Corrigé du 2ème problème de Mines-Ponts PSI 2010

Déterminants et formule de condensation

Partie I. Préliminaires

Question 1) L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie n^2 et toutes les normes y sont équivalentes.
Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble $\left\{|M_{i,j}|,\quad i,j \in \{1,\dots,n\}\right\}$ est fini, constitué de réels positifs.
Il admet un maximum, qui est un réel positif. Donc N est définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans **R** et **positive**.
De plus $\big(N(M)=0\big) \iff \left(\sup\limits_{i,j\in\{1,\dots,n\}} |M_{i,j}| = 0\right) \iff \big(\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2, |M_{i,j}| = 0\big) \iff (M = 0_n)$
et N est **séparable**.
Puis $\forall (\lambda, M) \in \mathbb{R}\times\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N(\lambda M) = \sup\limits_{i,j\in\{1,\dots,n\}} |\lambda M_{i,j}| = |\lambda| \sup\limits_{i,j\in\{1,\dots,n\}} |M_{i,j}| = |\lambda| N(M)$ N est **homogène**.
Enfin $\forall (M,P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $N(M+P) = \sup\limits_{i,j\in\{1,\dots,n\}} |M_{i,j}+P_{i,j}| \leqslant \sup\limits_{i,j\in\{1,\dots,n\}} (|M_{i,j}|+|P_{i,j}|)$
d'où $N(M+P) \leqslant \sup\limits_{i,j\in\{1,\dots,n\}} (|M_{i,j}|) + \sup\limits_{i,j\in\{1,\dots,n\}} (|P_{i,j}|) = N(M)+N(P)$ et N est **sous-additive**.

Ainsi $\boxed{N \text{ est une norme sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

Question 2) On montre l'existence d'une telle décomposition dans l'étude du rang de M et $\boxed{r = \mathrm{rg}(M)}$.

Question 3) Si $r = n$, et M inversible, on a $M = \lim\limits_{k\to\infty} P.J_k.Q$ suite constante de matrices inversibles, avec $J_k = J$.

Si M non inversible et $r < n$, soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $J_k = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & \frac{1}{k} I_{n-r} \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(1,\dots,1,\frac{1}{k},\dots,\frac{1}{k})$ carrée,
diagonale, avec r fois 1, puis $n-r$ fois $\frac{1}{k}$ sur la diagonale. Alors J_k est inversible , car $\det(J_k) = \frac{1}{k^{n-r}}$.
Considérons la suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ avec $M_k = P.J_k.Q$.
Si A, B, et C sont des matrices carrées avec $C = A\times B$, alors $C_{i,j} = \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} A_{i,k}.B_{k,j}$

donc $|C_{i,j}| \leqslant \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |A_{i,k}|.|B_{k,j}| \leqslant n.N(A).N(B)$ pour tout (i,j) donc $\boxed{N(A.B) \leqslant n.N(A).N(B)}$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Ainsi $N(M-M_k) = N(P.(J-J_k).Q) \leqslant n^2.N(P).N(Q).N(J-J_k)$ or $N(J-J_k) = \frac{1}{k}$,
donc $N(M-M_k) \to 0$ quand $k\to\infty$ et $\boxed{M \text{ est la limite de la suite de matrices inversibles } (P.J_k.Q)_{k\in\mathbb{N}^*}}$

Question 4) On peut développer le déterminant en utilisant les permutations du groupe symétrique S_n.
$\det(M) = \sum\limits_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod\limits_{1\leqslant p\leqslant n} M_{\sigma(p),p}$ où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation $\sigma \in S_n$, donc vaut $+1$ ou -1.
Le déterminant est donc une somme de produits des coefficients de la matrice M affectés d'un signe.
Chaque application composante pour (i,j) fixé, $M \mapsto M_{i,j}$ est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. En effet, elle est 1-Lipschitzienne, puisque $|M_{i,j} - P_{i,j}| \leqslant .N(M-P)$ pour tout couple de matrices (M,P) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Par les théorèmes opératoires : $\boxed{\text{l'application déterminant est continue de } (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), N) \text{ dans } \big(\mathbb{R}, |\ |\big)}$

Et de même pour toutes les normes, puisqu'on est en dimension finie, elles sont équivalentes.

