Corrigé de l'epreuve math II (Mines-ponts 2008)

Par A. NAIMI Professeur dau Lycée Technique Mohammedia - Maroc

1. Supposons f radiale. Si on pose pour tout $r \geq 0, F(r) = f(r,0)$, alors F est C^1 par composition de fonctions C^1, d'autre part si f est nulle en dehors d'une boule $B(0,M)$,alors F est nulle en dehors du segment $[-M,M]$,donc $F \in C^1_K(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$.
   Soit maintenant $x \in \mathbb{R}^2$ non nul et Rot_θ la rotation qui transforme x en $(r,0)$ où $r = ||x||$, alors $f(x) = f(Rot_\theta(r,0))$ et comme f est supposée radiale alors $f(Rot_\theta(r,0)) = f(r,0)$, donc $f(x) = F(||x||)$ et cette dernière égalité est encore vérifié pour $x = 0$.
2. Si $y = (y_1, y_2)$ et φ un réel alors $Rot_\varphi(y) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1\cos\varphi - y_2\sin\varphi \\ y_1\sin\varphi + y_2\cos\varphi \end{pmatrix}$ et donc $T_{f,x} : (y,\varphi) \mapsto f(x_1 + y_1\cos\varphi - y_2\sin\varphi, x_2 + y_1\sin\varphi + y_2\cos\varphi)$ qui est composé d'applications continues, donc continue.et si $y \in \mathbb{R}^2$,l'application $\varphi \mapsto T_{f,x}(y,\varphi) = f(x_1 + y_1\cos\varphi - y_2\sin\varphi, x_2 + y_1\sin\varphi + y_2\cos\varphi)$ est $2\pi-$périodique par périodicité des fonctions sin et cos.
3. Soient $\theta \in [0, 2\pi[, y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, alors
   $$\begin{array}{rcl} (\mathcal{T}_{f,x} \circ Rot_\theta)(y) & = & \mathcal{T}_{f,x}(Rot_\theta(y)) \\ & = & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T_{f,x}(Rot_\theta(y),\varphi)d\varphi \\ & = & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + Rot_\varphi(Rot_\theta(y))d\varphi \\ & = & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + Rot_{\varphi+\theta}(y))d\varphi \end{array}$$
   mais en effectuant le changement de variable$\Psi = \varphi + \theta$,cette dérnière intégrale vaut $\frac{1}{2\pi}\int_\theta^{\theta+2\pi} f(x + Rot_\Psi(y))d\Psi = \frac{1}{2\pi}\int_\theta^{\theta+2\pi} T_{f,x}(y,\Psi)d\Psi$ et compte tenu de la périodicité de la fonction $\Psi \mapsto T_{f,x}(y,\Psi)$, $\frac{1}{2\pi}\int_\theta^{\theta+2\pi} T_{f,x}(y,\Psi)d\Psi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T_{f,x}(y,\Psi)d\Psi$, On conclut alors que $(T_{f,x} \circ Rot_\theta)(y) = T_{f,x}(y)$,et ceci pour tout y, donc $\mathcal{T}_{f,x} \circ Rot_\theta = \mathcal{T}_{f,x}$ et ceci pour tout $\theta \in [0,2\pi[$, d'où $\mathcal{T}_{f,x}$ est radiale
4. Soit t un réel, alors
   $$\begin{array}{rcl} x + Rot_\varphi(p.u_\theta + t.v_\theta) & = & ||x||.u_\Psi + p.Rot_\varphi(Rot_\theta(e_1)) + t.Rot_\varphi(Rot_\theta(e_2)) \\ & = & ||x||.Rot_\Psi(e_1) + p.Rot_{\varphi+\theta}(e_1) + t.Rot_{\varphi+\theta}(e_2) \\ & = & ||x||.Rot_{\varphi+\theta}(Rot_{\Psi-\varphi-\theta}(e_1)) + p.Rot_{\varphi+\theta}(e_1) + t.Rot_{\varphi+\theta}(e_2) \\ & = & ||x||.Rot_{\varphi+\theta}(\cos(\Psi-\varphi-\theta).e_1 + \sin(\Psi-\varphi-\theta).e_2) \\ & & +\ \ p.Rot_{\varphi+\theta}(e_1) + t.Rot_{\varphi+\theta}(e_2) \\ & = & ||x||\cos(\Psi-\varphi-\theta).u_{\varphi+\theta} + ||x||\sin(\Psi-\varphi-\theta).v_{\varphi+\theta} + pu_{\varphi+\theta}. + t.v_{\varphi+\theta} \\ & = & (||x||\cos(\Psi-\varphi-\theta). + p).u_{\varphi+\theta} + (||x||\sin(\Psi-\varphi-\theta) + t).v_{\varphi+\theta} \end{array}$$
   et donc quand t décrit $\mathbb{R}$, $t + ||x||.\sin(\Psi-\varphi-\theta)$ décrit $\mathbb{R}$ et pa suite $D_{x,\varphi}$ est la droite de paramètre le couple $(||x||\cos(\Psi-\varphi-\theta). + p, \varphi+\theta)$.
5. Puisque l'application f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ alors par composition et multiplication la fonction réelle qu'on notera h définie sur $\mathbb{R}\times[0,R]$ par $h(x_1,r) = r.f(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)$ est continue ainsi que $\frac{\partial h}{\partial x_1}$ et
   $$\forall (x_1,r) \in \mathbb{R}\times[0,R], \frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1,r) = r.\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta),$$
   donc d'après le théorème de dérivabilité sous signe intégrale la fonction V_1 est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x_1 \in \mathbb{R}, (V_1)'(x_1) = \int_0^R r.\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)rdr$, de même la fonction V_2 est C^1 sur $\mathbb{R}$ et
   $$\forall x_2 \in \mathbb{R}, (V_2)'(x_2) = \int_0^R r.\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)rdr.$$
   Montrons que la fonction W_1 est C^1 sur $\mathbb{R}$,en effet si on note g la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}\times[0,2\pi]$, par $g(x_1,\theta) = \int_0^R .f(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta).rdr$,alors par continuité de la fonction réelle définie sur $(\mathbb{R}\times[0,2\pi])\times[0,R]$ par $((x_1,\theta),r) \rightarrow r.f(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)$ et d'après le théorème de continuité sous signe intégrale cette fonction g est continue, d'autrepar puisque la fonction V_1 est C^1 sur $\mathbb{R}$, alors $\frac{\partial g}{\partial x_1}$ existe et continue et
   $$\forall (x_1,\theta) \in \mathbb{R}\times[0,2\pi], \quad \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,\theta) = V_1'(x_1) = \int_0^R \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)rdr,$$

