CORRIGÉ ESSEC 2008 Scientifique

Première partie

1. **a)** On vérifie aisément que Δ est bien une application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ (pour tout polynôme P, $\Delta(\mathrm{P})$ est bien un polynôme) et qu'elle est linéaire ($\forall(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathscr{P}^2$, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, $\Delta(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q}) = \lambda\Delta(\mathrm{P})+\Delta(\mathrm{Q})$). Donc :

$$\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme de } \mathscr{P}.}$$

b) Soit $\mathrm{P} \in \mathscr{P}$ de degré $r > 0$. Il existe donc des réels $a_0, a_1, \ldots, a_r$, avec $a_r \neq 0$, tels que $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{r} a_k \mathrm{X}^k$.

On aura alors $\Delta(\mathrm{P}) = \sum_{k=0}^{r} a_k\left[(\mathrm{X}+1)^k - \mathrm{X}^k\right] = \sum_{k=1}^{r} a_k\left[(\mathrm{X}+1)^k - \mathrm{X}^k\right]$, les termes constant se simplifiant.

Or, d'après la formule du binôme, pour tout $k \geqslant 1$, $(\mathrm{X}+1)^k - \mathrm{X}^k = \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k}{i}\mathrm{X}^i$ est un polynôme de degré exactement $k-1$. Puisque $a_r \neq 0$:

$$\boxed{\text{le degré de } \Delta(\mathrm{P}) \text{ est donc égal à } r-1.}$$

c)
- Il est clair que, si P est un polynôme constant, $\Delta(\mathrm{P}) = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{P} \in \operatorname{Ker}\Delta$;
- et, d'après la question précédente, si P n'est pas constant (donc de degré $r \geqslant 1$), $\Delta(\mathrm{P})$ ne peut être nul (car de degré $r-1$).

En conclusion :

$$\boxed{\operatorname{Ker}\Delta \text{ est exactement l'ensemble des polynômes constants, } \mathscr{P}_0.}$$

2. **a)** On a vu en 1.a que, si P est de degré $d \geqslant 1$, alors $\Delta(\mathrm{P})$ est de degré $d-1$; et si P est de degré 0 (donc constant), alors $\Delta(\mathrm{P}) = 0$ est de degré $-\infty$.

Donc, si $\mathrm{P} \in \mathscr{P}_r$, alors $\deg(\mathrm{P}) \leqslant r$ et $\Delta(\mathrm{P})$ est de degré inférieur ou égal à $r-1$. Ainsi, $\Delta(\mathscr{P}_r) \subset \mathscr{P}_{r-1} \subset \mathscr{P}_r$; le sous-espace vectoriel $\mathscr{P}_r$ étant stable par Δ, on peut donc considérer l'endomorphisme Δ_r induit par Δ sur $\mathscr{P}_r$.

$$\boxed{\Delta_r \text{ est un endomorphisme de } \mathscr{P}_r.}$$

b) De façon immédiate : $\operatorname{Ker}\Delta_r = \operatorname{Ker}\Delta \cap \mathscr{P}_r = \operatorname{Ker}\Delta = \mathscr{P}_0$.

c) On a déjà vu à la question 2.a que $\operatorname{Im}\Delta_r \subset \mathscr{P}_{r-1}$.

On vient aussi de voir que $\dim\operatorname{Ker}\Delta_r = \dim\mathscr{P}_0 = 1$; d'après le théorème du rang, on aura donc

$$\dim\operatorname{Im}\Delta_r = \dim\mathscr{P}_r - \dim\operatorname{Ker}\Delta_r = (r+1)-1 = r = \dim\mathscr{P}_{r-1}.$$

Les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im}\Delta_r$ et $\mathscr{P}_{r-1}$ étant inclus l'un dans l'autre et de même dimension, ils sont égaux :

$$\boxed{\operatorname{Im}\Delta_r = \mathscr{P}_{r-1}.}$$

d) Soit Q un polynôme quelconque.
- Si $\mathrm{Q} = 0$, on a $\mathrm{Q} = \Delta(0)$;
- sinon, il existe $r \geqslant 1$ tel que $\mathrm{Q} \in \mathscr{P}_{r-1}$. D'après la question précédente, Q appartient à l'image de Δ_r, c'est-à-dire qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathscr{P}_r$ tel que $\mathrm{Q} = \Delta_r(\mathrm{P}) = \Delta(\mathrm{P})$.

Dans les deux cas, on a prouvé l'existence d'un antécédent à Q par Δ, donc :

$$\boxed{\Delta \text{ est surjective de } \mathscr{P} \text{ dans } \mathscr{P}.}$$

3. Notons φ l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout polynôme P associe sa valeur en 0, P(0). φ est trivialement une forme linéaire sur $\mathscr{P}$. L'ensemble $\mathscr{E}$ est alors l'ensemble des polynômes P tels que $\varphi(\mathrm{P})=0$ c'est-à-dire le noyau de φ.

