

I.A Si $A \in O_3(\mathbf{R})$ on a ${}^t A A = \sqrt{\text{Tr}({}^t A A)} = \sqrt{3}$.

I.B $O_3(\mathbf{R})$ est borné car il est inclus dans la sphère de centre 0 de rayon $\sqrt{3}$. Par ailleurs l'application $M \mapsto {}^t M M$ est continue sur $M_3(\mathbf{R})$. Donc $O_3(\mathbf{R})$ qui est l'image réciproque du fermé $\{I_3\}$ est fermé. On en déduit que $O_3(\mathbf{R})$ est compact.

I.C L'application $M \mapsto \|M\|$ est continue car elle est 1-lipschitzienne ($|\|M\| - \|N\|| \leq \|M - N\|$).

I.D L'application $M \mapsto \|A - M\|$ est continue car elle est 1-lipschitzienne. Elle transforme donc le compact $O_3(\mathbf{R})$ en une partie compacte de $\mathbf{R}$. En particulier, elle atteint sa borne inférieure sur $O_3(\mathbf{R})$. Donc il existe une matrice U orthogonale telle que $\|A - U\| = d(A, O_3(\mathbf{R}))$.

I.E.1) On a $d(M, O_3(\mathbf{R})) \leq \|M - U\| \leq \|M - N\| + \|N - U\|$. Donc, pour tout $U \in O_3(\mathbf{R})$, on a $d(M, O_3(\mathbf{R})) - \|M - N\| \leq \|N - U\|$. Par définition de la borne inférieure (le plus grand des majorants), on a $d(M, O_3(\mathbf{R})) - \|M - N\| \leq d(N, O_3(\mathbf{R}))$ donc $d(M, O_3(\mathbf{R})) - d(N, O_3(\mathbf{R})) \leq \|M - N\|$.

I.E.2) Les rôles de M et N étant interchangeables on a $\|\Phi(M) - \Phi(N)\| \leq \|M - N\|$. Φ est 1-lipschitzienne donc continue.

I.F.1) Soit p la projection orthogonale sur P . p est linéaire donc continue. L'application $M \mapsto \|p(M)\|$ est continue comme composée d'applications continue. Sa restriction au compact $O_3(\mathbf{R})$ atteint donc un maximum. On peut choisir r tel que $\forall U \in O_3(\mathbf{R}), \|p(U)\| < r$.

Montrons que $d(P, O_3(\mathbf{R})) = d(P \cap B_r, O_3(\mathbf{R}))$.

- L'inégalité $d(P, O_3(\mathbf{R})) \leq d(P \cap B_r, O_3(\mathbf{R}))$ résulte de l'inclusion $P \cap B_r \subset P$.
- Soit $\varepsilon > 0$, il existe $M \in P$ telle que $d(M, O_3(\mathbf{R})) - \varepsilon < d(P, O_3(\mathbf{R}))$. Or, pour tout $U \in O_3(\mathbf{R})$ on a $\|U - M\| \geq \|U - p(U)\| \geq d(O_3(\mathbf{R}), P \cap B_r)$. Il en résulte $d(M, O_3(\mathbf{R})) \geq d(O_3(\mathbf{R}), P \cap B_r)$ donc $d(P, O_3(\mathbf{R})) + \varepsilon > d(P \cap B_r, O_3(\mathbf{R}))$. Comme ε est quelconque on a $d(P, O_3(\mathbf{R})) = d(P \cap B_r, O_3(\mathbf{R}))$.

I.F.2) $P \cap B_r$ est fermée comme intersection de deux fermés et bornée donc compacte. Φ atteint un maximum sur $P \cap B_r$. Donc il existe $A \in P \cap B_r$ telle que $\Phi(A) = d(P, O_3(\mathbf{R}))$.

Remarque On aurait pu considérer aussi la matrice $U \in O_3(\mathbf{R})$ rendant $\|U - p(U)\|$ minimum.

II.A ${}^t M M$ est symétrique car ${}^t({}^t M M) = {}^t M M$. De plus si $\lambda \in \text{Sp}({}^t M M)$, il existe X non nul tel que ${}^t M M X = \lambda X$. On a $\lambda = \frac{\|MX\|^2}{\|X\|^2} \geq 0$.

II.B ${}^t M M$ est diagonalisable dans une base orthonormale. Il existe une matrice de passage Ω orthogonale telle que ${}^t M M = \Omega D {}^t \Omega$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les valeurs propres positives de ${}^t M M$. Soient $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3})$ et $S = \Omega \Delta {}^t \Omega$. On a $S \in S_3^+(\mathbf{R})$ et $S^2 = {}^t M M$.

II.C Si M est inversible, ${}^t M M$ l'est aussi. Ses valeurs propres sont strictement positives. Il en va de même de celles de S . Posons $U = M S^{-1}$. Montrons que U est orthogonale. S étant symétrique S^{-1} l'est aussi donc ${}^t U U = S^{-1} {}^t M M S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = I_3$.