Partie II. Formule de condensation

Question 5) Pour tout (i,j), $(-1)^{i+j} \det[M]_i^j$ est le cofacteur de $M_{i,j}$ dans le développement du $\det(M)$ selon une ligne ou une colonne. Ainsi, selon la $i$ème ligne :
$\det(M) = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} M_{i,j} \det[M]_i^j = (-1)^{i+1}\Big[M_{i,1}\det[M]_i^1 - M_{i,2}\det[M]_i^2 + \cdots + (-1)^{n-1} M_{i,n}\det[M]_i^n\Big]$

Et $\boxed{M_{i,1}\det[M]_i^1 - M_{i,2}\det[M]_i^2 + \cdots + (-1)^{n-1}M_{i,n}\det[M]_i^n = (-1)^{i+1}\det(M) \text{ pour tout } i \in \{1,\dots,n\}}$

Question 6) Considérons la matrice $A^{i,j}$ obtenue en remplaçant la $i$ème ligne de M par une répétition de la $j$ème.
Le déterminant de $A^{i,j}$ est donc nul, puisque la matrice a deux lignes identiques : $\boxed{\det(A^{i,j}) = 0}$.
Mais on peut calculer ce déterminant de $A_{i,j}$ selon sa $i$ème ligne qui donne :

$$\boxed{\det(A^{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} (A^{i,j})_{i,k} \det[A^{i,j}]_i^k = (-1)^{i+1}\Big[M_{j,1}\det[M]_i^1 - M_{j,2}\det[M]_i^2 + \cdots + (-1)^{n-1}M_{j,n}\det[M]_i^n\Big]}$$

Si on supprime la $i$ème ligne dans $\det[A^{i,j}]_i^k$, on supprime la ligne que l'on a modifié pour passer de M à $A^{i,j}$, on retrouve donc $\det[M]_i^k$. Ainsi $\boxed{M_{j,1}\det[M]_i^1 - M_{j,2}\det[M]_i^2 + \cdots + (-1)^{n-1}M_{j,n}\det[M]_i^n = 0}$

Question 7) Notons $C = M.\,^t(\mathrm{Com}M)$, alors pour tout j, i :

$$C_{j,i} = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} M_{j,k}.\,^t(\mathrm{Com}M)_{k,i} = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} M_{j,k}.(\mathrm{Com}M)_{i,k} = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} M_{j,k}.(-1)^{i+k}\det[M]_i^k$$
$$= (-1)^{i+1}\left[M_{j,1}\det[M]_i^1 - M_{j,2}\det[M]_i^2 + \cdots + (-1)^{n-1}M_{j,n}\det[M]_i^n\right]$$

donc $C_{j,i} = 0$ si $i \neq j$ et $C_{i,i} = \det(M)$, ainsi $C = \det(M).I_n$ et $\boxed{M.\,^t(\mathrm{Com}M) = \det(M).I_n}$

Question 8) $$M^* = \begin{pmatrix} \det[M]_1^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n+1}\det[M]_n^1 \\ -\det[M]_1^2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n+2}\det[M]_n^2 \\ \det[M]_1^3 & 0 & 1 & \cdots & 0 & (-1)^{n+3}\det[M]_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n\det[M]_1^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\det[M]_n^{n-1} \\ (-1)^{n+1}\det[M]_1^n & 0 & 0 & \cdots & 0 & \det[M]_n^n \end{pmatrix}$$

On peut calculer son déterminant en développant selon la 1ère ligne. Ainsi $\det(M^*)$ égale :

$$\det[M]_1^1 \times \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n+2}\det[M]_n^2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & (-1)^{n+3}\det[M]_n^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\det[M]_n^{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \det[M]_n^n \end{pmatrix} + \det[M]_n^1 \det\begin{pmatrix} -\det[M]_1^2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \det[M]_1^3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^n\det[M]_1^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ (-1)^{n+1}\det[M]_1^n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(dans le second terme, $(-1)^{n+1} \times (-1)^{n+1} = 1$ a disparu devant $\det[M]_n^1$)

Le premier déterminant $(n-1)\times(n-1)$ est triangulaire et vaut $\det[M]_n^n$.

