$\boxed{\text{MATHS C, BQ PT 2010}}$ – ANALYSE CLASSIQUE

(Corrigé Marc REZZOUK, mrezzouk@free.fr)

1 - Première partie

1. 1.a Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = \cos x > 0$. f est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, de dérivée strictement positive sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc f est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

1.b Par le théorème des valeurs intermédiaires, on sait que f réalise une bijection strictement croissante de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[f\left(-\frac{\pi}{2}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = [-1, 1]$. *[Que répondre d'autre à cette question ?]*

1.c i. *[le programme ne parle pas de difféomorphisme pour une fonction d'une variable (aberration du programme). Je trouve cette question assez hors-programme, il faut démontrer un résultat de cours connu des autres filières, il aurait mieux fallu admettre le résultat !]*

Soit $a \in]-1, 1[$. Montrons que f^{-1} est dérivable en a. (cela tient au fait que $f'(f^{-1}(a)) \neq 0$ mais c'est hors-programme).

Pour h assez petit, posons $x_h = f^{-1}(a+h) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi, $a + h = f(x_h)$.

Le programme nous dit que f^{-1} est continue sur $[-1, 1]$ donc $\lim_{h \to 0} x_h = x_0$.

On a

$$\frac{f^{-1}(a+h) - f^{-1}(a)}{h} = \frac{x_h - x_0}{f(x_h) - f(x_0)} = \left(\frac{f(x_h) - f(x_0)}{x_h - x_0}\right)^{-1} \underset{h \to 0}{\to} \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}.$$

Je suppose que le concepteur du sujet qui n'a pas scrupuleusement étudié le programme s'attendait plutôt à une réponse du genre, f ayant une dérivée non nulle sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et étant une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $]-1, 1[$, sa réciproque est de classe $\mathscr{C}^1$... résultat ne figurant malheureusement pas dans le programme (les résultats sur Arcsin sont plus ou moins admis en première période de PTSI...)

ii. $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \dfrac{1}{\cos\left(f^{-1}(x)\right)}$.

D'une part $f^{-1}(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos\left(f^{-1}(x)\right) > 0$, d'autre part $\cos^2\left(f^{-1}(x)\right) + \sin^2\left(f^{-1}(x)\right) = 1$.

Comme $\sin\left(f^{-1}(x)\right) = f\left(f^{-1}(x)\right) = x$, il vient $\cos\left(f^{-1}(x)\right) = \sqrt{1-x^2}$.

CONCLUSION : $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

iii. Par composition avec la fonction $u \mapsto u^{-1/2}$, $\left(f^{-1}\right)'$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

1.d Allure classique vue en première période de PTSI en présentant la symétrie par rapport à la première bissectrice.

2. 2.a $x \mapsto \alpha \operatorname{Arcsin}(x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ et $u \mapsto \cos(u)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, par composition g_α est de classe $\mathscr{C}^\infty$ (donc $\mathscr{C}^2$) sur $]-1, 1[$.

2.b Pour tout $x \in]-1, 1[$, $g'_\alpha(x) = -\dfrac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}} \sin(\alpha \operatorname{Arcsin} x)$.

2.c Puis

$$g''_\alpha(x) = \frac{-\alpha x}{(1-x^2)^{3/2}} \sin(\alpha \operatorname{Arcsin} x) - \frac{\alpha^2}{1-x^2} \cos(\alpha \operatorname{Arcsin} x)$$

$g''_\alpha(x) = \dfrac{x}{1-x^2} g'_\alpha(x) - \dfrac{\alpha^2}{1-x^2} g_\alpha(x)$ d'où le résultat.

