = d_i \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \exists \varepsilon_i \in \{-1, 1\},\ \delta_i = \varepsilon_i \sqrt{d_i}$.

Ainsi l'ensemble des racines carrées de A est l'ensemble

$$\mathcal{R} = \left\{ P\,\mathrm{Diag}\left(\varepsilon_1 \sqrt{d_1}, \varepsilon_2 \sqrt{d_2}, \ldots, \varepsilon_n \sqrt{d_n}\right) P^{-1}\,;\ (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n \right\}.$$

Comme $\{-1, 1\}^n$ a 2^n éléments il semble assez clair que $\mathcal{R}$ a également 2^n éléments.

Démontrons le (cela ne s'impose pas le jour du concours ! !) en prouvant que $\{-1, 1\}^n$ et $\mathcal{R}$ sont équipotents c'est à dire qu'il existe une bijection de l'un vers l'autre.

Posons $\forall (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n,\ \psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) = P\,\mathrm{Diag}\left(\varepsilon_1 \sqrt{d_1}, \varepsilon_2 \sqrt{d_2}, \ldots, \varepsilon_n \sqrt{d_n}\right) P^{-1}$.

Le résultat obtenu plus haut indique clairement que ψ est une application surjective de $\{-1, 1\}^n$ dans $\mathcal{R}$.

Montrons qu'elle est injective. Soient $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ et $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_n)$ deux éléments de $\{-1, 1\}^n$ tels que $\psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) = \psi(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_n)$.

$P\,\mathrm{Diag}\left(\varepsilon_1 \sqrt{d_1}, \varepsilon_2 \sqrt{d_2}, \ldots, \varepsilon_n \sqrt{d_n}\right) P^{-1} = P\,\mathrm{Diag}\left(\varepsilon'_1 \sqrt{d_1}, \varepsilon'_2 \sqrt{d_2}, \ldots, \varepsilon'_n \sqrt{d_n}\right) P^{-1}$.

En multipliant à droite par P et à gauche par P^{-1} il vient :

$\mathrm{Diag}\left(\varepsilon_1 \sqrt{d_1}, \varepsilon_2 \sqrt{d_2}, \ldots, \varepsilon_n \sqrt{d_n}\right) = \mathrm{Diag}\left(\varepsilon'_1 \sqrt{d_1}, \varepsilon'_2 \sqrt{d_2}, \ldots, \varepsilon'_n \sqrt{d_n}\right)$.

Alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\varepsilon_i \sqrt{d_i} = \varepsilon'_i \sqrt{d_i}$. Or $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sqrt{d_i} \neq 0$. Ainsi $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\varepsilon_i = \varepsilon'_i$.

Donc $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) = (\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_n)$. Ceci achève de montrer l'injectivité de ψ.

ψ est donc bijective et ainsi le cardinal de $\mathcal{R}$ est celui de $\{-1, 1\}^n$ c'est à dire 2^n.

$$\boxed{A \text{ possède exactement } 2^n \text{ racines carrées.}}$$

Partie IV - Racine carrée symétrique positive d'une matrice symétrique positive de $\mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{R})$

Dans la suite $\|.\|$ est la norme associée au produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Soit λ une valeur propre de S. Soit X un vecteur propre associé.

Comme S est positive : ${}^tXSX \geqslant 0$. Alors $0 \leqslant {}^tXSX = {}^tX(\lambda\, X) = \lambda\, {}^tXX = \lambda\, \|X\|^2$.

Donc $0 \leqslant \lambda\, \|X\|^2$ et $\|X\|^2 > 0$ car X n'est pas nul. Par conséquent : $\lambda \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Toutes les valeurs propres de } S \text{ sont positives ou nulles.}}$$

2. S est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'après le cours :

$$\boxed{\text{il existe une matrice orthogonale } P \text{ de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que la matrice } D = P^{-1}SP \text{ soit diagonale.}}$$

3. Posons $D = \mathrm{Diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$. $\mathrm{Sp}\, A = \mathrm{Sp}\, D = \{d_1, d_2, \ldots d_n\}$.