On développe le second selon la dernière ligne, il vaut $(-1)^{n-1+1} \times (-1)^{n+1}\det[M]_1^n \times 1$

d'où : $\boxed{\det(M^*) = \det[M]_1^1 \times \det[M]_n^n - \det[M]_n^1\det[M]_1^n}$

Question 9)

$$M \times M^* = \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \cdots & M_{1,n-1} & M_{1,n} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \cdots & M_{2,n-1} & M_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ M_{n-1,1} & M_{n-1,2} & \cdots & M_{n-1,n-1} & M_{n-1,n} \\ M_{n,1} & M_{n,2} & \cdots & M_{n,n-1} & M_{n,n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \det[M]_1^1 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n+1}\det[M]_n^1 \\ -\det[M]_1^2 & 1 & \cdots & 0 & (-1)^{n+2}\det[M]_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n\det[M]_1^{n-1} & 0 & \cdots & 1 & -\det[M]_n^{n-1} \\ (-1)^{n+1}\det[M]_1^n & 0 & \cdots & 0 & \det[M]_n^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \det(M) & M_{1,2} & \cdots & M_{1,n-1} & 0 \\ 0 & M_{2,2} & \cdots & M_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & M_{n-1,2} & \cdots & M_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & M_{n,2} & \cdots & M_{n,n-1} & \det(M) \end{pmatrix}$$

les coefficients de la 1ère colonne et de la dernière sont obtenus avec les formules établies questions **5** et **6** avec $i = 1$ en haut à gauche et $i = n$ en bas à droite, enfin $j \neq i$ sinon.

Question 10) Par blocs, ou en développant successivement selon la 1ère colonne, puis la dernière, on obtient :

$\det(M \times M^*) = \det(M)^2.\det[M]_{1,n}^{1,n}$ (on a supprimé la ligne L_1 et la colonne C_1 puis la ligne L_n et la colonne C_n)

$\det(M\times M^*) = \det(M)\times\det(M^*)$ $\boxed{\det(M)\times\left[\det[M]_1^1\times\det[M]_n^n - \det[M]_n^1\det[M]_1^n\right] = \det(M)^2.\det[M]_{1,n}^{1,n}}$

Si M est inversible, alors $\boxed{\det[M]_1^1\times\det[M]_n^n - \det[M]_n^1\det[M]_1^n = \det(M).\det[M]_{1,n}^{1,n} \qquad (1)}$

Question 11) Si M n'est pas inversible, M est limite d'une suite de matrices inversibles $(P.J_k.Q)_{k\in\mathbb{N}^*}$ (question **3**). Pour chacune de ces matrices la relation (1) est vraie, et les déterminants des matrices carrées sont des fonctions continues, donc les déterminants des limites sont les limites des déterminants, la relation (1) passe à la limite.

Note : quand on passe à la limite des matrices obtenues en supprimant des lignes et des colonnes, on arrive aux matrices obtenues en supprimant les mêmes lignes et colonnes aux matrices limites.

Partie III. Algorithme de Lewis Carroll

Question 12) Si $M = A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, et $B^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ alors $A^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

$B^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ d'où $A^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ et $B^{(2)} = (-1)$ enfin $A^{(3)} = (-8)$ $\boxed{\text{le déterminant de } M \text{ est } \det(M) = -8}$

Question 13) La matrice $A^{(k)}$ est carrée de dimension $(n-k) \times (n-k)$. Pour calculer $A^{(k+1)}$ en fonction de $A^{(k)}$, il faut calculer $(n-k-1)^2$ déterminants 2×2. A partir de $A^{(0)} = M$, le calcul de $A^{(n-1)}$ dont le seul coefficient est $\det(M)$ nécessite $u_n = (n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + 1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-2} (n-k-1)^2$ calculs de déterminants 2×2.

$u_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{p=n-1} p^2$ avec $p = n-k-1$ ou $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ u_n = \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}}$ $\displaystyle\sum_{p=1}^{p=n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Question 14) La formule de développements successifs par rapport aux lignes demande, dans le calcul de $\det(M)$ avec M de taille $n \times n$, le calcul de n déterminants $(n-1) \times (n-1)$. Si chacun de ceux-ci demande v_{n-1} calculs de déterminants 2×2, alors $v_n = n \times v_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 3$, avec $v_2 = 1$. D'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ v_n = \dfrac{n!}{2}}$

Lorsque $n \to \infty$, puisque $u_n \sim \dfrac{n^3}{3}$ on a $\boxed{u_n = o(v_n)}$. L'algorithme de Lewis Carroll permet un calcul en temps polynômial de $\det(M)$, beaucoup plus rapide que le calcul par développement selon lignes ou colonnes.