Il en résulte que $\mathscr{E}$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{P}$ (ce qui était admis par l'énoncé), mais surtout que c'est un *hyperplan* de $\mathscr{P}$. D'après le cours, toute droite vectorielle qui n'est pas incluse dans cet hyperplan en est un supplémentaire. C'est le cas de $\mathscr{P}_0$ (ensemble des polynômes constants), donc on a

$$\mathscr{P}=\mathscr{E}\oplus\mathscr{P}_0 .$$

(ce résultat pouvait aussi se démontrer de manière élémentaire en revenant à la définition de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires).

Le résultat demandé est donc une simple conséquence du fait que $\operatorname{Im}\Delta=\mathscr{P}$ (car Δ surjective) et du célèbre *théorème d'isomorphisme* que je rappelle ci-dessous :

> Soit u une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F.
>
> La restriction de u à tout supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ est un isomorphisme de ce supplémentaire sur $\operatorname{Im} u$.

4. a) Notons u la restriction de Δ à $\mathscr{E}$. On vient donc d'établir que $u : \left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{E} & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \Delta(\mathrm{P}) \end{array}\right.$ est un isomorphisme.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. La propriété de l'énoncé : « $\mathrm{N}_n(0)=0$ et $\Delta(\mathrm{N}_n)=\mathrm{N}_{n-1}$ » est équivalente à : « $\mathrm{N}_n\in\mathscr{E}$ et $u(\mathrm{N}_n)=\mathrm{N}_{n-1}$ ». ou encore à « N_n est l'antécédent de N_{n-1} par u ».

La suite N_n est donc *la* suite définie par récurrence par

$$\mathrm{N}_0=1 \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N}^* ,\ \mathrm{N}_n=u^{-1}(\mathrm{N}_{n-1}).$$

b) Procédons par récurrence sur n.

- La formule de l'énoncé est vraie pour $n=1$: en effet, par définition, N_1 est un polynôme de $\mathscr{E}$ tel que $\Delta(\mathrm{N}_1)=\mathrm{N}_0=1$. D'après les propriétés sur les degrés vues à la question 1, N_1 est nécessairement de degré 1 ; puisque $\mathrm{N}_1(0)=0$, il existe a réel tel que $\mathrm{N}_1=a\mathrm{X}$. Enfin, la relation $\mathrm{N}_1(\mathrm{X}+1)-\mathrm{N}_1(\mathrm{X})=1$ implique $a=1$.
  Donc $\mathrm{N}_1=\mathrm{X}$, et la formule de l'énoncé est vraie au rang 1.

- Supposons dénontrée l'égalité au rang $n-1\geqslant 1$, c'est-à-dire $\mathrm{N}_{n-1}=\dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-2}(\mathrm{X}-k)$.

  Posons alors $\mathrm{P}_n=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(\mathrm{X}-k)$. Pour montrer que $\mathrm{N}_n=\mathrm{P}_n$, il suffit de démontrer, par unicité, que P_n appartient bien à $\mathscr{E}$ et que $\Delta\mathrm{P}_n=\mathrm{N}_{n-1}$:
  – Le fait que $\mathrm{P}_n\in\mathscr{E}$ est immédiat ($\mathrm{P}_n(0)=0$).
  – En écrivant $\mathrm{P}_n=\dfrac{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\dots(\mathrm{X}-n+1)}{n!}$ on a

$$\begin{aligned}\Delta(\mathrm{P}_n)=\mathrm{P}_n(\mathrm{X}+1)-\mathrm{P}_n(\mathrm{X}) &= \frac{(\mathrm{X}+1)\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\dots(\mathrm{X}-n+2)}{n!}-\frac{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\dots(\mathrm{X}-n+1)}{n!}\\ &= \frac{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\dots(\mathrm{X}-n+2)}{n!}\underbrace{\big[(\mathrm{X}+1)-(\mathrm{X}-n+1)\big]}_{=n}\\ &= \frac{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\dots(\mathrm{X}-n+2)}{(n-1)!}=\mathrm{N}_{n-1}\end{aligned}$$

  On a donc bien $\mathrm{N}_n=\mathrm{P}_n$, ce qui établit la formule à l'ordre n et achève la démonstration.

c)
- La famille de polynômes $(\mathrm{N}_n)_{n\in[0,r]}$ est une famille de polynômes de degrés distincts (puisque $\deg(\mathrm{N}_n)=n$ pour tout n). D'après un résultat du cours, elle est donc libre.