Comme les valeurs propres de S sont positives ou nulles, les réels d_1, d_2, ..., d_n sont positifs ou nuls.

Posons $\Delta_0 = \mathrm{Diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \ldots, \sqrt{d_n})$ et $R_0 = P\Delta_0 P^{-1}$.

Notons que $S = PDP^{-1}$. De plus :

$\Delta_0^2 = \big(\mathrm{Diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \ldots, \sqrt{d_n})\big)^2 = \mathrm{Diag}\Big(\big(\sqrt{d_1}\big)^2, \big(\sqrt{d_2}\big)^2, \ldots, \big(\sqrt{d_n}\big)^2\Big) = \mathrm{Diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n) = D.$

Alors $R_0^2 = (P\Delta_0 P^{-1})^2 = P\Delta_0^2 P^{-1} = PDP^{-1} = S$. R_0 est une racine carrée de S.

Montrons alors que R_0 est symétrique et positive. Rappelons que P est orthogonale ; ainsi $P^{-1} = {}^tP$. Notons également que Δ_0 est symétrique car elle diagonale.

${}^tR_0 = {}^t(P\Delta_0 P^{-1}) = {}^t(P\Delta_0 {}^tP) = {}^t({}^tP)\, {}^t\Delta_0 {}^tP = P\, {}^t\Delta_0 {}^tP = P\Delta_0 {}^tP = P\Delta_0 P^{-1} = R_0$; R_0 est symétrique.

Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $Y = P^{-1}X$.

Il existe un élément $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. De plus $Y = {}^tPX$.

Alors ${}^tXR_0X = {}^tXP\Delta_0 P^{-1}X = {}^tXP\Delta_0 {}^tPX = {}^t({}^tPX)\Delta_0 {}^tPX = {}^tY\Delta_0 Y$.

$${}^tXR_0X = (y_1\, y_2\, \cdots\, y_n)\, \mathrm{Diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \ldots, \sqrt{d_n}) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (y_1\, y_2\, \cdots\, y_n) \begin{pmatrix} \sqrt{d_1}\, y_1 \\ \sqrt{d_2}\, y_2 \\ \vdots \\ \sqrt{d_n}\, y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \big(y_i \sqrt{d_i}\, y_i\big).$$

Alors ${}^tXR_0X = \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{d_i}\, y_i^2$ donc ${}^tXR_0X$ est positif ou nul. Ceci achève de montrer que R_0 est positive.

Donc R_0 est une racine carrée symétrique et positive de S.

> Soit P une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}SP$ soit une matrice diagonale.
>
> Si $D = \mathrm{Diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ alors $P\, \mathrm{Diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \ldots, \sqrt{d_n})P^{-1}$ est une racine carrée symétrique et positive de S.

4. a. Soit λ une valeur propre de R. Soit X un élément de SEP (R, λ).

$SX = R^2 X = R(RX) = R(\lambda X) = \lambda RX = \lambda(\lambda X) = \lambda^2 X$; $SX = \lambda^2 X$.

Ainsi SEP $(R, \lambda) \subset \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid SX = \lambda^2 X\}$. Comme SEP (R, λ) n'est pas réduit au vecteur nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il en est de même pour $\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid SX = \lambda^2 X\}$.

Alors λ^2 est une valeur propre de S et : SEP $(R, \lambda) \subset \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid SX = \lambda^2 X\} =$ SEP $\left(S, \lambda^2\right)$.

$$\boxed{\text{Si } \lambda \text{ est une valeur propre de } R,\ \lambda^2 \text{ est une valeur propre de } S \text{ et SEP } (R, \lambda) \subset \text{SEP } \left(S, \lambda^2\right).}$$

b. Soit X un élément de $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} \text{SEP } (R, \lambda_i)$.

Il existe un élément $(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ de $\displaystyle\prod_{i=1}^{p} \text{SEP } (R, \lambda_i)$ tel que $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} X_i$.