donc toujours d'après le théorème de dérivabilité sous signe intégrale la fonction W_1 est C^1sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x_1 \in \mathbb{R}, W_1^{'}(x_1) = \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)rdrd\theta;$$

de même la fonction W_2 est C^1sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x_2 \in \mathbb{R}, W_2^{'}(x_2) = \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)rdrd\theta.$$

6. Par le changement de variable en coordonnées polaires, il vient $\int\int_{B(x,R)}(\frac{\partial Q}{\partial x_1}(u,v) - \frac{\partial P}{\partial x_2}(u,v))dudv = \int\int_{B(x,R)}(\frac{\partial Q}{\partial x_1}(x + r.u_\theta) - \frac{\partial P}{\partial x_2}(x + r.u_\theta))rdrd\theta$, et par la formule de Green-Riemann on a

$$\int\int_{B(x,R)}(\frac{\partial Q}{\partial x_1}(u,v) - \frac{\partial P}{\partial x_2}(u,v))dudv = \int_\Gamma P(u,v)du + Q(u,v)dv$$

où Γ est le chemin orienté représenté par γ définie sur $[0, 2\pi]$ par $\gamma(t) = x + R.u_\theta$, or ce dérnier intégrale curviligne vaut $\int_0^{2\pi}[P(x + R.u_\theta)(-R\sin\theta) + Q(x + R.u_\theta).(R\cos\theta)]d\theta$ et par linéarité de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} P(x + R.u_\theta)(-R\sin\theta)d\theta + \int_0^{2\pi} Q(x + R.u_\theta).(R\cos\theta)d\theta$$

d'où l'égalité demandée.

