
Corrigé de la seconde épreuve de mathématiques
Mines 2009 - Filière MP
Par H. Maarouf CPGE Mohammedia

Question préliminaire

- 1) Pour tout λ réel, la fonction ϕ_λ est continue sur $[0, 1]$. D'un autre côté, si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des réels tels que $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels non tous nuls tels que :

$$\alpha_1 \phi_{\lambda_1} + \alpha_2 \phi_{\lambda_2} + \dots + \alpha_n \phi_{\lambda_n} = 0,$$

alors pour tout x de $[0, 1]$, on a :

$$\alpha_p x^{\lambda_p} + \dots + \alpha_n x^{\lambda_n} = 0$$

où p est le plus petit entier vérifiant $\alpha_p \neq 0$. En divisant par x^{λ_p} , pour $x \neq 0$ et on fait tendre x vers 0, on trouve $\alpha_p = 0$, ce qui constitue une contradiction. La famille $(\phi_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ est donc libre.

A. Déterminants de Cauchy.

On pose, pour $0 < m \leq n$:

$$D_m = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_m} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_m+b_1} & \frac{1}{a_m+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_m+b_m} \end{vmatrix}$$

qui est défini mais avec l'hypothèse

$$(H_n) : \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad a_i + b_j \neq 0$$

et $R(X) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (X - a_k)}{\prod_{k=1}^n (X + b_k)}$ qui est une fraction rationnelle de degré -1 . Les pôles de cette fraction sont $-b_1, \dots, -b_n$

et ils sont simples à cause de l'hypothèse (H_n) . Donc $R(X) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{X + b_k}$ avec $A_k = \frac{P(-b_k)}{Q'(-b_k)}$, $P = \prod_{i=1}^{n-1} (X - a_i)$ et

$Q = \prod_{i=1}^n (X + b_i)$. En particulier, $P(-b_k) = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (b_k + a_i)$ et $(-1)^{n-1} \prod_{i=1, i \neq k}^n (b_k - b_i)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

2) Notons, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $C_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1 + b_k} \\ \vdots \\ \frac{1}{a_n + b_k} \end{pmatrix}$ de sorte que

$$\sum_{k=1}^n A_k C_k = \begin{pmatrix} R(a_1) \\ \vdots \\ R(a_{n-1}) \\ R(a_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R(a_n) \end{pmatrix}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
A_n D_n &= A_n \text{Det}_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_{n-1}, C_n) \\
&= \text{Det}_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_{n-1}, A_n C_n) \\
&= \text{Det}_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_{n-1}, \sum_{k=1}^n A_k C_k) \\
&= \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 0 \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & R(a_n) \end{vmatrix} \\
&= R(a_n) D_{n-1}
\end{aligned}$$

où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

$$\text{3) On a } A_n = \frac{P(-b_n)}{Q'(-b_n)} = \frac{(-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (b_n + a_k)}{(-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (b_n - b_k)} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (b_n + a_k)}{\prod_{k=1}^{n-1} (b_n - b_k)} (\neq 0) \text{ et } R(a_n) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (a_n - a_k)}{\prod_{k=1}^n (a_n + b_k)}. \text{ D'où}$$

$$\begin{aligned}
D_n &= \frac{R(a_n)}{A_n} D_{n-1} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (a_n - a_k) \prod_{k=1}^{n-1} (b_n - b_k)}{\prod_{k=1}^n (a_n + b_k) \prod_{k=1}^{n-1} (b_n + a_k)} D_{n-1} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (a_n - a_k) \prod_{k=1}^{n-1} (b_n - b_k)}{\prod_{k=1}^n (a_n + b_k) \prod_{k=1}^{n-1} (b_n + a_k)} \cdots \cdots \frac{(a_2 - a_1)}{(b_2 + a_2)(b_2 + a_1)} \frac{(b_2 - b_1)}{(b_2 + a_1)} D_1
\end{aligned}$$

et avec $D_1 = \frac{1}{a_1 + b_1}$, on trouve : (ou encore par une récurrence remplaçant les $\cdots$)

$$D_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq n}} (a_i + b_j)}$$

B. Distance d'un point à une partie dans un espace normé.

A étant une partie non vide de E espace vectoriel normé. Pour x dans E , la distance de x à A est :