II.D $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$. On a ${}^t M M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$. Ses valeurs propres sont 1 (double) et 4.

La matrice de passage est : $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$. On a $S = \Omega \text{diag}(1, 1, 2) {}^t \Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ et

$$U = M S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

III.A.1) On a $\|UA\|^2 = \text{Tr}({}^t A {}^t U U A) = \text{Tr}({}^t A A) = \|A\|^2$

et $\|AU\|^2 = \text{Tr}({}^tU {}^tA A U) = \text{Tr}({}^tA A U {}^tU) = \|A\|^2$. Si $A \in M_3(\mathbf{R})$, on utilise sa décomposition polaire $A = US$. On diagonalise S dans une base orthonormale : $S = \Omega D {}^t\Omega$ où Ω est orthogonale et $S \in S_3^+(\mathbf{R})$. Alors, pour tout $V \in O_3(\mathbf{R})$, on a $\|A - V\| = \|U \Omega D {}^t\Omega - V\| = \|U \Omega (D - {}^t\Omega {}^tU V \Omega) {}^t\Omega\| = \|D - {}^t\Omega {}^tU V \Omega\|$. L'application $V \mapsto {}^t\Omega {}^tU V \Omega$ étant une bijection de $O_3(\mathbf{R})$ sur lui-même, on peut conclure $d(A, O_3(\mathbf{R})) = d(D, O_3(\mathbf{R}))$.

III.A2) On utilise I.F : on considère $A \in V$ telle que $d(A, O_3(\mathbf{R})) = d(V, O_3(\mathbf{R}))$ puis on écrit sa décomposition polaire $A = US$. On diagonalise S dans une base orthonormale : $S = \Omega D {}^t\Omega$ où Ω est orthogonale et $S \in S_3^+(\mathbf{R})$. On a vu $d(A, O_3(\mathbf{R})) = d(D, O_3(\mathbf{R}))$. On a $D = {}^tU {}^t\Omega A \Omega$. L'application $\Psi : M \mapsto {}^tU {}^t\Omega M \Omega$ est un automorphisme de $M_3(\mathbf{R})$. Elle transforme donc V en un sous-espace W de même dimension. On a $D \in W$. Il reste à prouver $d(V, O_3(\mathbf{R})) = d(W, O_3(\mathbf{R}))$.

On a, pour tout $M \in V$ $d(M, O_3(\mathbf{R})) = d(\Psi(M), O_3(\mathbf{R})) \geq d(W, O_3(\mathbf{R}))$ donc $d(V, O_3(\mathbf{R})) \geq d(W, O_3(\mathbf{R}))$. Inversement, si $N \in W$, $d(N, O_3(\mathbf{R})) = d(\Psi^{-1}(N), O_3(\mathbf{R})) \geq d(V, O_3(\mathbf{R}))$ donc $d(W, O_3(\mathbf{R})) \geq d(V, O_3(\mathbf{R}))$.

$$\text{III.B.1)} \quad \|D - U\|^2 = \|D\|^2 - 2\langle D, U \rangle + 3 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 - 2\langle D, U \rangle + 3.$$

III.B.2) En posant $U = (u_{i,j})$, on trouve $\langle D, U \rangle = \text{Tr}(DU) = \lambda_1 u_{1,1} + \lambda_2 u_{2,2} + \lambda_3 u_{3,3} \leq \sum_{i=1}^3 \lambda_i$ car U est orthogonale.

III.B.3) On a $\|D - I_3\|^2 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 - 2 \sum_{i=1}^3 \lambda_i + 3$. Ainsi on a $\forall U \in O_3(\mathbf{R})$, $\|D - U\| \geq \|D - I_3\|$. Comme $I_3 \in O_3(\mathbf{R})$, on peut conclure $d(D, O_3(\mathbf{R})) = \|D - I_3\|$.

III.C On a vu que dans ce cas particulier $D = \text{diag}(1, 1, 2)$. On a donc $d(M, O_3(\mathbf{R})) = \|D - I_3\| = 1$.

IV.A.1) 0 est valeur propre de A donc de ${}^tA A$. Notons λ_1 et λ_2 les deux autres.

D'après III, $d(A, O_3(\mathbf{R})) = 1 + (\sqrt{\lambda_1} - 1)^2 + (\sqrt{\lambda_2} - 1)^2 \geq 1$. On a donc prouvé $d(V, O_3(\mathbf{R})) \geq 1$.

IV.A.2) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \in V$. On a $\|A - I_3\|^2 = (a-1)^2 + b^2 + c^2 + (d-1)^2 + e^2 + f^2 + 1$. Cette norme est minimale pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et vaut alors 1. Donc $d(I_3, V) = 1$. On en déduit $d(V, O_3(\mathbf{R})) \leq 1$, car $I_3 \in O_3(\mathbf{R})$. Finalement $d(V, O_3(\mathbf{R})) = 1$.

