

CONCOURS COMMUN MINES-PONTS 1995

CORRIGE DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES N°2

Première partie

1. (a) Si $C = 0$, alors $\Delta_n = 0$ pour tout n car tous ses coefficients sont nuls. Supposons $\Delta_n = 0$ pour tout n et montrons par récurrence que $c_n = 0$. C'est vrai pour $n = 0$ car $\Delta_0 = 0$. Si $c_k = 0$ pour $k \leq n-1$, alors Δ_n est un déterminant antidiagonal égal à $\pm c_n^{n+1}$ (les coefficients en haut de la seconde diagonale sont nuls), d'où $c_n = 0$. La suite C est donc nulle.

(b) Par hypothèse, pour tout $n \geq p$, on a $c_n = \lambda_1 c_{n-1} + \dots + \lambda_p c_{n-p}$, donc en notant L_k la k -ième ligne de Δ_n pour $0 \leq k \leq n$, on obtient $L_p = \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_{p-i} L_i$, donc $\Delta_n = 0$ pour tout $n \geq p$.

(c) Comme $1 \leq p \leq m+1$ et $2m+2 \leq n$, on a $n-m-1 \geq m+1$. Pour k décroissant de $n-m-1$ à $m+1$, on effectue l'opération élémentaire $L_k \leftarrow L_k - \sum_{j=1}^p \lambda_j L_{k-j}$. On obtient

alors par blocs $\Delta_{n-m-1} = \begin{vmatrix} \Delta_m & (*) \\ 0 & D' \end{vmatrix}$ où D' est un déterminant antidiagonal $\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \\ a & & & \end{vmatrix}$.

On en déduit que $\Delta_{n-m-1} = \pm a^{n-2m-1} \Delta_m$, donc si $\Delta_m \neq 0$ et $\Delta_{n-m-1} = 0$, alors $a = 0$, c'est-à-dire $c_n = \sum_{j=1}^p \lambda_j c_{n-j}$.

(d) La condition est nécessaire à cause de 1.b. Supposons que $\Delta_n = 0$ pour tout $n > m$ et $\Delta_m \neq 0$ (si tous les Δ_n sont nuls, on est ramené à la question 1.a). La dernière ligne de Δ_{m+1} est donc combinaison linéaire des précédentes, d'où l'existence de $\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}$ dans \mathbb{K} tels que $L_{m+1} = \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j L_{m+1-j}$. En regardant le coefficient situé sur la ligne $m+1$ et la colonne $k-m-1$, on en déduit que, pour $m+1 \leq k \leq 2(m+1)$, on a $c_k = \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j c_{k-j}$. On applique alors la question précédente avec $p = m+1$. Pour $n \geq 2m+3$, on a $n-m-1 \geq m+2$, donc $\Delta_{n-m-1} = 0$; or $\Delta_m \neq 0$, d'où $c_n = \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j c_{n-j}$. La suite C est bien pseudo-périodique.

2. (a) On décompose en éléments simples la fraction rationnelle f sur \mathbb{C} ; outre la partie entière éventuelle, qui est polynomiale, on obtient une combinaison linéaire d'éléments simples de la forme $\frac{1}{(1-\lambda x)^p}$, où λ^{-1} est un pôle de f . Cette expression est développable en série entière avec un rayon de convergence $|\lambda|^{-1}$, donc f est développable de rayon $R \geq \min\{|z| \mid z \text{ pôle de } f\}$. La somme de la série entière étant continue sur le disque ouvert de convergence, on en déduit qu'aucun des pôles ne peut être dans ce disque ouvert, donc R est égal au minimum des modules des pôles de f .

En utilisant l'identité pour $|x| < R$: $P(x) = Q(x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ on a : $p_0 + p_1 x + \dots + p_r x^r = (q_0 + q_1 x + \dots + q_s x^s)(c_0 + c_1 x + \dots + c_i x^i + \dots)$, on obtient $p_n = q_0 c_n + \dots + q_n c_0$, avec la convention $p_n = 0$ pour $n > r$, on obtient comme $q_0 = Q(0)$ est non nul, puisque 0 n'est pas pôle de f , un système échelonné par rapport aux c_i , à coefficients dans \mathbb{K} . Comme le coefficient dominant de chaque équation est q_0 non nul, on obtient que les c_n sont tous dans \mathbb{K} .