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$$

- 4) Notons $B(x, r)$ la boule ouverte, au sens de la norme $\|\cdot\|$, de centre x et de rayon r . Par la caractérisation de la borne inférieure, on a :

$$\begin{aligned}
d(x, A) = 0 &\iff \forall \varepsilon > 0 \exists y \in A, \|x - y\| < \varepsilon \\
&\iff \forall \varepsilon > 0 \exists y \in A, y \in B(x, \varepsilon) \\
&\iff \forall \varepsilon > 0 A \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset \text{ (c'est à dire } x \text{ est adhérent à } A)
\end{aligned}$$

- 5) Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante (au sens de l'inclusion) de parties de E telle que $\bigcup_{n \geq 0} A_n = A$. Remarquons que si X et Y sont deux parties non vides de E avec $X \subset Y$, alors $d(x, X) \geq d(x, Y)$. La suite $(d(x, A_n))_{n \geq 0}$ est donc décroissante et que $d(x, A_n) \geq d(x, A)$ pour tout n . Soit $\varepsilon > 0$, il existe $y \in A$ tel que $d(x, A) \leq \|x - y\| < d(x, A) + \varepsilon$. Mais $\bigcup_{n \geq 0} A_n = A$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $y \in A_N$. Pour tout n entier naturel tel que $n \geq N$, on a :

$$d(x, A) \leq d(x, A_n) \leq d(x, A_N) \leq \|x - y\| < d(x, A) + \varepsilon$$

ceci montre que la suite $(d(x, A_n))_{n \geq 0}$ a pour limite $d(x, A)$.

Soit V un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et B la boule fermée de centre x et de rayon $\|x\|$.

- 6) La partie $B \cap V$ est bornée car B est bornée. En plus, l'application : $y \mapsto \|x - y\|$ est continue sur V , donc $B \cap V$ est aussi fermée. C'est donc compact de V car c'est un espace vectoriel de dimension finie. Elle est alors (par définition séquentielle d'un compact par exemple) compacte de E .
Notons C le complémentaire dans V de $B \cap V$. Il est facile de voir que :

$$d(x, V) = \min(d(x, B \cap V), d(x, C))$$

D'une autre part, $0_E \in B \cap V$ car V s-e-v de E et $\|x - 0_E\| \leq \|x\|$. Pour $y \in C$, on a $\|x - y\| > \|x\| \geq d(x, B \cap V)$. En d'autres termes, $d(x, B \cap V) < d(x, C)$ et, par suite, $d(x, V) = d(x, B \cap V)$.

- 7) L'application $y \mapsto \|x - y\|$ est continue sur le compact $B \cap V$, elle est donc bornée et atteint sa borne inférieure. Il existe alors $y \in B \cap V$ (donc $y \in V$) tel que $\|x - y\| = d(x, B \cap V)$ et par la question précédente, $\|x - y\| = d(x, V)$.

C. Distance d'un point à un sous-espace de dimension finie dans un espace euclidien.

L'espace E est supposé muni d'un produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ avec $\|x\| = \sqrt{(x | x)}$.

- 8) Le sous-espace V étant de dimension finie, la question précédente assure l'existence de y dans V tel que $\|x - y\| = d(x, V)$. Soit z la projection orthogonale de x sur V . En particulier, on a $\|x - y\| \leq \|x - z\|$. D'un autre côté, $(x - y) = (x - z) - (y - z)$ et par le théorème de Pythagore :

$$\|x - y\|^2 = \|x - z\|^2 + \|y - z\|^2$$

ce qui montre que $\|y - z\|^2 = 0$ et par suite $y = z$.