Par exemple, pour $n = 10$, on a $u_{10} = \dfrac{10 \times 9 \times 19}{6} = 285$ et $v_{10} = \dfrac{10!}{2} = 1\,814\,400$.

Question 15) On a $A^{(1)}_{i,j} = \begin{vmatrix} M_{i,j} & M_{i,j+1} \\ M_{i+1,j} & M_{i+1,j+1} \end{vmatrix}$ et $B^{(1)}_{i,j} = M_{i+1,j+1}$

donc $A^{(2)}_{r,s} = \dfrac{1}{M_{r+1,s+1}} \begin{vmatrix} A^{(1)}_{r,s} & A^{(1)}_{r,s+1} \\ A^{(1)}_{r+1,s} & A^{(1)}_{r+1,s+1} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{M_{r+1,s+1}} \left[A^{(1)}_{r,s} \times A^{(1)}_{r+1,s+1} - A^{(1)}_{r+1,s} \times A^{(1)}_{r,s+1} \right]$

où chaque $A^{(1)}_{i,j}$ est un déterminant 2×2 dont le coefficient en haut à gauche est $M_{i;j}$.

Mais si A est une matrice 3×3 et qu'on lui applique la formule de condensation, on obtient :

$$\det(A) \times A_{22} = \begin{vmatrix} A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,2} & A_{3,3} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,2} & A_{2,3} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{vmatrix}$$

donc si $A_{2,2} \neq 0$, $\det(A) = \dfrac{1}{A_{22}} \left[\begin{vmatrix} A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,2} & A_{3,3} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,2} & A_{2,3} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{vmatrix} \right]$

Donc $\boxed{A^{(2)}_{r,s} \text{ est le déterminant } 3 \times 3 \text{ de la matrice extraite de } M \text{ dont le coefficient en haut à gauche est } M_{r,s}}$ où il ne reste que les lignes $r, r+1$ et $r+2$ et que les colonnes $s, s+1$ et $s+2$.

Avec les notations de l'énoncé : $\begin{cases} \text{pour } r > 1 \text{ et } s > 1, \text{ on a } A^{(2)}_{r,s} = \det[M]^{1,\cdots,s-1,s+3,\cdots,n}_{1,\cdots,r-1,r+3,\cdots,n} \\ \text{pour } r = 1 \text{ et } s > 1, \text{ on a } A^{(2)}_{1,s} = \det[M]^{1,\cdots,s-1,s+3,\cdots,n}_{4,\cdots,n} \\ \text{pour } r > 1 \text{ et } s = 1. \text{ on a } A^{(2)}_{r,1} = \det[M]^{4,\cdots,n}_{1,\cdots,r-1,r+3,\cdots,n} \text{ enfin } A^{(2)}_{1,1} = \det[M]^{4,\cdots,n}_{4,\cdots,n} \end{cases}$

Question 16) Notons $D^{(k)}_{r,s} = \det[M]^{1,\cdots,s-1,s+k+1,\cdots,n}_{1,\cdots,r-1,r+k+1,\cdots,n}$ de taille $(k+1) \times (k+1)$ extrait de M, où il ne reste que les lignes $r, r+1, \cdots, r+k$ et que les colonnes $s, s+1, \cdots, s+k$. (son coefficient en haut à gauche est $M_{r,s}$) (mêmes adaptations qu'à la question précédente, si $r = 1$ ou $s = 1$).