  De plus, il s'agit d'une famille de $r+1$ éléments de l'espace vectoriel $\mathscr{P}_r$ qui est de dimension $r+1$. Toujours d'après le cours, on peut conclure :

$$\boxed{\text{La famille } (\mathrm{N}_n)_{n\in[0,r]} \text{ est une base de } \mathscr{P}_r .}$$

- La famille de polynômes $(\mathrm{N}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre car formée de polynômes de degrés distincts.
  De plus, si P est un polynôme quelconque de $\mathscr{P}$, il existe r entier tel que $\mathrm{P}\in\mathscr{P}_r$. D'après le résultat précédent, P sera donc combinaison linéaire des N_n pour $0\leqslant n\leqslant r$, donc a fortiori des N_n pour $n\in\mathbb{N}$.
  Cela signifie que la famille $(\mathrm{N}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est génératrice de $\mathscr{P}$ et par suite :

$$\boxed{(\mathrm{N}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une base de } \mathscr{P}\,.}$$

d) • Soit Q de degré $\leqslant r$. Puisque $(\mathrm{N}_n)_{n\in[0,r]}$ est une base de $\mathscr{P}_r$, il existe des coefficients réels $a_0, a_1, \ldots, a_r$ tels que $\mathrm{Q} = \sum_{n=0}^{r} a_n \mathrm{N}_n$.

Pour tout entier $k \in [\![0, r]\!]$ on aura alors, par linéarité

$$\Delta^k(\mathrm{Q}) = \sum_{n=0}^{r} a_n \Delta^k(\mathrm{N}_n) \quad (1)$$

Mais $\Delta(\mathrm{N}_0) = 0$ et $\Delta(\mathrm{N}_n) = \mathrm{N}_{n-1}$ si $n \geqslant 1$, donc par une récurrence facile on a

$$\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ \Delta^k(\mathrm{N}_n) = \begin{cases} \mathrm{N}_{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En reportant dans (1) on obtient

$$\Delta^k(\mathrm{Q}) = \sum_{n=k}^{r} a_n \mathrm{N}_{n-k} = a_k + \sum_{n=k+1}^{r} a_n \mathrm{N}_{n-k}\,.$$

Puisque $\mathrm{N}_i(0) = 0$ si $i \geqslant 1$, en appliquant cette dernière relation en 0 il vient : $\Delta^k(\mathrm{Q})(0) = a_k$ donc on a bien

$$\boxed{\forall \mathrm{Q} \in \mathscr{P}_r\ ,\ \mathrm{Q} = \sum_{n=0}^{r} \Delta^n(\mathrm{Q})(0)\mathrm{N}_n\,.}$$

• Puisque $\Delta^n(\mathrm{Q}) = 0$ dès que n est strictement supérieur au degré de Q, on pourra donc écrire :

$$\boxed{\forall \mathrm{Q} \in \mathscr{P}\ ,\ \mathrm{Q} = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n(\mathrm{Q})(0)\mathrm{N}_n}$$

les termes de cette somme étant tous nuls à partir d'un certain rang.

e) Soit $\mathrm{P} \in \mathscr{P}$; on a aussi $\mathrm{P} = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n(\mathrm{P})(0)\mathrm{N}_n$ donc

$$\Delta(\mathrm{P}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n(\mathrm{P})(0)\Delta(\mathrm{N}_n) \underbrace{=}_{\substack{\text{car}\\ \Delta(\mathrm{N}_0)=0}} \sum_{n=1}^{+\infty} \Delta^n(\mathrm{P})(0)\mathrm{N}_{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^{n+1}(\mathrm{P})(0)\mathrm{N}_n$$

La famille (N_n) étant libre, l'égalité $\Delta(\mathrm{P}) = \mathrm{Q}$ est donc équivalente à

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \Delta^{n+1}(\mathrm{P})(0) = \Delta^n(\mathrm{Q})(0)$$

ou encore à

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \Delta^n(\mathrm{P})(0) = \Delta^{n-1}(\mathrm{Q})(0)$$

Les polynômes tels que $\Delta(\mathrm{P}) = \mathrm{Q}$ sont donc les polynômes de la forme

$$\boxed{\mathrm{P} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \Delta^{n-1}(\mathrm{Q})(0)\mathrm{N}_n \quad \text{avec } a_0 \text{ constante réelle quelconque.}}$$

f) • Si $\Delta(\mathrm{P}) = \mathrm{Q}$ on aura

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{Q}(k) = \sum_{k=0}^{n} \big[\mathrm{P}(k+1) - \mathrm{P}(k)\big] = \mathrm{P}(n+1) - \mathrm{P}(0)\,.$$

• On prend ici $\mathrm{Q} = \mathrm{X}^2$. Puisque $\mathrm{N}_1 = \mathrm{X}$ et $\mathrm{N}_2 = \dfrac{1}{2}\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)$ on a $\mathrm{Q} = 2\mathrm{N}_2 + \mathrm{N}_1$. D'après les calculs précédents, un polynôme P tel que $\Delta(\mathrm{P}) = \mathrm{Q}$ sera par exemple

$$\mathrm{P} = 2\mathrm{N}_3 + \mathrm{N}_2 = \frac{1}{3}\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2) + \frac{1}{2}\mathrm{X}(\mathrm{X}-1) = \frac{1}{6}\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)(2\mathrm{X}-1)\,.$$

On aura donc

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Q}(k) = \mathrm{P}(n+1) - \mathrm{P}(0) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\,.$$

(formule bien connue).