Pour $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$, on note $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ le déterminant de la matrice de Gramm :

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} (x_1 | x_1) & (x_1 | x_2) & \dots & (x_1 | x_n) \\ (x_2 | x_1) & (x_2 | x_2) & \dots & (x_2 | x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_n | x_1) & (x_n | x_2) & \dots & (x_n | x_n) \end{pmatrix}$$

- 9) Notons V le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(x_1, \dots, x_n)$. Puisque $V \cap V^\perp = \{0_E\}$ et $V^\perp = \{x_1, \dots, x_n\}^\perp$, alors on a

$$\forall x \in V, (x = 0_E \iff \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, (x | x_k) = 0)$$

Notons aussi L_k la k -ième ligne de la matrice de Gramm ci-dessus, vue comme élément de $\mathbb{K}^n$. Une combinaison linéaire de type $\sum_{k=1}^n \alpha_k L_k$ est une ligne de type :

$$L = \left(\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k | x_1 \right), \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k | x_2 \right), \dots, \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k | x_n \right) \right)$$

Cette ligne est nulle si et seulement si le vecteur $\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$ est nul. En résumé :

$$\begin{aligned}
G(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 &\iff M(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ est non inversible} \\
&\iff \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \text{ non tous nuls et } \sum_{k=1}^n \alpha_k L_k = 0_{\mathbb{K}^n} \\
&\iff \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \text{ non tous nuls et } \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k = 0_E \\
&\iff (x_1, \dots, x_n) \text{ est liée}
\end{aligned}$$

- 10) La famille $X = (x_1, \dots, x_n)$ est libre et V est le sous-espace engendré par cette famille. Soit x un élément de E et y sa projection orthogonale sur V . Puisque $x - y \in V^\perp$, alors $(x_i | x) = (x_i | y)$ et $(x | x) = (y | y) + (x - y | x - y)$ et

$$\begin{aligned}
G(x_1, \dots, x_n, x) &= \begin{vmatrix} (x_1 | x_1) & (x_1 | x_2) & \dots & (x_1 | x_n) & (x_1 | x) \\ (x_2 | x_1) & (x_2 | x_2) & \dots & (x_2 | x_n) & (x_2 | x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (x_n | x_1) & (x_n | x_2) & \dots & (x_n | x_n) & (x_n | x) \\ (x | x_1) & (x | x_2) & \dots & (x | x_n) & (x | x) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (x_1 | x_1) & (x_1 | x_2) & \dots & (x_1 | x_n) & (x_1 | y) \\ (x_2 | x_1) & (x_2 | x_2) & \dots & (x_2 | x_n) & (x_2 | y) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (x_n | x_1) & (x_n | x_2) & \dots & (x_n | x_n) & (x_n | y) \\ (y | x_1) & (y | x_2) & \dots & (y | x_n) & (x | x) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (x_1 | x_1) & (x_1 | x_2) & \dots & (x_1 | x_n) & (x_1 | y) \\ (x_2 | x_1) & (x_2 | x_2) & \dots & (x_2 | x_n) & (x_2 | y) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (x_n | x_1) & (x_n | x_2) & \dots & (x_n | x_n) & (x_n | y) \\ (y | x_1) & (y | x_2) & \dots & (y | x_n) & (y | y) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (x_1 | x_1) & (x_1 | x_2) & \dots & (x_1 | x_n) & 0 \\ (x_2 | x_1) & (x_2 | x_2) & \dots & (x_2 | x_n) & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (x_n | x_1) & (x_n | x_2) & \dots & (x_n | x_n) & 0 \\ (y | x_1) & (y | x_2) & \dots & (y | x_n) & \|x - y\|^2 \end{vmatrix} \\
&= \underset{=0 \text{ (d'après 9)}}{G(x_1, \dots, x_n, y)} + \underset{\neq 0 \text{ (d'après 9)}}{\|x - y\|^2 G(x_1, \dots, x_n)}
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } d(x, V)^2 = \|x - y\|^2 = \frac{G(x_1, \dots, x_n, y)}{G(x_1, \dots, x_n)}$$