2.d i. On suppose que pour $x \in]-1, 1[$, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_0 = y(0) = 1$ et $a_1 = y'(0) = 0$.

$$\begin{aligned}\left(1-x^2\right) y''(x) - xy'(x) + \alpha^2 y(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^2 a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} - \left(n^2 - \alpha^2\right) a_n\right] x^n \text{ (on rapporte tout à } n = 0)\end{aligned}$$

Comme cette série entière est supposée nulle sur $]-1,1[$, tous ses coefficients sont nuls, ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+2} = \frac{n^2-\alpha^2}{(n+1)(n+2)} a_n.$$

ii. Comme $a_1 = 0$, $a_3 = \dfrac{1-\alpha^2}{2\times 3} a_1 = 0$ et ainsi de suite par une récurrence rapide. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = 0$.

iii. On obtient immédiatement pour $p \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} a_{2p} &= \frac{(2p-2)^2-\alpha^2}{2p(2p-1)} \times \frac{(2p-4)^2-\alpha^2}{(2p-2)(2p-3)} \times \cdots \times \frac{0^2-\alpha^2}{2\times 1} \times a_0 \\ &= \frac{\prod\limits_{k=0}^{p-1}\left(4k^2-\alpha^2\right)}{(2p)!}. \end{aligned}$$

A partir de ces coefficients, on définit (synthèse du raisonnement) la série entière $\sum\limits_{p\geqslant 0} a_{2p}x^{2p}$.

Pour $x \neq 0$, posons $u_p = \left|a_{2p}x^{2p}\right|$. On a $\dfrac{u_{p+1}}{u_p} = \left|\dfrac{a_{2p+2}}{a_{2p}}\right| x^2 = \dfrac{\left|(2p)^2-\alpha^2\right|}{(2p+1)(2p+2)} x^2 \underset{p\to+\infty}{\to} x^2$.

D'après le théorème de d'Alembert sur les séries numériques, si $|x|<1$, la série est absolument convergente et si $|x|>1$, la série est divergente. Le rayon de convergence vaut 1. Les calculs effectués plus haut sont justifiés a posteriori. La série entière est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$.

2.e On peut reprendre les calculs précédents avec a_0 et a_1 quelconques.

On suppose que a_0 ou a_1 est non nul. S'il existe une solution polynômiale alors la suite (a_n) est stationnaire nulle donc il existe une $n \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{n^2-\alpha^2}{(n+1)(n+2)} = 0$ ce qui impose $\alpha = \pm n$ donc $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, supposons que α est un entier relatif.

Supposons pour fixer les idées que α est pair. On trouve alors une solution polynômiale (non triviale nulle) en posant $a_1 = 0$ et $a_0 = 1$.

(de même, en inversant si α est impair).

3. $g_1(x) = \cos(\operatorname{Arcsin}(x)) = \boxed{\sqrt{1-x^2}}$ (comme dans la question 1.c., avec $\cos(\operatorname{Arcsin}(x)) \geqslant 0$).

4. 4.a $g_2(x) = \cos(2\operatorname{Arcsin}(x)) = 2\cos^2(\operatorname{Arcsin}(x)) - 1 = 2\left(1-x^2\right) - 1 = \boxed{1-2x^2.}$

4.b $a_0 = 1$, $a_2 = -2$ et les autres a_n sont nuls.

5. 5.a $\mathrm{P}_1 = 1-2x^2$.

Soit $k \geqslant 1$, $\mathrm{P}_k(x) = \cos\left(2^k \operatorname{Arcsin}(x)\right) = 2\cos^2\left(2^{k-1}\operatorname{Arcsin}(x)\right) - 1 = \boxed{2\mathrm{P}_{k-1}^2(x) - 1.}$

Par récurrence immédiate P_k est un polynôme (pour $k \geqslant 1$).

Si on note d_k son degré et c_k son coefficient du terme de plus haut degré, on a $d_1 = 2$, $c_1 = -2$, $c_2 = 8 = 2^3$ et $d_k = 2d_{k-1}$ et $c_k = 2c_{k-1}^2$.

Il vient par récurrence rapide, $\boxed{d_k = 2^k}$

5.b On a pour $k \geqslant 2$, $c_k = 2c_{k-1}^2$.

Remarque. pour $k \geqslant 2$, $\boxed{c_k = 2^{2^k-1}.}$

(pour $k \geqslant 2$, $c_k = 2^{p_k}$. On a $p_{k+1} = 2p_k + 1$ et $p_2 = 3$ d'où $p_k = 2^k - 1$, suite arithmético-géométrique).