5. La formule demandée pouvait assez facilement s'établir par récurrence sur n, mais il y a une méthode plus rapide et plus belle :

Notons T l'endomorphisme de $\mathscr{P}$ défini par

$$\forall \mathrm{P} \in \mathscr{P} \ , \ \mathrm{T}(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1)$$

de sorte que $\Delta = \mathrm{T} - \mathrm{Id}$ (le fait que T soit un endomorphisme est immédiat).
Puisque les endomorphismes T et Id commutent, on peut appliquer la formule du binôme dans l'anneau $\mathscr{L}(\mathscr{P})$ et on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \Delta^n = (\mathrm{T} - \mathrm{Id})^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \mathrm{T}^i (-\mathrm{Id})^{n-i}$$

Par une récurrence immédiate, on a, pour tout $\mathrm{Q} \in \mathscr{P}$ et tout entier i : $\mathrm{T}^i(\mathrm{Q}) = \mathrm{Q}(\mathrm{X}+i)$. La relation précédente appliquée à Q donne alors immédiatement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \Delta^n(\mathrm{Q}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \mathrm{Q}(\mathrm{X}+i).}$$

6. **a)** Notons tout d'abord qu'on vérifierait facilement que $\mathrm{C}(\Delta_r)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathscr{P}_r)$. L'énoncé ne le précise pas, mais parle ensuite de sa dimension...

i. Soient $g, h \in \mathrm{C}(\Delta_r)$ tels que $g(\mathrm{N}_r) = h(\mathrm{N}_r)$. Puisque g et h commutent avec Δ_r on a

$$g(\mathrm{N}_{r-1}) = g \circ \Delta_r(\mathrm{N}_r) = \Delta_r \circ g(\mathrm{N}_r) = \Delta_r \circ h(\mathrm{N}_r) = h \circ \Delta_r(\mathrm{N}_r) = h(\mathrm{N}_{r-1})$$

et par récurrence descendante on obtient

$$\forall k \in [\![0, r]\!] \ , \ g(\mathrm{N}_k) = h(\mathrm{N}_k).$$

Ainsi g et h, endomorphismes de $\mathscr{P}_r$, coïncident sur une base de $\mathscr{P}_r$ donc

$$\boxed{g = h.}$$

ii. immédiat, puisque $(\mathrm{N}_n)_{n \in [0,r]}$ est une base de $\mathscr{P}_r$.

iii. • Soit $g \in \mathrm{C}(\Delta_r)$ et $a_0, a_1, \dots, a_r$ tels que $g(\mathrm{N}_r) = \sum_{n=0}^{r} a_n \mathrm{N}_n$. Puisque, pour $n \in [\![0, r]\!]$, $\mathrm{N}_n = \Delta_r^{r-n}(\mathrm{N}_r)$, on a $g(\mathrm{N}_r) = \left(\sum_{n=0}^{r} a_n \Delta_r^{r-n} \right) (\mathrm{N}_r)$.

Or l'endomorphisme de $\mathscr{P}_r$ défini par $h = \sum_{n=0}^{r} a_n \Delta_r^{r-n}$ est élément de $\mathrm{C}(\Delta_r)$ (vérification facile). Il résulte alors de la question 6.a.i que $g = h$ c'est-à-dire $g = \sum_{n=0}^{r} a_n \Delta_r^{r-n}$.

g est donc combinaison linéaire des Δ_r^k pour $0 \leqslant k \leqslant r$, c'est-à-dire que la famille $(\Delta_r^k)_{k \in [0,r]}$ est génératrice de $\mathrm{C}(\Delta_r)$.

• Montrons maintenant que cette famille est libre.

En effet, si on a $\sum_{k=0}^{r} a_k \Delta_r^k = 0$, alors en appliquant cette égalité à N_0, puisque $\Delta(\mathrm{N}_0) = 0$, on obtient $a_0 = 0$, puis en l'appliquant à N_1, puisque $\Delta(\mathrm{N}_1) = \mathrm{N}_0 = 1$ et $\Delta^2(\mathrm{N}_1) = 0$ on trouve $a_1 = 0$ etc... Ainsi, tous les a_k sont nuls, ce qui prouve que la famille est libre.