7. Soit $(x, R) \in Q_A$, et soit $M\rangle 0$, tel que supp$f \subset B(0, M)$ et notons $J = B(x, M + 2\,||x||)$ et $K = B(x, M + ||x||)$, alors d'une part $\int\int_{\mathbb{R}\mathbb{R}^2} f(y_1, y_2)dy_1dy_2 = \int\int_J f(y_1, y_2)dy_1dy_2$ et d'autre part part on a l'égalité $\int\int_J f(y_1, y_2)dy_1dy_2 = \int\int_J f(x_1+z_1, x_2+z_2).\left|J_\varphi(z_1, z_2)\right| dz_1dz_2$ grâce au changement de variable φ définie de K dans J par $\varphi(z_1, z_2) = x + (z_1, z_2)$,mais pour tout (z_1, z_2), $|J_\varphi(z_1, z_2)| = 1$, d'où $\int\int_{\mathbb{R}\mathbb{R}^2} f(y_1, y_2)dy_1dy_2 = \int\int_J f(x_1 + z_1, x_2 + z_2)dz_1dz_2$ et comme la fonction $(z_1, z_2) \to f(x_1 + z_1, x_2 + z_2)$ est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ à support compact et nulle en dehors de K, alors $\int\int_J f(x_1 + z_1, x_2 + z_2)dz_1dz_2 = \int\int_{\mathbb{R}\mathbb{R}^2} f(x_1 + z_1, x_2 + z_2)dz_1dz_2$, finalement on a l'égalité

$$\int\int_{\mathbb{R}\mathbb{R}^2} f(y_1, y_2)dy_1dy_2 = \int\int_{\mathbb{R}\mathbb{R}^2} f(x_1 + z_1, x_2 + z_2)dz_1dz_2$$

.Passons à l'autre égalité.
Puisque f est supposé à support compact alors il existe $\rho\rangle 0$ qu'on peut prendre aussi grand que l'on veut, par exemple $\rho\rangle R$, tel que supp$f \subset B(x, \rho)$, donc $\int\int_{\mathbb{R}\mathbb{R}^2} f(y_1, y_2)dy_1dy_2 = \int\int_{B(x,\rho)} f(y_1, y_2)dy_1dy_2$ et par passage en coordonnées

$$\int\int_{B(x,\rho)} f(y_1, y_2)dy_1dy_2 = \int_0^\rho g(r)rdr \text{ où } g(r) = \int_0^{2\pi} f(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)d\theta,$$

mais puisque f vérifie les hypothèses du lemme, alors $g(r) = 0$ pour tout $r\rangle\,||x|| + A$, donc $\int_0^\rho g(r)rdr = \int_0^R g(r)rdr$. On déduie alors que

$$\int\int_{\mathbb{R}\mathbb{R}^2} f(y_1, y_2)dy_1dy_2 = \int_0^R g(r)rdr. = \int_0^R(\int_0^{2\pi} f(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)d\theta)rdr$$

mais par FUBINI

$$\int_0^R(\int_0^{2\pi} f(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)d\theta)rdr = \int_0^{2\pi}\int_0^R f(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta).rdrd\theta$$

d'où l'égalité

$$\int\int_{\mathbb{R}\mathbb{R}^2} f(y_1, y_2)dy_1dy_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^R f(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)rdrd\theta.$$

8. Soit $x=(x_1,x_2)\in \overset{0}{B}(0,R)$, alors $(x,R)\in Q_A$ et donc d'près la question précédente $W_i(x_i)=\int\int_{\mathbb{RR}^2} f$ qui est constante indépendante de x_i, en particulier $W_1^{'}(x_1)=0$, donc $\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+r\cos\theta,x_2+r\sin\theta).rdrd\theta$ $=0$,mais par application du 7 à $Q=f$ et $P=0$, il vient

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+r\cos\theta,x_2+r\sin\theta).rdrd\theta=\int_0^{2\pi} f(x+R.u_\theta).R\cos\theta d\theta$$

et compte tenu du fait que $R\neq 0$, $\int_0^{2\pi} f(x+R.u_\theta).\cos\theta d\theta=0$, et en utilisant le fait que W_2 est constante, on montre de la même manière $\int_0^{2\pi} f(x+R.u_\theta)\sin\theta d\theta=0$.

9. Si $i\in\{1,2\}$ alors $y_i.f$ est produit de deux fonctions C^1 donc elle même est C^1 et comme f est à support compact alors il existe $M\rangle 0$ telle que f est nulle en dehors de $B(0,M)$ donc la fonction $y_i.f$ aussi, ceci montre que cette fonction est à support compact.
D'autre part si A est un réel strictement positif et si $(x,R)\in Q_A$, alors :

$$\int_0^{2\pi}(y_1.f)(x_1+R.\cos\theta,x_2+R\sin\theta).d\theta=\int_0^{2\pi}(x_1+R\cos\theta).f(x_1+R.\cos\theta,x_2+R\sin\theta).d\theta$$

et par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}(x_1+R\cos\theta).f(x_1+R.\cos\theta,x_2+R\sin\theta).d\theta \quad = \quad & x_1.\int_0^{2\pi} f(x_1+R.\cos\theta,x_2+R\sin\theta).d\theta\\ & +R\int_0^{2\pi}\cos\theta.f(x_1+R.\cos\theta,x_2+R\sin\theta).d\theta\end{aligned}$$