D. Comparaison des normes N_∞ et N_2

- 11) Soit $f \in C([0, 1])$. On a $N_\infty(f) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$. Alors,

$$N_2(f) = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt} \leq \sqrt{\int_0^1 N_\infty(f)^2 dt} = N_\infty(f)$$

Soit maintenant $g \in \overline{A}^\infty$. Il existe une suite $(g_n)_{n \geq 0}$ telle que la suite de terme général $N_\infty(g_n - g)$ tend vers 0. Par comparaison des normes vue précédemment, la suite de terme général $N_2(g_n - g)$ tend vers 0. Donc $g \in \overline{A}^2$. Par suite, $\overline{A}^\infty \subset \overline{A}^2$. En particulier un fermé au sens de la norme N_2 est fermé au sens de la norme N_∞ .

Notons $V_0 = \{f \in C([0, 1]) ; f(0) = 0\}$.

- 12) Pour n entier naturel, on note $f_n(x) = \begin{cases} (n+1)x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n+1} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n+1} \leq x \leq 1 \end{cases}$. C'est une suite d'éléments de V_0 . En

plus,

$$\begin{aligned}
N_2(f_n - \phi_0) &= \sqrt{\int_0^{\frac{1}{n+1}} ((n+1)t - 1)^2 dt} \\
&\leq \sqrt{\int_0^{\frac{1}{n+1}} 1 dt} \quad (\text{car } ((n+1)t - 1)^2 \leq 1) \\
&\leq \sqrt{\frac{1}{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

ϕ_0 est bien un point adhérent à V_0 .

- 13)** Soit f un élément de $C([0, 1])$. On a $f = f(0)\phi_0 + f - f(0)\phi_0$ et posons $g_n = f(0)f_n + f - f(0)\phi_0$ avec (f_n) la suite définie dans la question précédente. La suite (f_n) est d'éléments de V_0 et $N_2(g_n - f) = |f(0)|N_2(f_n - \phi_0)$ qui tend vers 0 quand n croît indéfiniment. Ce qui montre la densité de V_0 dans $C([0, 1])$.
Si f est un élément de V_0 , alors $N_\infty(f - \phi_0) \geq |f(0) - \phi_0(0)| = 1$. En d'autres termes, la boule ouverte de centre ϕ_0 et de rayon 1 au sens de la norme N_∞ ne rencontre pas V_0 . V_0 est non dense dans $C([0, 1])$ au sens de cette norme.
- 14)** Soit V un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé et $\bar{V}$ son adhérence. On a $V \subset \bar{V}$, ce dernier est donc non vide. Soit x, y deux éléments de $\bar{V}$ et α un scalaire. Il existe deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites d'éléments de V qui convergent respectivement vers x et y . La suite $(\alpha x_n + y_n)_n$, qui est une suite d'éléments de V car c'est un sous-espace vectoriel, converge vers $\alpha x + y$. C'est à dire $\alpha x + y \in \bar{V}$. C'est donc un sous-espace vectoriel.
- 15)** ($\Rightarrow$) Ce sens est évident puisque $\bar{V}^\infty = C([0, 1])$.
($\Leftarrow$) Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[0, 1]$, c'est à dire $\mathcal{P} = \text{vect}(\phi_m)_{m \geq 0}$. D'après le théorème de Weierstrass, $\bar{\mathcal{P}}^\infty = C([0, 1])$ et par hypothèse, $\mathcal{P} \subset \bar{V}^\infty$. $\bar{V}^\infty$ étant un fermé, donc $C([0, 1]) = \bar{\mathcal{P}}^\infty \subset \bar{V}^\infty \subset C([0, 1])$.
- 16)** ($\Rightarrow$) De même, ce sens est évident puisque $\bar{V}^2 = C([0, 1])$.
($\Leftarrow$) $\bar{V}^2$ étant fermé au sens de la norme N_2 , alors il est fermé au sens de la norme N_∞ (d'après la question 11)) donc il est égal à son adhérence. C'est un sous-espace vectoriel de $C([0, 1])$ (d'après la question 14)) et contient tous les ϕ_m ($m \geq 0$). D'après la question 15), $\bar{V}^2 = C([0, 1])$. C'est à dire que V est dense au sens de N_2 dans $C([0, 1])$.