En conclusion :

$$\boxed{(\Delta_r^k)_{k \in [0,r]} \text{ est une base de } \mathrm{C}(\Delta_r).}$$

iv. Le fait que d et Δ commutent est immédiat.

S'il existait un entier r et des réels $a_0, a_1, \dots, a_r$ tels que $d = \sum_{k=0}^{r} a_k \Delta^k$, on aurait en particulier $\mathrm{N}'_{r+1} = d(\mathrm{N}_{r+1}) = \sum_{k=0}^{r} a_k \Delta^k(\mathrm{N}_{r+1}) = \sum_{k=0}^{r} a_k \mathrm{N}_{r+1-k}$. Mais tous les polynômes N_{r+1-k} pour $0 \leqslant k \leqslant r$ s'annulent en 0. On aurait donc $\mathrm{N}'_{r+1}(0) = 0$ et 0 serait racine au moins double de N_{r+1}, ce qui n'est pas vrai (les racines de N_{r+1} sont simples, ce sont les entiers $0, 1, \dots, r$).
On a donc obtenu une contradiction. Cet exemple montre en fait que le commutant de Δ n'est pas réduit au sous-espace vectoriel engendré par les Δ^k, contrairement au commutant de Δ_r.

b) Supposons qu'il existe $g \in \mathscr{L}(\mathscr{P}_r)$ tel que $g \circ g = \Delta_r$. On aurait alors

$$g \circ \Delta_r = g^3 = \Delta_r \circ g$$

c'est-à-dire que g commute avec Δ_r.

D'après ce qui précède, il existerait des réels $a_0, a_1, \ldots, a_r$ tels que $g = \sum_{k=0}^{r} a_k \Delta_r^k = a_0 \mathrm{Id} + a_1 \Delta_r + \ldots + a_r \Delta_r^r$.

On aurait alors $g \circ g = a_0^2 \mathrm{Id} + 2a_0 a_1 \Delta_r + \sum_{k=2}^{r} b_k \Delta_r^k$ où les b_k sont des réels dont la valeur importe peu.

Puisque la famille $(\Delta_r^k)_{k \in [0,r]}$ est libre, cela implique $a_0 = 0$ et $2a_0 a_1 = 1$, ce qui est impossible. Il y a donc contradiction et

$$\boxed{\text{Il n'existe pas d'endomorphisme } g \text{ de } \mathscr{P}_r \text{ tel que } g \circ g = \Delta_r.}$$

Seconde partie

1. Notons d'abord que les définitions de l'énoncé posent problème lorsque $n = 0$. On supposera donc $n \geqslant 1$ pour la suite.

On remarquera aussi que, puisque l'énoncé suppose $x \notin \mathbb{N}$, les $\mathrm{N}_n(x)$, donc les u_n, ne sont pas nuls.

a) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1n)^t \dfrac{\left|\mathrm{N}_{n+1}(x)\right|}{\left|\mathrm{N}_n(x)\right|} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^t \dfrac{|x-n|}{n+1} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{t-1} \dfrac{|x-n|}{n}$.

Pour n assez grand on aura $n - x > 0$ (x est fixé) donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{t-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)$$

puis

$$v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = (t-1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) = \frac{t-1-x}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit immédiatement :

- si $t \neq 1 + x$, $v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{t-1-x}{n}$: la série de terme général v_n diverge.
- si $t = 1 + x$, $v_n = \mathrm{O}\left(1n^2\right)$ et la série de terme général v_n converge.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \ln(u_n) - \ln(u_1)$ donc, compte tenu des résultats précédents :

- Si $t < 1 + x$: la série de terme général v_n diverge et $v_n < 0$ à partir d'un certain rang, donc $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} v_k\right) = -\infty$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
- Si $t > 1 + x$: la série de terme général v_n diverge et $v_n > 0$ à partir d'un certain rang, donc $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} v_k\right) = +\infty$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- Si $t = 1 + x$: la série de terme général v_n converge , donc la suite $(\ln(u_n))$ converge vers un certain réel ℓ_x et (u_n) converge vers un réel $\mathrm{C}(x) = \mathrm{e}^{\ell_x} > 0$.
  On a donc dans ce cas $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{1+x} \left|\mathrm{N}_n(x)\right| = \mathrm{C}(x)$ soir

$$\boxed{\left|\mathrm{N}_n(x)\right| \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\mathrm{C}(x)}{n^{x+1}}.}$$

Rem : les connaisseurs auront reconnu ici le critère de Duhamel-Raabe...

2. **a)** Si $f(x) = b^x$ on a

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} b^i = (b-1)^n$$

d'après la formule du binôme.

b) • Si $\mathrm{Q} = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{N}_k$, Q est de degré $\leqslant n$ et on a vu dans I.4.d que $\mathrm{Q} = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(\mathrm{Q})(0)\mathrm{N}_k$.