Or $\forall i \in [\![1, p]\!]$, SEP $(R, \lambda_i) \subset$ SEP $\left(S, \lambda_i^2\right)$ donc $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $X_i \in$ SEP $\left(S, \lambda_i^2\right)$.

Alors $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \in \bigoplus_{i=1}^{p} \text{SEP } \left(S, \lambda_i^2\right)$. Finalement :

$$\boxed{\bigoplus_{i=1}^{p} \text{SEP } (R, \lambda_i) \subset \bigoplus_{i=1}^{p} \text{SEP } \left(S, \lambda_i^2\right).}$$

c. $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} \text{SEP } (R, \lambda_i) \subset \bigoplus_{i=1}^{p} \text{SEP } \left(S, \lambda_i^2\right)$ donc $\dim \left(\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} \text{SEP } (R, \lambda_i)\right) \leqslant \dim \left(\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} \text{SEP } \left(S, \lambda_i^2\right)\right)$.

Ces sommes étant directes : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim \text{SEP } (R, \lambda_i) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim \text{SEP } \left(S, \lambda_i^2\right)$.

λ_1, λ_2, ..., λ_p sont LES valeurs propres de R et R est diagonalisable car R est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim \text{SEP } (R, \lambda_i) = n$.

λ_1^2, λ_2^2, ..., λ_p^2 sont DES valeurs propres de S et la somme des dimensions des sous-espaces propres de S n'exède pas n (en fait elle vaut ici n, car S est diagonalisable !) ; ainsi $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim \text{SEP } \left(S, \lambda_i^2\right) \leqslant n$.

$$\boxed{n = \sum_{i=1}^{p} \dim \text{SEP } (R, \lambda_i) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim \text{SEP } \left(S, \lambda_i^2\right) \leqslant n.}$$

d. Dans ces conditions $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim \text{SEP } \left(S, \lambda_i^2\right) = n$. Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres de S est inférieure ou égale à n, S ne peut pas avoir d'autres valeurs propres que λ_1^2, λ_2^2, ..., λ_p^2.

$$\boxed{\lambda_1^2,\ \lambda_2^2,\ \ldots,\ \lambda_p^2 \text{ sont les seules valeurs propres de } S.}$$

$\forall i \in [\![1,p]\!],\ \text{SEP}\ (R,\lambda_i) \subset \text{SEP}\ \left(S,\lambda_i^2\right)$ donc $\forall i \in [\![1,p]\!],\ \dim \text{SEP}\ (R,\lambda_i) \leqslant \dim \text{SEP}\ \left(S,\lambda_i^2\right)$.

Rappelons que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim \text{SEP}\ (R,\lambda_i) = n = \sum_{i=1}^{p} \dim \text{SEP}\ \left(S,\lambda_i^2\right)$.

Supposons alors qu'il existe un élément i_0 de $[\![1,p]\!]$ tel que $\dim \text{SEP}\ (R,\lambda_{i_0}) < \dim \text{SEP}\ \left(S,\lambda_{i_0}^2\right)$.

$$\sum_{i=1}^{p} \dim \text{SEP}\ (R,\lambda_i) = \sum_{i\in[\![1,p]\!]-\{i_0\}} \dim \text{SEP}\ (R,\lambda_i) + \text{SEP}\ (R,\lambda_{i_0}).$$

$$\sum_{i=1}^{p} \dim \text{SEP}\ (R,\lambda_i) \leqslant \sum_{i\in[\![1,p]\!]-\{i_0\}} \dim \text{SEP}\ \left(S,\lambda_i^2\right) + \text{SEP}\ (R,\lambda_{i_0}).$$

$$\sum_{i=1}^{p} \dim \text{SEP}\ (R,\lambda_i) < \sum_{i\in[\![1,p]\!]-\{i_0\}} \dim \text{SEP}\ \left(S,\lambda_i^2\right) + \text{SEP}\ \left(S,\lambda_{i_0}^2\right).$$

Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \dim \text{SEP}\ (R,\lambda_i) < \sum_{i=1}^{p} \dim \text{SEP}\ \left(S,\lambda_i^2\right)$. D'où une légère contradiction.