E. Un critère de densité de W pour la norme N_2

$(\lambda_k)_{k \geq 0}$ étant une suite de réels positifs et deux à deux distincts. Pour n entier naturel, $W_n = \text{vect}(\phi_{\lambda_0}, \dots, \phi_{\lambda_n})$ et $W = \text{vect}(\phi_{\lambda_k})_{k \geq 0}$.

- 17)** Remarquons $W = \bigcup_{n \geq 0} W_n$ et que la suite $(W_n)_{n \geq 0}$ est croissante. Alors,

$$\begin{aligned}
W \text{ est dense} &\iff \forall \mu \in \mathbb{N}, \phi_\mu \text{ est adhérent à } W \text{ (question 15)} \\
&\iff \forall \mu \in \mathbb{N}, d(\phi_\mu, W) = 0 \text{ (question 4)} \\
&\iff \forall \mu \in \mathbb{N}, \lim_n d(\phi_\mu, W_n) = 0 \text{ (question 5)}
\end{aligned}$$

- 18)** Soit $\mu \geq 0$. D'après la question 10), on a, puisque $(\phi_0, \dots, \phi_n)$ est une famille libre,

$$d(\phi_\mu, W_n)^2 = \frac{G(\phi_{\lambda_0}, \dots, \phi_{\lambda_n}, \phi_\mu)}{G(\phi_{\lambda_0}, \dots, \phi_{\lambda_n})}$$

D'une autre part, pour tous α et β réels positifs,

$$(\phi_\alpha | \phi_\beta) = \int_0^1 t^{\alpha+\beta} dt = \frac{1}{\alpha + \beta + 1}$$

Donc $G(\phi_{\lambda_0}, \dots, \phi_{\lambda_n}, \phi_\mu)$ est un déterminant de Cauchy d'ordre $n + 2$ ($a_k = \lambda_{k-1}$, $b_k = \lambda_{k-1} + 1$ pour $k \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$, $a_{n+2} = \mu$ et $b_{n+2} = \mu + 1$) et $G(\phi_{\lambda_0}, \dots, \phi_{\lambda_n})$ est un déterminant de Cauchy d'ordre $n + 1$. Par

la question 3), on a :

$$\begin{aligned}
d(\phi_\mu, W_n)^2 &= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n+2} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{\substack{1 \leq j \leq n+2 \\ 1 \leq i \leq n+2}} (a_i + b_j)} \frac{\prod_{\substack{1 \leq j \leq n+1 \\ 1 \leq i \leq n+1}} (a_i + b_j)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (a_j - a_i)(b_j - b_i)} \\
&= \frac{\prod_{1 \leq i < n+2} (a_{n+2} - a_i)(b_{n+2} - b_i)}{(a_{n+2} + b_{n+2}) \prod_{1 \leq j \leq n+1} (a_{n+2} + b_j) \prod_{1 \leq i \leq n+1} (a_i + b_{n+2})} \\
&= \frac{\prod_{0 \leq i < n+1} (\mu - \lambda_i)^2}{(2\mu + 1) \prod_{0 \leq j \leq n} (\mu + \lambda_j + 1)^2}
\end{aligned}$$

C'est à dire que : $d(\phi_\mu, W_n) = \frac{1}{\sqrt{2\mu + 1}} \prod_{k=0}^n \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}$.