La famille des polynômes (N_k) étant libre, on en déduit

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!]\ ,\ a_k = \Delta^k \mathrm{Q}(0).}$$

• Soit R le polynôme de degré n tel que $\mathrm{R}(i) = f(i)$ pour tout $i \in [\![0,n]\!]$ (un tel polynôme existe et est unique d'après les résultats du cours sur les polynômes d'interpolation de Lagrange). D'après I.4.d, on a $\mathrm{R} = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(\mathrm{R})(0)\mathrm{N}_k$ et d'après I.5,

$$\Delta^k(\mathrm{R})(0) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \mathrm{R}(i) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(i) = a_k,$$

donc $\mathrm{R} = \mathrm{Q}$.

Par définition de R on a donc bien

$$\boxed{f(i) - \mathrm{Q}(i) = f(i) - \mathrm{R}(i) = 0 \text{ pour tout } i \in [\![0,n]\!].}$$

c) • Supposons dans un premier temps $x \notin [\![0,n]\!]$.

Soit $\varphi : t \mapsto f(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{N}_k(t) - \mathrm{N}_{n+1}(t)\mathrm{A}$, où A est le réel tel que $\varphi(x) = 0$ (A existe et est unique puisque l'équation $\varphi(x) = 0$ équivaut à $\mathrm{AN}_{n+1}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{N}_k(x)$ et que $\mathrm{N}_{n+1}(x)$ est non nul ici).

Puisque $\mathrm{N}_{n+1}(i) = 0$ pour tout $i \in [\![0,n]\!]$ et compte tenu du résultat de la question précédente, la fonction φ s'annule en $0, 1, \ldots, n$ et en x, c'est-à-dire en $n+2$ points distincts. Étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ (car f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ par hypothèse et les autres termes sont des fonctions polynomiales), l'application itérée du théorème de Rolle montre qu'il existe un réel θ tel que $\varphi^{(n+1)}(\theta) = 0$.

Mais $\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{N}_k$ est un polynôme de degré $\leqslant n$, donc sa dérivée $(n+1)$-ième est nulle et puisque le terme de plus haut degré de N_{n+1} est $\dfrac{\mathrm{X}^{n+1}}{(n+1)!}$, on a $\mathrm{N}_{n+1}^{(n+1)} = 1$. Ainsi, $\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \mathrm{A}$, et la relation $\varphi^{(n+1)}(\theta) = 0$ donne $\mathrm{A} = f^{(n+1)}(\theta)$.

En remplaçant A par cette valeur dans la relation $\varphi(x) = 0$ on trouve bien

$$\boxed{\forall x \geqslant 0\ ,\ \exists \theta \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{N}_k(x) + f^{(n+1)}(\theta)\mathrm{N}_{n+1}(x) \quad (2).}$$

• Enfin, cette propriété reste vraie lorsque $x \in [\![0,n]\!]$ d'après le résultat de la question II.2.b et puisque alors $\mathrm{N}_{n+1}(x) = 0$: il suffit de prendre θ quelconque.

d) • En reprenant les notations précédentes et compte tenu de l'hypothèse faite ici, on aura

$$\left|f^{(n+1)}(\theta)\mathrm{N}_{n+1}(x)\right| \leqslant \mathrm{M}n \left|\mathrm{N}_{n+1}(x)\right|$$

Or, d'après II.1.b, $\left|\mathrm{N}_{n+1}(x)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{C}(x)}{(n+1)^{x+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{C}(x)}{n^{x+1}}$, donc $n\left|\mathrm{N}_{n+1}(x)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{C}(x)}{n^x}$.

Pour $x > 0$ on en déduit $\lim_{n\to+\infty} f^{(n+1)}(\theta)\mathrm{N}_{n+1}(x) = 0$ et la relation (2) implique

$$\boxed{\forall x > 0\ ,\ f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{N}_k(x)}$$

cette relation restant trivialement vraie pour $x = 0$ puisque $a_0 = f(0)$ et $\mathrm{N}_k(0) = 0$ si $k \geqslant 1$.

• Si on suppose de plus $f(i) = 0$ pour tout entier i, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ $a_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(i) = 0$ d'où $f(x) = 0$ pour tout $x \geqslant 0$.

3. **a)** En reprenant le résultat de II.1.b, puisque $x \notin \mathbb{N}$:

$$h^n \left|\mathrm{N}_n(x)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{C}(x)\frac{h^n}{n^{x+1}}$$

donc si $|h|>1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|h^n\mathrm{N}_n(x)\right| = +\infty$ (croissances comparées) d'où

$$\boxed{\text{si } |h|>1, \text{ la série } \sum h^n\mathrm{N}_n(x) \text{ est grossièrement divergente.}}$$

b) On suppose ici $|h|<1$.

i. • Si $x = k \in \mathbb{N}$ alors $\mathrm{N}_n(x) = 0$ dès que $n \geqslant k+1$, donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} h^n\mathrm{N}_n(x)$ est convergente (somme finie).