Le premier térme de cette dérnière expression est nul puisque f verifie les hypothèses du lemme et le deusième est nul d'après la question précédente. On conclue alors que $\int_0^{2\pi}(y_1.f)(x_1+R.\cos\theta,x_2+R\sin\theta).d\theta=0$ et que la fonction $y_1.f$ vérifie les hypthèses du lemme. De même on montre que la fonction $y_2.f$ vérifie les hypothèses du lemme.

10. Puisque f vérifie les hypothèses du lemme, alors l'égalité est vérifiée si $k+l=0$.et pour tout $(x,R)\in Q_A$.
Soit maintenant n un entier naturel et supposons l'égalité vérifiée pour tout k,l,tels que $k+l=n$, et pour tout $(x,R)\in Q_A$.
et soit $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, tel que $p+q=n+1$ alors l'un des entiers naturels p ou q est non nul, supposons par exemple $p\geq 1$, alors $(p-1)+q=n$ et donc par hypothèse de récurrence $\forall(x,R)\in Q_A,\int_0^{2\pi} f(x+R.u_\theta).(\cos\theta)^{p-1}(\sin\theta)^q d\theta=0$.ou encore
$\forall(x,R)\in Q_A$, $\int_0^{2\pi} g(x+R.u_\theta).d\theta=0$.où $g(y_1,y_2)=f(y_1,y_2).(\frac{y_1-x_1}{R})^{p-1}.(\frac{y_2-x_2}{R})^q$
et on vérifie facilement que cette fonction est C^1 à support compact : elle vérifie donc les hypothèses du lemme, donc d'après le 9 la fonction $y_1.g$ vérifie les hypothèses du lemme :

$$\forall(x,R)\in Q_A,\int_0^{2\pi}(x_1+R\cos\theta).f(x_1+R.\cos\theta,x_2+R\sin\theta).(\cos\theta)^{p-1}.(\sin\theta)^q d\theta=0,$$

d'où par linéarité de l'intégrale et compte tenue de l'hypothèse $\forall(x,R)\in Q_A,\int_0^{2\pi} f(x_1+R.\cos\theta,x_2+R\sin\theta).(\cos\theta)^p.(\sin\theta)^q d\theta=0$, le résultat est donc vraie pour $n+1$, donc vraie pour tout n

11. L'égalité est vérifiée pour $n=0$ et si $n\in\mathbb{N}^*$, alors $\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\sum\limits_{k=0}^n C_n^k i^k(\sin\theta)^k(\cos\theta)^{n-k}$
et en partageant cette somme en la somme des termes d'indices pair et impair il vient

$$\cos n\theta+i\sin n\theta=\sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})}C_n^{2k}(-1)^k(\sin\theta)^{2k}(\cos\theta)^{n-2k}+i\sum_{k=0}^{E(\frac{n-1}{2})}C_n^k(-1)^k(\sin\theta)^{2k+1}(\cos\theta)^{n-2k-1}$$

donc $\cos n\theta=\sum\limits_{k=0}^{E(\frac{n}{2})}C_n^{2k}(-1)^k(\sin\theta)^{2k}(\cos\theta)^{n-2k}$et

$$\sin n\theta=\sum_{k=0}^{E(\frac{n-1}{2})}C_n^k(-1)^k(\sin\theta)^{2k+1}(\cos\theta)^{n-2k-1}$$

et donc par linéarité de l'intégrale et compte tenue de la question précédente

$$\int_0^{2\pi} f(x_1+R.\cos\theta,x_2+R\sin\theta).\cos(n\theta)d\theta=0 \quad et \quad \int_0^{2\pi} f(x_1+R.\cos\theta,x_2+R\sin\theta).(\sin n\theta)d\theta=0.$$