- (b) En posant $Q(x) = Q(0)(1 - \sum_{j=1}^p \lambda_j x^j)$, on a $\frac{P(x)}{Q(0)} = \frac{Q(x)}{Q(0)} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Pour tout $n > \deg P$, le terme de degré n de ce polynôme est nul, ce qui donne $c_n = \sum_{j=1}^p \lambda_j c_{n-j}$, donc C est pseudo-périodique.
3. (a) On a $\lim_{A \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^p |\lambda_j| A^{-j} = 0$, donc $\exists A_0 \geq 1, \forall A \geq A_0, \sum_{j=1}^p |\lambda_j| A^{-j} \leq 1$, d'où le résultat en multipliant par A^p .
- (b) On choisit $M = \max\{A_0, |c_k|^{1/(k+1)} \mid 0 \leq k \leq p-1\}$, de sorte que $|c_k| \leq M^{k+1}$ pour $k \leq p-1$. Supposons que $|c_k| \leq M^{k+1}$ pour $k \leq n-1$, alors $|c_n| \leq \sum_{j=1}^p |\lambda_j| M^{n-j+1} \leq M^{n+1}$ en utilisant le 3.a avec $A := M$. La récurrence est achevée.
- (c) D'après le 3.b, le rayon de convergence est $\geq \frac{1}{M}$. Soit $Q(x) = 1 - \sum_{j=1}^p \lambda_j x^j$. Alors les coefficients du développement en série entière de $S(x)Q(x)$ sont tous nuls à partir de l'indice q , donc $S(x)Q(x)$ est une fonction polynomiale $P(x)$, d'où S est une fraction régulière. L'unicité vient du fait que si $S(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ sur $] -R, R[$, alors $Q_2 P_1 - P_2 Q_1$ est un polynôme s'annulant sur $] -R, R[$ donc est le polynôme nul.
4. (a) On écrit $Q = 1 - \sum_{j=1}^p \lambda_j X^j$ avec $\lambda_j \in \mathbb{Z}$ et $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ avec $a_k \in \mathbb{Z}$. En écrivant $Q(x)f(x) = P(x)$, on obtient $c_n = a_n + \sum_{j=1}^{\min(n,p)} \lambda_j c_{n-j}$ pour $n \leq d$ et $c_n = \sum_{j=1}^p \lambda_j c_{n-j}$ pour $n > d$. Comme $c_0 = a_0$, on en déduit facilement par récurrence que tous les coefficients c_n appartiennent à \mathbb{Z} .
- (b) Il suffit d'appliquer le (a), ce qui donne $f(x) = S(x) = \frac{c_0 + (c_1 - 5c_0)x}{1 - 5x + 6x^2}$.

Seconde partie

1. Si $\theta = \pm 1$, $u_n(\theta) = 0$. Si $|\theta| < 1$, alors $\theta^n \pi \rightarrow 0$ et $|u_n(\theta)| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \pi |\theta|^n$, qui est le terme général d'une série géométrique convergente.
2. (a) On a $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{X - r_k} = - \sum_{k=1}^N \frac{1}{r_k} \frac{1}{1 - \frac{X}{r_k}}$. En développant en série entière, on obtient pour $|x| < \min_{1 \leq k \leq N} |r_k|$, $\frac{P'(x)}{P(x)} = - \sum_{k=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{r_k^{n+1}} = - \sum_{n=0}^{\infty} S_{n+1} x^n$. Comme P et P' sont à coefficients entiers, les coefficients du développement de P'/P sont entiers (d'après la partie 1, ou bien en dérivant successivement P'/P et en prenant la valeur en 0), d'où $S_n \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \geq 1$.
- (b) D'après la question précédente, $a_n = - \sum_{k=2}^N \frac{1}{r_k^n}$ qui tend vers 0 quand $N \rightarrow +\infty$ car $|r_k| > 1$ pour $2 \leq k \leq N$. On en déduit que $|u_n(\theta)| = \sin |\pi a_n| \leq \pi \sum_{k=2}^N \frac{1}{|r_k|^n}$ qui est le terme général d'une série convergente car $\frac{1}{|r_k|} < 1$ pour tout $k \geq 2$.
3. (a) Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt montre que $x_k = (x_k | z_k) z_k + \sum_{j=1}^{k-1} (x_k | z_j) z_j$ pour $1 \leq k \leq n$. La matrice de passage de (z_1, \dots, z_n) à (x_1, \dots, x_n) est triangulaire supérieure avec les coefficients $(x_k | z_k)$ sur la diagonale, ce qui permet de conclure en prenant son déterminant.
- (b) Comme (z_1, \dots, z_n) est orthonormée, son déterminant dans \mathcal{B} vaut ± 1 , et $|(x_k | z_k)| \leq \|x_k\|$ par Cauchy-Schwarz, ce qui donne l'inégalité de Hadamard $|\det(x_1, \dots, x_n)| \leq \prod_{k=1}^n \|x_k\|$.

