Banque PT 2006 — épreuve C

Partie I

Question I.1
$K_0 = \int_0^1 dt = 1$; $K_1 = \int_0^1 (1-t^2)\,dt = \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$;
$K_2 = \int_0^1 (1-t^2)^2\,dt = \int_0^1 (1-2t^2+t^4)\,dt = \left[t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{8}{15}$.

Question I.2
On écrit $(1-t^2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k t^{2k}$ donc $K_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.
On obtient bien une somme de fractions.

Question I.3
On obtient $I_0 = \frac{\pi}{2}$; $I_1 = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1$;
$I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$.
De même $J_0 = \frac{\pi}{2}$; $J_1 = [\sin x]_0^{\pi/2} = 1$;
$J_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$.

Question I.4
Posant $t = \sin x$ (donc $dt = \cos x\,dx$), l'intégrale K_n devient :

$$K_n = \int_0^{\pi/2} \cos x(1-\sin^2 x)^n\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x\,dx = J_{2n+1}.$$

On peut aussi poser $t = \cos x$ (donc $dt = -\sin x\,dx$), et

$$K_n = -\int_{\pi/2}^{0} \sin x(1-\cos^2 x)^n\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx = I_{2n+1}.$$

Remarque : le changement de variable $y = \pi/2 - x$ transforme

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = -\int_{\pi/2}^{0} \sin^n(\pi/2 - y)\,dy = \int_0^{\pi/2} \cos^n y\,dy = J_n.$$

On a donc, pour tout entier n, égalité entre I_n et J_n.

Question I.5
Une intégration par parties permet de transformer I_n pour $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin x\,\sin^{n-1} x\,dx = \Big[-\cos x\,\sin^{n-1} x\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x\,(n-1)\cos x \sin^{n-2} x\,dx \\ &= (n-1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x\,dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n), \end{aligned}$$

et on en déduit que $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ donc $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

Question I.6
Soit $p \geqslant 0$, on écrit alors :

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 3.1}{(2p)(2p-2)\cdots 2} I_0 = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 3.1}{2^p\, p!}\frac{\pi}{2}.$$

Mais $(2p-1)(2p-3)\cdots 3.1 = \dfrac{(2p)!}{(2p)(2p-2)\cdots 2} = \dfrac{(2p)!}{2^p\, p!}$ donc $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.
De même, on écrit

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \frac{(2p)(2p-2)\cdots 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 3} I_1 = \frac{2^p\, p!}{(2p+1)(2p-1)\cdots 3},$$

et le calcul précédent montre $(2p+1)(2p-1)\cdots 3 = \dfrac{(2p+1)!}{2^p p!}$ donc $I_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.

Question I.7
Pour $x \in [0, \pi/2]$, on a $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$, donc, en multipliant par $\sin^{2p} x$ (qui est positif), on trouve $0 \leqslant \sin^{2p+1} x \leqslant \sin^{2p} x$. Mais si on avait multiplié par $\sin^{2p-1} x$, on aurait trouvé $0 \leqslant \sin^{2p} x \leqslant \sin^{2p-1} x$, donc finalement on a bien montré que $0 \leqslant \sin^{2p+1} x \leqslant \sin^{2p} x \leqslant \sin^{2p-1} x$.
En intégrant sur $[0, \pi/2]$, on en déduit aussitôt que $0 \leqslant I_{2p+1} \leqslant I_{2p} \leqslant I_{2p-1}$.

Question I.8
Pour $p \geqslant 1$, $\dfrac{I_{2p-1}}{I_{2p+1}} = \dfrac{2p+1}{2p} = 1 + \dfrac{1}{2p}$.
Or en divisant l'inégalité du I.7 par I_{2p+1}, on obtient $1 \leqslant \dfrac{I_{2p}}{I_{2p+1}} \leqslant \dfrac{I_{2p-1}}{I_{2p+1}} = 1 + \dfrac{1}{2p}$, et on en déduit que $\lim \dfrac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = 1$.

Question I.9
D'après les calculs du I.6, on a aussi $\dfrac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = \dfrac{(2p)!(2p+1)!}{2^{4p}(p!)^4}\dfrac{\pi}{2} = \left(\dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\right)^2 \dfrac{(2p+1)\pi}{2}$.

Question I.10
Comme $\dfrac{I_{2p}}{I_{2p+1}}$ est de limite égale à 1, on en déduit que $\left(\dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\right)^2 \sim \dfrac{2}{(2p+1)\pi} \sim \dfrac{1}{p\pi}$ ou encore que $\dfrac{1}{p}\left(\dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!}\right)^2 = \dfrac{1}{p}\left(\dfrac{(2p)(2p-2)\cdots 4.2}{(2p-1)(2p-3)\cdots 3.1}\right)^2$ est de limite égale à π.