IV.B On a $\|D - I_3\| = d(V, O_3(\mathbf{R})) = d(I_3, V)$. On en déduit que D est le projeté orthogonal de I_3 sur V . Donc $D - I_3 \in V^\perp$. Donc $V \subset [\text{Vect}(D - I_3)]^\perp$. l'inclusion est stricte car $\dim(V) = 6$ alors que $\dim([\text{Vect}(D - I_3)]^\perp) = 8$.

IV.C On calcule $R'_1(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $R'_2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $R'_3(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On vérifie aisément que la famille $(R'_1(0), R'_2(0), R'_3(0))$ est libre.

Par ailleurs, on calcule les produits scalaires $\langle D - I_3, R'_i(0) \rangle = \text{Tr}((D - I_3)R'_i(0)) = 0$. Ces matrices sont donc orthogonales à $I_3 - D$.

Plaçons-nous dans le sous-espace $\text{Vect}(D - I_3)^\perp$ qui est de dimension 8. Nous en étudions deux sous-espaces vectoriels : V qui est de dimension 6 et $\text{Vect}(R'_1(0), R'_2(0), R'_3(0))$ qui est de dimension 3. Leur intersection est donc un sous-espace de dimension ≥ 1 . Il existe donc $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ tel que $aR'_1(0) + bR'_2(0) + cR'_3(0) \in V$.

IV.D On utilise la formule de Taylor-Young en 0 : $f(t) = f(0) + tf'(0) + \frac{t^2}{2}f''(0) + t^2\varepsilon(t)$ où $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$. On calcule ensuite $f(0) = I_3$; $f'(0) = aR'_1(0) + bR'_2(0) + cR'_3(0) \in V$ (notée A) et $f''(0) = a^2R''_1(0) + abR'_1(0)R'_2(0) + acR'_1(0)R'_3(0) + b^2R''_2(0) + abR'_1(0)R'_2(0) + bcR'_2(0)R'_3(0) + c^2R''_3(0) + acR'_1(0)R'_3(0) + bcR'_2(0)R'_3(0) = 2(B + C)$

avec $B = \begin{pmatrix} 0 & -bc & ac \\ 0 & 0 & -ab \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \frac{1}{2} \text{diag}(-b^2 - a^2, -a^2 - c^2, -b^2 - c^2)$. On a bien $\langle I_3 - D, B \rangle = 0$.

IV.E On a $\|I_3 - D + t^2(B + C + \varepsilon(t))\| = \|f(t) - (tA + D)\| \geq d(O_3(\mathbf{R}, V)) = \|I_3 - D\|$ car $f(t) \in O_3(\mathbf{R})$ et $tA + D \in V$.

IV.E On développe le carré scalaire suivant en sachant que $\langle B, I_3 - D \rangle = 0$

$$\|I_3 - D + t^2(B + C + \varepsilon(t))\|^2 = \|I_3 - D\|^2 + 2t^2\langle D - I_3, C \rangle + 2t^2\langle D - I_3, \varepsilon(t) \rangle + t^4\|B + C + \varepsilon(t)\|^2$$

On a la formule souhaitée avec $\varepsilon_2(t) = 2\langle D - I_3, \varepsilon(t) \rangle + t^2\|B + C + \varepsilon(t)\|^2$.

Mais, d'après IV.E, $\|I_3 - D + t^2(B + C + \varepsilon(t))\|^2 \geq \|I_3 - D\|^2$. On en déduit $\langle I_3 - D, C \rangle \geq 0$.

IV.G On calcule $\langle I_3 - D, C \rangle = \text{Tr}[(I_3 - D)C] = -\frac{1}{2}[a^2(2 - x - y) + b^2(2 - x - z) + c^2(2 - y - z)]$. L'un au moins des nombres $2 - x - y$, $2 - x - z$ ou $2 - y - z$ est négatif.

IV.H On a $D \in V$ et $D - I_3 \perp V$ donc $\langle D, D - I_3 \rangle = 0$. D'où $\|D\|^2 = \langle D, I_3 \rangle$, ce qui donne $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$.

IV.I E est la sphère de centre $O' \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ de rayon $\frac{\sqrt{3}}{2}$. F est un plan. G est le demi-espace supérieur

délimité par F . $E \cap F$ est un cercle (ou $\emptyset$). Pour cela on calcule la distance de O' à F : $\frac{1}{\sqrt{2}}$. En utilisant

le théorème de Pythagore, on en déduit le rayon du cercle $\sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$. $E \cap G$ est une coupole dont le diamètre est le diamètre du cercle de base : 1.

IV.J $d(V, O_3(\mathbf{R})) = \|D - I_3\| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}$. Soit $K \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $K \in E \cap F$. La distance maximale de K à un point de $F \cap G$ est 1. Donc $\|D - I_3\| \leq 1$

Fin. Il y a peut-être des fautes...