• Sinon, on a toujours l'équivalent $h^n\left|\mathrm{N}_n(x)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{C}(x)\dfrac{h^n}{n^{x+1}}$, donc, toujours à l'aide des croissances comparées des suites usuelles, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2h^n\mathrm{N}_n(x) = 0$. Ainsi, $h^n\mathrm{N}_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, et d'après les théorèmes de comparaison sur les séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} h^n\mathrm{N}_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente.

ii. • La fonction $f : h \mapsto (1+h)^x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, on peut donc lui appliquer la formule de Taylor avec reste intégrale à tout ordre n entre 0 et h :

$$f(h) = \sum_{k=0}^{n} h^k \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^h \frac{(h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \quad (3)$$

Or, pour $k \geqslant 1$, $\dfrac{f^{(k)}(h)}{k!} = \dfrac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}(1+x)^{x-k} = \mathrm{N}_k(x)(1+h)^{x-k}$, cette dernière égalité restant vraie pour $k=0$ puisque $\mathrm{N}_0 = 1$, de sorte que la relation (3) devient

$$(1+h)^x = \sum_{k=0}^{n} h^k\mathrm{N}_k(x) + (n+1)\mathrm{N}_{n+1}(x)\int_0^h (h-t)^n(1+t)^{x-n-1}\,\mathrm{d}t$$

ce qui se réécrit en :

$$\boxed{(1+h)^x - \sum_{k=0}^{n} h^k\mathrm{N}_k(x) = (n+1)\mathrm{N}_{n+1}(x)\int_0^h \left(\frac{h-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{x-1}\,\mathrm{d}t \quad (4).}$$

• On a la majoration

$$\left|\frac{1}{h^n}\int_0^h \left(\frac{h-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{x-1}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{|h|^n}\left|\int_0^h \left|\frac{h-t}{1+t}\right|^n (1+t)^{x-1}\,\mathrm{d}t\right|$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{h-t}{1+t}$ est une fonction homographique, donc monotone ; ses valeurs extrémales sur $[0,h]$ sont donc obtenues pour $t=0$ et $t=h$; ce sont respectivement h^n et 0, de sorte que

$$\forall t \in [0,h] \text{ (ou } [h,0]) , \left|\frac{h-t}{1+t}\right|^n \leqslant |h^n|$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N} , \left|\frac{1}{h^n}\int_0^h \left(\frac{h-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{x-1}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_0^h (1+t)^{x-1}\,\mathrm{d}t\right|$$

(inutile de calculer la valeur de cette dernière intégrale, ce qui est important, c'est qu'elle ne dépend pas de n).

iii. Si x est entier, $\mathrm{N}_{n+1}(x) = 0$ dès que $n \geqslant x$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)\mathrm{N}_{n+1}(x)\displaystyle\int_0^h \left(\frac{h-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{x-1}\,\mathrm{d}t = 0$.

Sinon, l'équivalent $\left|N_{n+1}(x)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C(x)}{(n+1)^{x+1}}$ obtenu en II.1.b donne

$$\left|(n+1)N_{n+1}(x)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C(x)}{(n+1)^{x}}$$

D'après la question précédente, il existe une constante K telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \left|\int_0^h \left(\frac{h-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{x-1}\,dt\right| \leqslant K\,|h|^n$$

et, puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{h^n}{n^{x+1}} = 0$ (croissances comparées), on a encore $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (n+1)N_{n+1}(x) \int_0^h \left(\frac{h-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{x-1}\,dt =$

En utilisant alors la relation (4), on obtient

$$\boxed{\forall h \in]-1,1[\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ (1+h)^x = \sum_{k=0}^{+\infty} h^k N_k(x).}$$

c) On suppose ici $h = 1$.

i. Pour $x \leqslant -1$, x n'est pas un entier naturel et l'on a toujours $\left|N_n(x)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C(x)}{n^{x+1}}$. $x+1$ étant $\leqslant 0$, la suite $(N_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend donc pas vers 0 (car $C(x) > 0$) c'est-à-dire que

$$\boxed{\text{si } x \leqslant 1\text{, la série } \sum_{n\geqslant 0} N_n(x) \text{ est grossièrement divergente.}}$$

ii. En remplaçant h par 1 dans la relation de la question II.3.b.ii, on obtient

$$2^x - \sum_{k=0}^{n} N_k(x) = (n+1)N_{n+1}(x) \int_0^1 \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1}\,du \quad (5)$$

Or, pour $u \in [0,1]$, $0 \leqslant \dfrac{1-u}{1+u} \leqslant 1-u$ et $(1+u)^{x-1} \leqslant \max(1, 2^{x-1}) = M$ donc

$$\left|(n+1)N_{n+1}(x) \int_0^1 \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1}\,du\right| \leqslant M(n+1)\left|N_{n+1}(x)\right| \int_0^1 (1-u)^n\,du = M\left|N_{n+1}(x)\right| \quad (6).$$

Si x est un entier naturel, $N_{n+1}(x)$ est nul pour n assez grand, et sinon, l'équivalent $\left|N_{n+1}(x)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C(x)}{(n+1)^{x+1}}$ obtenu en II.1.b montre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} N_{n+1}(x) = 0$ puisqu'ici $x+1 > 0$.