Question I.11
On vient de montrer que $\dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!} \sim \sqrt{p\pi}$.

I.11.a Rappelant les résultats du I.6, on obtient $I_{2p} \sim \dfrac{\pi}{2\sqrt{p\pi}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}$.

I.11.b De même, on trouve $I_{2p+1} \sim \dfrac{\sqrt{p\pi}}{2p+1} \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}$.

I.11.c Que n soit pair ou impair on a trouvé dans tous les cas : $I_n \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n/2}} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Partie II

Question II.1

On a bien sûr $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)(n+1)^n\sqrt{n+1}}{n^n\sqrt{n}}\dfrac{1}{e(n+1)} = \dfrac{1}{e}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1/2}$.

Question II.2

II.2.a On se rappelle que $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.

II.2.b On en déduit que

$$\ln\frac{u_{n+1}}{u_n} = -1 + (n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n}) = -1 + (n+\frac{1}{2})(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o(\frac{1}{n^3})) = \frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2}),$$

donc que $\ln\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \sim \dfrac{1}{12n^2}$.

Question II.3

Posons $v_n = \ln\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$: comme $v_n \sim \dfrac{1}{12n^2}$, $(\sum v_n)$ est une série à termes positifs au moins à partir d'un certain rang. En outre, comme $(\sum \dfrac{1}{n^2})$ converge, la série $(\sum v_n)$ converge également.

Question II.4

Or $v_n = \ln u_{n+1} - \ln u_n$ donc la $(n-1)$-ème somme partielle de cette série s'écrit $S_{n-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \ln u_n - \ln u_1 = \ln u_n + 1$ car $u_1 = 1/e$.

Comme $(\sum v_n)$ converge, on peut poser $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} S_{n-1}$, et on déduit du calcul précédent que la suite $(\ln u_n)$ converge de limite $S-1$ donc que la suite (u_n) converge de limite $\ell = e^{S-1}$.

Question II.5

Par définition même de u_n, on dispose alors de $n! \sim \dfrac{1}{\ell}\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

Question II.6

En utilisant cet équivalent, on trouve que

$$\frac{4^p(p!)^2}{(2p)!} \sim 2^{2p}\frac{p.p^{2p}}{\ell^2e^{2p}}\frac{\ell e^{2p}}{\sqrt{2p}2^{2p}p^{2p}} = \frac{1}{\ell}\sqrt{\frac{p}{2}},$$

alors que I.10 fournissait $\dfrac{4^p(p!)^2}{(2p)!} \sim \sqrt{p\pi}$. Comparant ces deux résultats, il vient $\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Finalement on a retrouvé la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

Partie III

Question III.1
La somme d'une série entière peut se dériver terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence. On écrit donc, pour $x \in]0, R[$:

$$\begin{aligned}
a(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
a'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\
xa'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n \\
xa''(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n \\
x^2 a''(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n
\end{aligned}$$

L'équation différentielle fournit donc les relations :

$$\forall n \geqslant 0, \quad 16n(n-1)a_n - 16(n+1)na_{n+1} + 16na_n - 8(n+1)a_{n+1} - a_n = 0.$$

Cette équation se réécrit $\forall n \geqslant 0, \quad (16n^2-1)a_n = 8(2n^2+3n+1)a_{n+1}$ ou encore, pour $n \geqslant 1$,

$$a_n = \frac{16(n-1)^2 - 1}{8(2(n-1)^2 + 3(n-1) + 1)} a_{n-1} = \frac{(4n-3)(4n-5)}{8n(2n-1)} a_{n-1}.$$

Question III.2
Observons qu'on a $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} \sim \dfrac{16n^2}{16n^2} = 1$ donc le rayon de convergence de la série entière obtenue est $R = 1$.

Question III.3
Puisque $a_0 = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{(4n-3)(4n-5)}{4.(2n)(2n-1)} \frac{(4n-7)(4n-9)}{4.(2n-2)(2n-3)} \cdots \frac{5.3}{4.4.3} \frac{1.(-1)}{4.2.1} \\
&= -\frac{(4n-3)(4n-5)(4n-7)\cdots 5.3.1}{4^n (2n)!} = -\frac{(4n-2)!}{4^n (2n)! (4n-2)(4n-4)(4n-6)\cdots 6.4.2} \\
&= -\frac{(4n-2)!}{4^n (2n)! 2^{n-1} (2n-1)!} = -\frac{1}{4n-1} \frac{(4n)!}{2^{3n} (2n)!^2}.
\end{aligned}$$

Question III.4
À l'aide de la formule de Stirling, on trouve après simplification $a_n \sim -\dfrac{\sqrt{2}}{8\sqrt{\pi}} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.