19) Soit $\mu \geq 0$. C'est clair que si la suite $(\lambda_k)_{k \geq 0}$ tend vers $+\infty$, la suite $\left(\frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}\right)_{k \geq 0}$ tend vers 1. Supposons maintenant que la suite $\left(\frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}\right)_{k \geq 0}$ tend vers 1. Puisque, $\frac{\mu}{\mu + 1} < 1$, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout k entier naturel avec $k \geq K$, on a :

$$\frac{\mu}{\mu + 1} < \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}$$

Donc si pour un certain $k \geq K$, on a $\lambda_k \leq \mu$, alors

$$\frac{\mu}{\mu + 1} < \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} = \frac{\mu - \lambda_k}{\lambda_k + \mu + 1} \leq \frac{\mu}{\mu + 1}$$

ce qui sera contradictoire. Par suite, pour $k \geq K$, la suite de terme général

$$\frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} = \frac{\lambda_k - \mu}{\lambda_k + \mu + 1} = 1 - \frac{2\mu + 1}{\lambda_k + \mu + 1}$$

tend vers 1 et la suite $\left(\frac{2\mu + 1}{\lambda_k + \mu + 1}\right)_{k \geq K}$ tend vers 0. Ceci montre que la suite $(\lambda_k)_{k \geq 0}$ tend vers $+\infty$.

20) On suppose que $\lambda_k \neq 0$ pour tout k entier naturel.

($\Leftarrow$) Supposons que la série $\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente et soit μ un entier naturel. La suite $d(\phi_\mu, W_n)_n$ étant décroissante et minorée par 0. Notons l sa limite. Si $l > 0$, alors

$$\frac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} = \frac{d(\phi_\mu, W_n)}{d(\phi_\mu, W_{n-1})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{l}{l} = 1$$

D'après la question 19), la suite $(\lambda_k)_{k \geq 0}$ tend vers $+\infty$. En compaasant par logartihme, la série

$$\sum_{n \geq 0} \ln \left(\frac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} \right)$$

est convergente et, puisque à partir d'un certain rang $\lambda_n > \mu$, on a :

$$\begin{aligned}
\ln \left(\frac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} \right) &= \ln \left(\frac{\lambda_n - \mu}{\lambda_n + \mu + 1} \right) \sim \frac{-2\mu - 1}{\lambda_n + \mu + 1} \sim \frac{-2\mu - 1}{\lambda_n} \\
&\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda_n}
\end{aligned}$$

est convergente, absurde. Donc pour tout $\mu \in \mathbb{N}$, $\lim_n d(\phi_\mu, W_n) = 0$. La question 17) nous assure alors la densité de W dans $C([0, 1])$ au sens de la norme N_2 .

($\Rightarrow$) On suppose à présent que W est dense dans $C([0, 1])$ au sens de la norme N_2 . Si la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda_n}$$

est convergente, alors la suite $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ tend vers $+\infty$ et on aura, de même, l'équivalence :

$$\ln \left(\frac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} \right) = \ln \left(\frac{\lambda_n - \mu}{\lambda_n + \mu + 1} \right) \sim \frac{-2\mu - 1}{\lambda_n + \mu + 1} \sim \frac{-2\mu - 1}{\lambda_n}$$

ce qui montre la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 0} \ln \left(\frac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} \right)$$

Notons S la somme de cette dernière série. Par la question 18), on aura

$$d(\phi_\mu, W_n) = \frac{1}{\sqrt{2\mu + 1}} \prod_{k=0}^n \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} \longrightarrow \frac{e^S}{\sqrt{2\mu + 1}} > 0$$

et par la question 17), W est non dense dans $C([0, 1])$ au sens de la norme N_2 . Ce qui est une contradiction.

F. Un critère de densité de W pour la norme N_∞

21) W étant dense dans $C([0, 1])$ au sens de la norme N_∞ , donc $\overline{W}^\infty = C([0, 1])$. Mais d'après la question 11), $\overline{W}^\infty \subset \overline{W}^2$. Alors, $\overline{W}^2 = C([0, 1])$ c'est à dire que W est dense dans $C([0, 1])$ au sens de la norme N_2 . D'après la question 20), la série $\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