5.c i. $\mathrm{T}_0(\cos x) = \cos(0) = 1$ et $\mathrm{T}_1(\cos x) = \cos x$.

ii. $\mathrm{T}_{m+2}(\cos x) + \mathrm{T}_m(\cos x) = \cos((m+2)x) + \cos(mx) = 2\cos((m+1)x)\cos(x)$ (formule de trigonométrie) $= 2\cos(x)\,\mathrm{T}_{m+1}(\cos x)$.

iii. On en déduit que pour tout $u \in [-1,1]$, $\mathrm{T}_0 = 1$, $\mathrm{T}_1(u) = u$ et $\mathrm{T}_{m+2}(u) = 2u\mathrm{T}_{m+1}(u) - \mathrm{T}_m(u)$.

Par une récurrence immédiate, pour tout $m \geqslant 1$, $\mathrm{T}_m(u)$ est une expression polynômiale en u de degré m et de coefficient 2^{m-1}.

(polynôme de Tchebycheff déjà tombé 50.000 fois).

iv. La remarque permet d'écrire $\mathrm{P}_k(x) = \mathrm{T}_{2^k}(x) = \mathrm{T}_{2^{k-1}}(\cos(2\operatorname{Arcsin}(x))) = \mathrm{T}_{2^{k-1}}\left(1-2x^2\right)$.

Il vient, pour $k \geqslant 2$, $c_k = (-2)^{2^{k-1}} \times 2^{2^{k-1}-1} = 2^{2^k-1}$.

2 - Deuxième partie

1. 1.a Pour tout $x \in [-1,1]$, $\tilde{g}(x) = g_2(x) = 1 - 2x^2$ d'après la question I.4.a.

1.b Comme $\tilde{g}(-1) = \tilde{g}(1)$, la fonction $\tilde{g}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (et paire).

2. Comme $\tilde{g}$ est paire, pour tout $n \geqslant 1$, $b_n(\tilde{g}) = 0$.

$a_0(\tilde{g}) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} \tilde{g}(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \tilde{g}(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(1-2t^2\right)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{3}$.

Pour $n \geqslant 1$ avec $\omega = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$,

$$\begin{aligned} a_n(\tilde{g}) &= \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} \tilde{g}(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \tilde{g}(t)\cos(n\pi t)\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^1 \left(1-2t^2\right)\cos(n\pi t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$\displaystyle\int_0^1 \cos(n\pi t)\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^1 = 0$ et on effectue deux intégration par partie pour l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^2\cos(n\pi t)\mathrm{d}t$.

$$\begin{array}{ccccc} t^2 & \xrightarrow{\prime} & 2t & \xrightarrow{\prime} & 2 \\ \cos(n\pi t) & \xleftarrow{\prime} & \dfrac{\sin(n\pi t)}{n\pi} & \xleftarrow{\prime} & -\dfrac{\cos(n\pi t)}{n^2\pi^2} \end{array}.$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^2\cos(n\pi t)\mathrm{d}t &= \underbrace{\left[t^2\frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \frac{2t\sin(n\pi t)}{n\pi}\mathrm{d}t \\ &= \left[2t\frac{\cos(n\pi t)}{n^2\pi^2}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{\cos(n\pi t)}{n^2\pi^2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2} - 2\underbrace{\left[\frac{\sin(n\pi t)}{n^3\pi^3}\right]_0^1}_{=0} = \frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2}. \end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{a_n(\tilde{g}) = \dfrac{8(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2} \text{ pour } n \geqslant 1.}$

3. La fonction $\tilde{g}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux (car sa restriction à $[-1,1]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et que $\tilde{g}$ est continue, on peut faire une petite figure...), donc d'après le théorème de Dirichlet, sa série de Fourier converge vers la régularisée de $\tilde{g}$ qui n'est autre que $\tilde{g}$ car elle est continue.

Ainsi, on peut écrire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tilde{g}(x) = \dfrac{1}{3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)$.

4. 4.a i. On applique la question II.3 pour $x = 1$. Il vient $\tilde{g}(1) = -1 = \dfrac{1}{3} - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8}{n^2\pi^2}$.