12 et 13. Soit $(x,R)\in Q_A$ et notons g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(\theta)=f(x+R.u_\theta)$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π périodique donc d'après le théorème de $Weistrass$, elle est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions polynômes trigonométriques de la forme $P_n(t)=\sum_{k=-n}^{n}a_k e^{ikt}$, or d'après le 11 $\forall k\in\mathbb{Z}$, $\int_0^{2\pi}f(x+R.u_\theta).e^{ik\theta}.d\theta=0$. donc par linéarité de l'intégrale
$\forall n\in\mathbb{N}$, $\int_0^{2\pi}f(x+R.u_\theta).P_n(\theta).d\theta=0$ ou encore $\forall n\in\mathbb{N}$, $\int_0^{2\pi}g(\theta).P_n(\theta).d\theta=0$ (*) et comme g est continue sur le compact $[0,2\pi]$ alors elle y'est bornée et donc la suite de fonctions $g.P_n$ converge uniformément sur $[0,2\pi]$ vers la fonction g^2 et donc par passage à la limite dans (*), il vient $\int_0^{2\pi}g^2(\theta).d\theta=0$ et la fonction g^2 etant positive continue sur le segment $[0,2\pi]$, donc nulle sur ce segment donc g aussi, on a donc $\forall\theta\in[0,2\pi]$, $g(\theta)=f(x+R.u_\theta)=0$ et ceci pour tout $(x,R)\in Q_A$ donc f est nulle en dehors de $B(0,A)$. En effet soit $y\notin B(0,A)$ donc $||y||\rangle A$, alors il existe $\theta\in[0,2\pi[$ tel que $y=||y||.u_\theta$, donc $f(y)=f(x+R.u_\theta)$ avec $x=0$, $R=||y||$ et $(x,R)\in Q_A$ donc $f(y)=0$.ceci répond aussi à la question 13.
Remarquer qu'on peut obtenir directement le résultat de la question 12 en utilisant la formule de Parcevall

14. Soit $\theta\in[0,2\pi[$ et $p\geq 0$ alors

$$\widehat{f}(\theta,p)=\int_{\mathbb{R}\mathbb{R}}f(p.u_\theta+t.v_\theta)dt=\int_{\mathbb{R}\mathbb{R}}F(||p.u_\theta+t.v_\theta)||)dt=\int_{\mathbb{R}\mathbb{R}}F(\sqrt{p^2+t^2})dt$$

et cette dernière expression ne depend pas de θ donc $\widehat{f}\ (\theta,p)=\widehat{f}\ (0,p)=\int_{\mathbb{R}\mathbb{R}}F(\sqrt{p^2+t^2})dt$ mais cette drnière intégrale vaut $2\int_0^{+\infty}F(\sqrt{p^2+t^2})dt$ puisque la fonction qui est sous l'intégrale est pair, d'où les égalités demandées.

15. Soit $v\rangle 0$, alors d'après ce qui précède $\widehat{f}\ (0,\sqrt{v})=2\int_0^{+\infty}F(\sqrt{v+t^2})dt$ et par le changement de variable $v+t^2=u$ cette dernière intégrale vaut $\int_v^{+\infty}F(\sqrt{u}).(u-v)^{-\frac{1}{2}}du$.

16. Si $\sqrt{v}\rangle A$ alors par yhpothèse $\widehat{f}\ (0,\sqrt{v})=0$, et donc par la question précédente $\int_v^{+\infty}F(\sqrt{u}).(u-v)^{-\frac{1}{2}}du=0$, et donc compte tenue des notations d'analyses $\forall v\rangle A^2\ Lh(v)=0$ où $h(u)=F(\sqrt{u})$ qui est aussi à support compact, donc $\forall v\rangle A^2\quad (L(Lh))'(v)=0$ mais (résultat admis par l'enoncé) $(L(Lh))'=-\pi h$, donc $\forall v\rangle A^2$ $h(v)=0$ donc F est nulle sur $]A,+\infty[$, donc f est nulle en dehors de $B(0,A)$, ceci montre donc le théorème dans le cas particulier où f est radiale.

17. Soit $(\theta,p)\in[0,2\pi[\times\mathbb{R}^+$ et $x\in\mathbb{R}^2$
Puisque f est supposée à support compact alors elle est nulle en dehors d'une boule $B(0,M)$ (avec M un réel strictement positif)
D'autre part pour tout φ et tout t,l'inégalité triangulaire donne

$$||x+Rot_\varphi(p.u_\theta+t.v_\theta||\geq||Rot_\varphi(p.u_\theta+t.v_\theta)||-||x||$$

mais une rotation conserve la norme donc

$$||Rot_\varphi(p.u_\theta+t.v_\theta||=||p.u_\theta+t.v_\theta||=\sqrt{p^2+t^2}$$