On a donc $\boxed{\text{pour tous les } (r,s) \text{ possibles : } D^{(0)}_{r,s} = M_{r,s} = A^{(0)}_{r,s} \text{ de même } D^{(1)}_{r,s} = A^{(1)}_{r,s} \text{ et } D^{(2)}_{r,s} = A^{(2)}_{r,s}}$

Supposons que $k \in \{1, 2, \cdots, n-2\}$ et qu'on ait assuré l'égalité $D^{(m)}_{r,s} = A^{(m)}_{r,s}$ pour tous les m entre 0 et k et tous les (r,s) possibles. Alors $\boxed{A^{(k+1)}_{r,s} = \dfrac{1}{A^{(k-1)}_{r+1,s+1}} \left[A^{(k)}_{r,s} \times A^{(k)}_{r+1,s+1} - A^{(k)}_{r+1,s} \times A^{(k)}_{r,s+1} \right]}$

Avec la formule de condensation appliquée à la matrice extraite $[M]_{1,\cdots,r-1,r+k+2,\cdots,n}^{1,\cdots,s-1,s+k+2,\cdots,n}$ de taille $(k+2)\times(k+2)$ ayant comme coefficient en haut et à gauche $M_{r,s}$ on a : $D_{r,s}^{(k+1)}\times D_{r+1,s+1}^{(k-1)} = D_{r+1,s+1}^{(k)}\times D_{r+1,s+1}^{(k)} - D_{r+1,s}^{(k)}\times D_{r,s+1}^{(k)}$

donc $\boxed{D_{r,s}^{(k+1)} = \dfrac{1}{D_{r+1,s+1}^{(k-1)}}\left[D_{r,s}^{(k)}\times D_{r+1,s+1}^{(k)} - D_{r+1,s}^{(k)}\times D_{r,s+1}^{(k)}\right]}$ car les matrices $B^{(i)}$ ne s'annulent pas.

Les deux suites ont les mêmes valeurs initiales, et l'égalité se transmet par hérédité double. Par récurrence pour

$\left.\begin{array}{r}\text{tout } k\in\{1,2,\cdots,n-1\}\\ \text{tous } r,s\in\{1,2,\cdots,n-k\}\end{array}\right\}$ $\boxed{A_{r,s}^{(k)} = \det[M]_{1,\cdots,r-1,r+k+1,\cdots,n}^{1,\cdots,s-1,s+k+1,\cdots,n} \text{ le déterminant de taille } (k+1)\times(k+1)}$ avec les lignes $r,r+1,\cdots,r+k$ et les colonnes $s,s+1,\cdots,s+k,$ ayant comme coefficient en haut et à gauche $M_{r,s}$.

Pour $k=n-1,$ il ne reste qu'un $\boxed{\text{coefficient } A_{1,1}^{(n-1)} = \det(M)}$ en prenant toutes les lignes et toutes les colonnes.

Partie IV. Le λ-déterminant

M matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour laquelle $\det_\lambda M$ est bien défini. Pour $\lambda=-1$ on retrouve le déterminant usuel.
On peut constater que pour $\lambda\neq-1$ la forme fonction des colonnes de M **n'est pas antisymétrique, ni alternée**,

car : $\det_\lambda\begin{pmatrix} b & a\\ d & c\end{pmatrix} = bc+\lambda ad \neq -\det_\lambda\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ ou $\det_\lambda\begin{pmatrix} a & a\\ c & c\end{pmatrix} = (\lambda+1)ac\neq 0.$

Pour $n=1$ ou $n=2,$ la forme est n-linéaire, mais, au delà, la formule (2) n'est guère encourageante.

On peut assurer que pour $\boxed{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \ \det_\lambda({}^tM) = \det_\lambda(M)}$ les deux étant définis simultanément.

Car cette égalité est vraie pour $n=1$ ou $n=2$ et que la formule (2) est invariante par transposition.

Question 17) Par **récurrence** avec (2) montrons que si $\det_\lambda(M)$ est bien défini et $t\neq0,$ alors $\det_\lambda(M_{t,j})$ est bien défini et $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ \det_\lambda(M_{t,j}) = t\det_\lambda(M)$ pour $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $j\in\{1,2,\cdots,n\}$

Initialisation : c'est clairement vrai pour $n=1$ ou $n=2$.

Hérédité : supposons $n\geqslant3$ et la propriété assurée jusqu'à l'ordre $n-1.$ Pour M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\det_\lambda(M_{t,j}).\det_\lambda[M_{t,j}]_{1,n}^{1,n} = \det_\lambda[M_{t,j}]_1^1\times\det_\lambda[M_{t,j}]_n^n + \lambda\det_\lambda[M_{t,j}]_n^1\times\det_\lambda[M_{t,j}]_1^n.$$

Distinguons deux cas :

- $\boxed{\text{Si } j\in\{1,n\}}$ alors $\det_\lambda[M_{t,j}]_{1,n}^{1,n} = \det_\lambda[M]_{1,n}^{1,n}\neq0$, déterminant d'ordre $(n-2)$.