Ainsi $\forall i \in [\![1,p]\!],\ \dim \text{SEP}\ (R,\lambda_i) = \dim \text{SEP}\ \left(S,\lambda_i^2\right)$. De plus $\forall i \in [\![1,p]\!],\ \text{SEP}\ (R,\lambda_i) \subset \text{SEP}\ \left(S,\lambda_i^2\right)$. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ étant un espace vectoriel de dimension finie, on a alors :

$$\boxed{\text{pour tout élément } i \text{ de } [\![1,p]\!],\ \text{SEP}\ (R,\lambda_i) = \text{SEP}\ \left(S,\lambda_i^2\right).}$$

e. Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, notons C_i la $i^{\text{ème}}$ colonne de P. Comme P est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(C_1,C_2,\ldots,C_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Notons que P est alors la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $(C_1,C_2,\ldots,C_n)$.

De plus $P^{-1}SP$ est une matrice diagonale donc $(C_1,C_2,\ldots,C_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de S.

$\text{Sp}\, R = \{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p\}$, $\text{Sp}\, S = \{\lambda_1^2,\lambda_2^2,\ldots,\lambda_p^2\}$ et $\forall i \in [\![1,p]\!], \text{SEP}\ (R,\lambda_i) = \text{SEP}\ \left(S,\lambda_i^2\right)$. Alors R et S ont les mêmes vecteurs propres.

Ainsi $(C_1,C_2,\ldots,C_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de R.

Comme P est alors la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $(C_1,C_2,\ldots,C_n)$:

$$\boxed{P^{-1}RP \text{ est une matrice diagonale.}}$$

f. Supposons que que R' soit une seconde racine carrée symétrique et positive de S.

D'après ce qui précède : $P^{-1}RP$ et $P^{-1}R'P$ sont deux matrices diagonales.

Posons $P^{-1}RP = \text{Diag}(r_1,r_2,\ldots,r_n)$ et $P^{-1}R'P = \text{Diag}({r'}_1,{r'}_2,\ldots,{r'}_n)$.

$\text{Diag}\,(r_1^2,r_2^2,\ldots,r_n^2) = (\text{Diag}(r_1,r_2,\ldots,r_n))^2 = (P^{-1}RP)^2 = P^{-1}R^2P = P^{-1}SP$.

De même $\mathrm{Diag}\,({r'_1}^2, {r'_2}^2, \ldots, {r'_n}^2) = P^{-1}SP$. Ainsi $\mathrm{Diag}\,(r_1^2, r_2^2, \ldots, r_n^2) = \mathrm{Diag}\,({r'_1}^2, {r'_2}^2, \ldots, {r'_n}^2)$.

Alors $\forall i \in [\![1, n]\!],\ r_i^2 = {r'_i}^2$.

R est une matrice symétrique positive. On montre alors comme dans **1.** que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

Or : $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\} = \mathrm{Sp}\,\mathrm{Diag}(r_1, r_2, \ldots, r_n) = \mathrm{Sp}(P^{-1}RP) = \mathrm{Sp}\,R$.

Ainsi r_1, r_2, ..., r_n sont des réels positifs ou nuls. On montre de même que r'_1, r'_2, ..., r'_n sont des réels positifs ou nuls.

$\forall i \in [\![1, n]\!],\ r_i^2 = {r'_i}^2$ donne alors $\forall i \in [\![1, n]\!],\ r_i = r'_i$.

Dans ces conditions $\mathrm{Diag}(r_1, r_2, \ldots, r_n) = \mathrm{Diag}({r'}_1, {r'}_2, \ldots, {r'}_n)$ et ainsi $P^{-1}RP = P^{-1}R'P$.

En multipliant à droite par P^{-1} et à gauche par P il vient $R = R'$.

$$\boxed{S \text{ admet une unique racine carrée symétrique positive.}}$$

Remarque *Résultat on ne peut plus classique mais obtenu de manière bien laborieuse...*