D'où la formule bien connue $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$

ii. On applique la question II.3 pour $x = 0$. Il vient $\tilde{g}(0) = 1 = \dfrac{1}{3} - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}$.

D'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

On peut écrire $\displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} \frac{1}{(2n+1)^2} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{2\mathrm{N}} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, en passant à la limite lorsque N tend vers $+\infty$ (toutes les séries étant absolument convergentes), il vient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \times \frac{\pi^2}{6} = \boxed{\frac{\pi^2}{8}.}$

3 - Troisième partie

1. Notons que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^\beta \cos^2 x}$ est positive et continue sur $[0,+\infty[$.

Pour tout $x \geqslant 0$, $\dfrac{1}{1+x^\beta \cos^2 x} \geqslant \dfrac{1}{1+x^\beta}$ or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^\beta}$ diverge (car $\dfrac{1}{1+x^\beta} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^\beta}$, intégrale de Riemann, avec $\beta \leqslant 1$).

Par comparaison entre deux fonctions positives, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^\beta \cos^2 x}$ diverge.

2. 2.a Soit $p \in \mathbb{N}$. $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \mathrm{I}_{k,\beta} = \int_0^{(p+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^\beta \cos^2 x}$ donc si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^\beta \cos^2 x}$ converge alors la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \mathrm{I}_{k,\beta}$ converge (et sa somme vaut la valeur de l'intégrale).

Réciproquement, si l'intégrale diverge alors $\displaystyle\lim_{\mathrm{A}\to+\infty} \int_0^{\mathrm{A}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^\beta \cos^2 x} = +\infty$ (car l'intégrande est positive) donc $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \int_0^{(p+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^\beta \cos^2 x} = \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=0}^{p} \mathrm{I}_{k,\beta} = +\infty$, la série converge également.

2.b Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [k\pi,(k+1)\pi]$, on a

$$1+(k\pi)^\beta \cos^2 x \leqslant 1+x^\beta \cos^2 x \leqslant 1+((k+1)\pi)^\beta \cos^2 x$$

Donc par passage à l'inverse et intégration sur $[k\pi,(k+1)\pi]$,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+(k+1)^\beta \pi^\beta \cos^2 x} \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^\beta \cos^2 x} \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+k^\beta \pi^\beta \cos^2 x}.$$

2.c

$$\mathrm{J} = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{C}^2 \cos^2 x} \underset{t=\tan x}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\dfrac{\mathrm{C}^2}{1+t^2}} \times \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+\mathrm{C}^2)+t^2}$$

$$= \lim_{\mathrm{A}\to+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{C}^2}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{1+\mathrm{C}^2}}\right)\right]_0^{\mathrm{A}} \boxed{= \frac{\pi}{2\sqrt{1+\mathrm{C}^2}}.}$$

En effet $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$ et $\mathrm{d}t = \left(1+\tan^2 x\right)\mathrm{d}x$.

2.d Par π-périodicité et parité de l'intégrande, on a $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \dfrac{\mathrm{d}x}{1+(k+1)^\beta \pi^\beta \cos^2 x} = 2\int_0^{\pi/2} \dfrac{\mathrm{d}x}{1+(k+1)^\beta \pi^\beta \cos^2 x}$, de même pour l'autre intégrale. On applique alors la question précédente avec $\mathrm{C} = k^{\beta/2}\pi^{\beta/2}$ ou $\mathrm{C} = (k+1)^{\beta/2}\pi^{\beta/2}$ à la question III.2.b, il vient

$$\frac{\pi}{\sqrt{1+(k+1)^\beta \pi^\beta}} \leqslant \mathrm{I}_{k,\beta} \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{1+k^\beta \pi^\beta}}.$$

On en déduit aisément que $\mathrm{I}_{k,\beta} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^{1-\beta/2}}{k^{\beta/2}}$. Par comparaison des séries à termes positifs avec les séries de Riemann, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \mathrm{I}_{k,\beta}$ converge si et seulement si $\dfrac{\beta}{2} > 1$. En appliquant enfin la question III.2.a, on en déduit que $\boxed{\text{l'intégrale } \mathrm{I}_\beta \text{ converge si et seulement si } \beta > 2.}$