L'égalité est assurée car on supprime la colonne (C_1 ou C_n) multipliée par t.

Dans les termes de $\det_\lambda[M_{t,j}]_1^1\times\det_\lambda[M_{t,j}]_n^n+\lambda\det_\lambda[M_{t,j}]_n^1\det_\lambda[M_{t,j}]_1^n$ on supprime une fois cette colonne, (si $j=1,$ dans le 1er et le 3ème, et si $j=n,$ dans le 2ème et le 4ème) et dans les deux autres termes, on applique notre hypothèse de récurrence, avec des déterminants de taille $(n-1)\times(n-1)$.

$$\text{Ainsi } \det_\lambda(M_{t,j}). = \frac{1}{\det_\lambda[M_{t,j}]_{1,n}^{1,n}}\left[\det_\lambda[M_{t,j}]_1^1\times\det_\lambda[M_{t,j}]_n^n+\lambda\det_\lambda[M_{t,j}]_n^1\det_\lambda[M_{t,j}]_1^n\right]$$
$$= \frac{t}{1}\,\frac{1}{\det_\lambda[M]_{1,n}^{1,n}}\left[\det_\lambda[M]_1^1\times\det_\lambda[M]_n^n+\lambda\det_\lambda[M]_n^1\det_\lambda[M]_1^n\right] = t\det_\lambda(M)$$

- $\boxed{\text{Si } j\notin\{1,n\}}$ tous les termes d'ordre $n-1$ ou $n-2$ sont multipliés par $t\neq0,$ $\det_\lambda[M_{t,j}]_{1,n}^{1,n} = t\det_\lambda[M]_{1,n}^{1,n}\neq0$

$$\det_\lambda(M_{t,j}). = \frac{1}{\det_\lambda[M_{t,j}]_{1,n}^{1,n}}\left[\det_\lambda[M_{t,j}]_1^1\times\det_\lambda[M_{t,j}]_n^n+\lambda\det_\lambda[M_{t,j}]_n^1\det_\lambda[M_{t,j}]_1^n\right]$$
$$= \frac{t^2}{t}\,\frac{1}{\det_\lambda[M]_{1,n}^{1,n}}\left[\det_\lambda[M]_1^1\times\det_\lambda[M]_n^n+\lambda\det_\lambda[M]_n^1\det_\lambda[M]_1^n\right] = t\det_\lambda(M)$$

Dans les deux cas, on a assuré l'hérédité. D'où le résultat par le théorème de récurrence :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,$ $\boxed{\det_\lambda(M_{t,j}) = t\det_\lambda(M)}$ pour $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $j\in\{1,2,\cdots,n\}$

Question 18) On a $V(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1}\end{pmatrix}$ et $V(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2\\ 1 & x_2 & x_2^2\\ 1 & x_3 & x_3^2\end{pmatrix}$

- Pour $n=2$: on a $\boxed{\det_\lambda V(x_1,x_2) = x_2+\lambda x_1}$
- Pour $n=3$, avec la formule (2) :

$$\det_\lambda V(x_1,x_2,x_3)\times x_2 = \det_\lambda\begin{pmatrix} x_2 & x_2^2\\ x_3 & x_3^2\end{pmatrix}\det_\lambda\begin{pmatrix} 1 & x_1\\ 1 & x_2\end{pmatrix}+\lambda\det_\lambda\begin{pmatrix} x_1 & x_1^2\\ x_2 & x_2^2\end{pmatrix}\det_\lambda\begin{pmatrix} 1 & x_2\\ 1 & x_3\end{pmatrix}$$

d'où $\det_\lambda V(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{1}{x_2}\Big[(x_2x_3^2+\lambda x_3x_2^2)(x_2+\lambda x_1)+\lambda(x_1x_2^2+\lambda x_2x_1^2)(x_3+\lambda x_2)\Big]$

$$= x_3(x_3+\lambda x_2)(x_2+\lambda x_1)+\lambda x_1(x_2+\lambda x_1)(x_3+\lambda x_2)$$

Ainsi $\boxed{\det_\lambda V(x_1,x_2,x_3) = (x_3+\lambda x_1)(x_3+\lambda x_2)(x_2+\lambda x_1)}$

• Par récurrence, montrons que $\det_\lambda V(x_1,x_2,\dots,x_n) = \displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j+\lambda x_i)$. **L'initialisation** est assurée pour $n=3$.