22) Soit $\mu \geq 1$ et notons $h = \phi_\mu - \psi$, avec $\psi = \sum_{k=0}^n a_k \phi_{\lambda_k}$. Puisque $\mu \geq 1$ et $\lambda_k \geq 1$, la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et $h' = \mu \phi_{\mu-1} - \sum_{k=0}^n a_k \lambda_k \phi_{\lambda_k-1}$. En plus, $\phi_\mu(0) = \phi_{\lambda_k}(0) = 0$, donc pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} |h(x)| &= \left| \int_0^x h'(t) dt \right| \\ &\leq \sqrt{\int_0^x h'(t)^2 dt} \sqrt{\int_0^x 1^2 dt} \quad \text{Inégalité de Cauchy-Schwarz} \\ &\leq \sqrt{\int_0^1 h'(t)^2 dt} \sqrt{\int_0^1 1^2 dt} = N_2(h') \end{aligned}$$

Par suite, $N_\infty(h) \leq N_2(h')$.

23) On suppose que $\begin{cases} (i) : & \lambda_0 = 0 \\ (ii) : & \lambda_k \geq 1 \text{ si } k \geq 1 \end{cases}$ et que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente. Puisque $\frac{1}{\lambda_k} \leq \frac{1}{\lambda_k - 1}$,

la série $\sum_{k \geq k_0} \frac{1}{\lambda_k - 1}$ (définie à partir d'un certain rang de sorte que $\lambda_k \neq 1$) est aussi divergente. D'après la question 20), le sous-espace $V = \text{vect}(\phi_{\lambda_k-1})_{k \geq 1}$ (qui contient $\text{vect}(\phi_{\lambda_k-1})_{k \geq k_0}$) est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_2 .

Soit maintenant m un entier naturel et $\varepsilon > 0$. Par densité du sous-espace V dans $C([0, 1])$ pour la norme N_2 , il existe $\psi = \sum_{k=0}^n \alpha_k \phi_{\lambda_k-1} \in V$ tel que $N_2((m+1)\phi_m - \psi) < \varepsilon$ et avec $\mu = m+1$, on aura, d'après 22)

$$N_\infty \left(\phi_{m+1} - \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{\lambda_k} \phi_{\lambda_k} \right) \leq N_2 \left((m+1)\phi_m - \sum_{k=0}^n \alpha_k \phi_{\lambda_k-1} \right) < \varepsilon$$

Donc $\phi_{m+1} \in \overline{W}^\infty$. En plus, l'hypothèse $\lambda_0 = 0$ montre que $\phi_0 \in W \subset \overline{W}^\infty$. La question 15) montre que W est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_∞ .

24) On suppose que $\begin{cases} (i) : & \lambda_0 = 0 \\ (ii') : & \inf_{k \geq 1} \lambda_k > 0 \end{cases}$ et que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente. Posons $\lambda = \inf_{k \geq 1} \lambda_k$ et $\lambda'_k = \frac{\lambda_k}{\lambda}$.

Alors,

$$\begin{cases} (i) : & \lambda'_0 = 0 \\ (ii') : & \lambda'_k \geq 1 \text{ si } k \geq 1 \end{cases} \quad \text{et la série } \sum_{k \geq 1} \frac{1}{\lambda'_k} \text{ est divergente}$$

D'après la question précédente, le sous-espace $W' = \text{vect}(\phi_{\lambda'_k})_{k \geq 0}$ est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_∞ . Soit maintenant $f \in C([0, 1])$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\phi = \sum_{k=0}^n \alpha_k \phi_{\lambda'_k} \in W'$ tel que $N_\infty(g - \phi) < \varepsilon$ où g est la fonction continue définie sur $[0, 1]$ par $g(t) = f(t^{1/\lambda})$. Posons encore $\psi = \sum_{k=0}^n \alpha_k \phi_{\lambda_k}$ qui est un élément de W donné de sorte que $\phi(t^\lambda) = \psi(t)$. Pour tout t , on a :

$$|f(t) - \psi(t)| = |g(t^\lambda) - \phi(t^\lambda)| < \varepsilon$$

Donc $N_\infty(f - \psi) < \varepsilon$. D'où la densité de W dans $C([0, 1])$ pour la norme N_∞ .