On aura donc encore, d'après (6), $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (n+1)N_{n+1}(x) \int_0^1 \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1}\,du = 0$ ce qui prouve d'après (5) que

$$\boxed{\forall x > -1\ ,\ \sum_{k=0}^{+\infty} N_k(x) = 2^x.}$$

d) On examine donc ici le dernier cas, à savoir $h = -1$.

i. • Si x est un entier naturel, $(-1)^n N_n(x)$ est nul dès que $n \geqslant x+1$; dans ce cas, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n N_n(x)$ converge (somme finie).

Sinon, $\left|(-1)^n N_n(x)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C(x)}{n^{x+1}}$ où $C(x) > 0$, donc les théorèmes de comparaison sur les séries à termes positifs et les résultats sur les séries de Riemann montrent que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left|(-1)^n N_n(x)\right|$ converge si et seulement si $x > 0$.

En rassemblant les deux cas, on en déduit

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n N_n(x) \text{ est absolument convergente si et seulement si } x \geqslant 0.}$$

- Si $x \geqslant 0$, $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \mathrm{N}_n(x)$ est absolument convergente donc convergente.

  Si $x < 0$ et $n \geqslant 1$, $\mathrm{N}_n(x) = \dfrac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$ est du signe de $(-1)^n$ donc $(-1)^n\mathrm{N}_n(x)$ est positif et la convergence de la série équivaut alors à son absolue convergence, qui n'a pas lieu dans ce cas. En conclusion

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \mathrm{N}_n(x) \text{ est convergente si et seulement si } x \geqslant 0.}$$

ii. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}_n$ la propriété : « $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{N}_0(x) - \mathrm{N}_1(x) + \dots + (-1)^n\mathrm{N}_n(x) = (-1)^n\mathrm{N}_n(x-1)$ »

- Cette propriété est facilement vérifiée pour $n = 1$ puisque $\mathrm{N}_0(x) - \mathrm{N}_1(x) = 1 - x = -(x-1) = -\mathrm{N}_1(x-1)$.
- Si on la suppose vérifiée au rang n, alors

$$\begin{aligned}\mathrm{N}_0(x) - \mathrm{N}_1(x) + \dots + (-1)^n\mathrm{N}_n(x) + (-1)^{n+1}\mathrm{N}_{n+1}(x) &= (-1)^n\mathrm{N}_n(x-1) + (-1)^{n+1}\mathrm{N}_{n+1}(x)\\ &= (-1)^n\left[\Delta(\mathrm{N}_{n+1})(x-1) - \mathrm{N}_{n+1}(x)\right]\\ &= (-1)^n\left[\mathrm{N}_{n+1}(x-1+1) - \mathrm{N}_{n+1}(x-1) - \mathrm{N}_{n+1}(x)\right]\\ &= (-1)^{n+1}\mathrm{N}_{n+1}(x-1)\end{aligned}$$

  ce qui établit le résultat à l'ordre $n+1$ et achève la récurrence.

iii. La relation précédente s'écrit : $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{N}_k(x) = (-1)^n\mathrm{N}_n(x-1)$.

Si $x-1$ est un entier naturel, c'est-à-dire si $x \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{N}_k(x)$ est nul pour $k \geqslant x+1$ et $\mathrm{N}_n(x-1)$ est nul pour $n \geqslant x$, donc $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\mathrm{N}_k(x) = 0$.

Si $x = 0$, $\mathrm{N}_k(x) = 0$ pour $k \geqslant 1$ donc $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\mathrm{N}_k(x) = \mathrm{N}_0 = 1$.

Sinon, l'équivalent $\left|\mathrm{N}_n(x-1)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{C}(x)}{n^x}$ montre que $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{N}_n(x-1) = 0$ puisque $x > 0$, donc $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\mathrm{N}_k(x) = 0$.

La conclusion de toute la question II.3 est donc la suivante :

La relation $(1+h)^x = \sum_{k=0}^{+\infty}h^k\mathrm{N}_k(x)$ est vraie si et seulement si • $\lvert h\rvert < 1$ et x réel quelconque. • $h = 1$ et $x > -1$. • $h = -1$ et $x \geqslant 0$.