Hérédité : supposons $n\geqslant 3$, et la propriété vraie jusqu'à l'ordre n , en notant $V_n = V(x_1,x_2,\dots,x_n)$,

on a $V_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{pmatrix}$ à qui on va enlever des lignes et des colonnes, pour appliquer (2) :

$$\boxed{\det_\lambda V_{n+1}\times\det_\lambda[V_{n+1}]_{1,n+1}^{1,n+1} = \det_\lambda[V_{n+1}]_1^1\times\det_\lambda[V_{n+1}]_{n+1}^{n+1}+\lambda\det_\lambda[V_{n+1}]_{n+1}^1\det_\lambda[V_{n+1}]_1^{n+1}}$$

Ainsi $\det_\lambda[V_{n+1}]_{1,n+1}^{1,n+1} = \det_\lambda\begin{pmatrix} x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1}\end{pmatrix} = (x_2\times\ldots\times x_n)\det_\lambda\begin{pmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2}\end{pmatrix}$

avec le résultat de la **question 17**) appliqué à la transposée : chaque ligne est multipliée par $t = x_i \neq 0$.

De même $\det_\lambda[V_{n+1}]_1^1 = \det_\lambda\begin{pmatrix} x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n\end{pmatrix} = (x_2\times\ldots\times x_{n+1})\det_\lambda\begin{pmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^{n-1}\end{pmatrix}$

$$= (x_2\times\ldots\times x_{n+1})\det_\lambda V(x_2,\dots,x_{n+1})$$

$$\det_\lambda[V_{n+1}]_{n+1}^{n+1} = \det_\lambda\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^{n-1}\end{pmatrix} = \det_\lambda V(x_1,x_2,\dots,x_n) = \det_\lambda V_n$$

$$\det_\lambda[V_{n+1}]_{n+1}^1 = \det_\lambda\begin{pmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ x_n & x_n^2 & & x_n^{n-1} & x_n^n\end{pmatrix} = (x_1\times\ldots\times x_n)\det_\lambda\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1}\end{pmatrix}$$

$$= (x_1\times\ldots\times x_n) = \det_\lambda V_n$$

$$\det_\lambda[V_{n+1}]_1^{n+1} = \det_\lambda\begin{pmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1}\end{pmatrix} = \det_\lambda V(x_2,\dots,x_{n+1})$$

Ainsi $\det_\lambda V_{n+1} = \dfrac{(x_2\times\ldots\times x_{n+1})\det_\lambda V(x_2,\dots,x_{n+1})\det_\lambda V_n+\lambda(x_1\times\ldots\times x_n)\det_\lambda V_n\det_\lambda V(x_2,\dots,x_{n+1})}{(x_2\times\ldots\times x_n)\det_\lambda V(x_2,\dots,x_n)}$

$= \dfrac{(x_{n+1}+\lambda x_1)\det_\lambda V(x_2,\dots,x_{n+1})\det_\lambda V_n}{\det_\lambda V(x_2,\dots,x_n)}$ Avec notre hypothèse de récurrence :

$$\det_\lambda V_{n+1} = (x_{n+1}+\lambda x_1)\frac{\displaystyle\prod_{2\leqslant i<j\leqslant n+1}(x_j+\lambda x_i)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j+\lambda x_i)}{\displaystyle\prod_{2\leqslant i<j\leqslant n}(x_j+\lambda x_i)} = (x_{n+1}+\lambda x_1)\prod_{2\leqslant j\leqslant n+1}(x_{n+1}+\lambda x_i)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j+\lambda x_i)$$

Qui est le résultat escompté à l'ordre $(n+1)$. Les dénominateurs sont non nuls, car $x_i\neq 0$ et $x_j+\lambda x_i\neq 0$.

Par récurrence, nous avons donc assuré que $\boxed{\det_\lambda V(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j+\lambda x_i) \text{ pour tout } n\geqslant 3}$