donc $||x+Rot_\varphi(p.u_\theta+t.v_\theta||\geq\sqrt{p^2+t^2}-||x||$ et pour avoir $||x+Rot_\varphi(p.u_\theta+t.v_\theta||\rangle M$ il suffit donc d'avoir $\sqrt{p^2+t^2}-||x||\rangle M$ et cette condition est réalisée pour tout t si $(M+||x||)^2-p^2\langle 0$ et pour $|t|\rangle\sqrt{(M+||x||)^2-p^2}$ si $(M+||x||)^2-p^2\geq 0$, donc dans tous les cas la fonction $t\rightarrow\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x+Rot_\varphi(p.u_\theta+t.v_\theta))d\varphi$ est nulle en dehors d'un segment ell est donc à support compact et donc son intégrale sur $\mathbb{R}$ est égale à son intégrale sur un ségment $[-m,m]$ et par continuité de la fonction qui à (t,φ) associe $f(x+Rot_\varphi(p.u_\theta+t.v_\theta))$ sur $[-m,m]\times[0,2\pi]$ on déduie par le théorème de FUBBINI

$$\int_{-m}^{m}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x+Rot_\varphi(p.u_\theta+t.v_\theta))d\varphi dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-m}^{m}f(x+Rot_\varphi(p.u_\theta+t.v_\theta))dtd\varphi$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}\mathbb{R}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x+Rot_\varphi(p.u_\theta+t.v_\theta))d\varphi dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}\mathbb{R}}f(x+Rot_\varphi(p.u_\theta+t.v_\theta))dtd\varphi$$

d'où l'égalité demandée.

18. Soit $\theta\in[0,2\pi[$ et $p\rangle A+||x||$ alors d'après la question précedente

$$\widehat{\mathcal{T}_{f,x}}(\theta,p)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}\mathbb{R}}f(x+Rot_\varphi(p.u_\theta+t.v_\theta))dtd\varphi$$

mais vu les calculs fait de la question 4 :

$$x + Rot_\varphi(p.u_\theta + t.v_\theta) = p'.u_{\varphi+\theta} + t'v_{\varphi+\theta} \quad où \quad p' = ||x||\cos(\Psi - \varphi - \theta) + p \; et \quad t' = ||x||\sin(\Psi - \varphi - \theta) + t$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}\mathbb{R}} f(x + Rot_\varphi(p.u_\theta + t.v_\theta))dt = \int_{\mathbb{R}\mathbb{R}} f(p'.u_{\varphi+\theta} + t'.v_{\varphi+\theta})dt$$

et en effectuant le changement de variable $t' = ||x||\sin(\Psi - \varphi - \theta) + t$ ce dernier intégrale devient

$$\int_{\mathbb{R}\mathbb{R}} f(p'.u_{\varphi+\theta} + t'.v_{\varphi+\theta})dt' = \widehat{f}(\varphi + \theta, p')$$

or $p' = ||x||\cos(\Psi - \varphi - \theta) + p$ et par hypothèse $p\rangle A + ||x||$ donc $p'\rangle A$ et puisque f verifie les hypothèses du théorème alors $\widehat{f}(\varphi+\theta, p') = 0$ donc $\int_{\mathbb{R}\mathbb{R}} f(p'.u_{\varphi+\theta}+t'.v_{\varphi+\theta})dt' = 0$ ou encore $\int_{\mathbb{R}\mathbb{R}} f(x+Rot_\varphi(p.u_\theta+t.v_\theta))dt = 0$ et ceci pour tout φ donc

$$\widehat{\mathcal{T}_{f,x}}(\theta, p) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}\mathbb{R}} f(x + Rot_\varphi(p.u_\theta + t.v_\theta))dtd\varphi = 0.$$

19. C'est le cercle de centre x et de rayon $||y||$.
20. D'après le 3 la fonction $\mathcal{T}_{f,x}$ est radiale et de plus d'après le 18 elle verifie les hypothèses du théorème (pour $A + ||x||$) donc d'après le 16 : $\mathcal{T}_{f,x}(y) = 0$ pour $||y||\rangle A + ||x||$ ou encore $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + Rot_\theta(y))d\theta = 0$ pour $||y||\rangle A + ||x||$, en particulier si $(x, R) \in Q_A$ alors $R\rangle\, ||x|| + A$ donc $||R.e_1||\rangle A + ||x||$ donc $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + Rot_\theta(R.e_1))d\theta = 0$ ou encore $\int_0^{2\pi} f(x_1 + R\cos\theta, x_2 + R\sin\theta)d\theta = 0$ donc la fonction f verifie les hypothèses du lemme et par suite f est nulle en dehors de $B(0, A)$. D'où le théorème.