4. (a) La série $\sum \theta_n x^n$ est géométrique donc $R_W = \frac{1}{|\theta|}$. Comme $|\theta^n| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} |c_n|$, on en déduit que $R_U = R_W = \frac{1}{|\theta|}$. Enfin, $|\varepsilon_n| \leq 1/2$ donc $R_V \geq 1$.

(b) $d_n = \theta^n - \varepsilon_n - \theta(\theta^{n-1} - \varepsilon_{n-1}) = \theta\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n$. Par hypothèse, $u_n(\theta) = |\sin \pi\varepsilon_n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, or $|\pi\varepsilon_n| \leq \pi/2$, donc (par continuité de arcsin) $\varepsilon_n \rightarrow 0$, d'où $u_n(\theta) \sim \pi\varepsilon_n$. On en déduit que $\sum |\varepsilon_n|$ converge, donc $\sum |d_n|$ également. Par suite, $\sum d_n$ converge et $d_n \rightarrow 0$ d'où $d_n^2 = o(|d_n|)$, ce qui entraîne que $\sum d_n^2$ converge également.

(c) On effectue sur Δ_n les opérations élémentaires sur les colonnes $C_j \leftarrow C_j - \theta C_{j-1}$ pour j décroissant de n à 1. Les coefficients c_j sur les colonnes 1 à n deviennent alors d_j . En appliquant l'inégalité de Hadamard, on obtient $\Delta_n^2 \leq (c_0^2 + \dots + c_n^2) \prod_{k=1}^n P_k$. Par ailleurs,

$$\frac{1}{2} \leq \frac{c_k}{\theta^k} \leq \frac{3}{2} \text{ pour tout } k, \text{ donc en élevant au carré et en sommant de } 0 \text{ à } n, \text{ on obtient que}$$

$$\Delta_n^2 \leq \frac{9}{4} \sum_{k=0}^n \theta^{2k} \prod_{k=1}^n P_k \leq \frac{9}{4} \theta^{2n} \sum_{k=0}^n \theta^{-2k} \prod_{k=1}^n P_k \leq \frac{9}{4(1 - \frac{1}{\theta^2})} \theta^{2n} \prod_{k=1}^n P_k.$$

En posant $x_n = K \theta^{2n} \prod_{k=1}^n P_k$, on a $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \theta^2 P_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, donc x_n tend vers 0 par règle de d'Alembert, ce qui entraîne que Δ_n tend également vers 0. Or (Δ_n) est une suite d'entiers, donc elle est nulle à partir d'un certain rang.

(d) D'après I.1.d, la suite (c_n) est pseudo-périodique donc d'après I.3, U est une fraction rationnelle. Comme $W(x) = \frac{1}{1 - \theta x}$ en est également une, $V(x) = W(x) - U(x)$ est une fraction rationnelle.

D'après le calcul fait en II.4.b, $\sum \varepsilon_n$ est absolument convergente, donc la fraction rationnelle $\sum \varepsilon_n x^n$ n'a aucun pôle de module inférieur ou égal à 1 ; ses seuls pôles éventuels sont de module > 1 . Or comme le rayon du développement est (d'après I.2.a) le plus petit module des pôles, on en déduit que $R_V > 1$.

(e) D'après le résultat admis en fin de première partie, $U(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, où P et Q sont des polynômes à coefficients entiers tels que $Q(0) = 1$. En utilisant les trois dernières questions, on a $U(x) = \frac{1}{1 - \theta x} - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n x^n = \frac{1}{1 - \theta x} - \frac{A(x)}{B(x)}$ où les seules racines de B sont de module > 1 . On en déduit que $Q(x) = (1 - \theta x)B(x)$, donc $\frac{1}{\theta}$ est l'unique racine de Q de module ≤ 1 .