Partie I : Étude d'une forme différentielle

I A) Comme $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$, l'ensemble d'équation $x^2-y^2=0$ est la réunion des deux plans contenant Oz et les deux bissectrices des axes dans le plan xOy.

I B 1) Pour être exacte sur $\mathcal{D}$, qui est un ouvert, la forme

$$\Omega=\varphi(x^2-y^2)(-4xy^2z)\,\mathrm{d}x+\varphi(x^2-y^2)4x^2yz\,\mathrm{d}y+\varphi(x^2-y^2)(x^4-y^4)\,\mathrm{d}z$$

dont les coefficients admettent des dérivées partielles continues sur cet ouvert, doit être localement fermée c'est-à-dire que les dérivées partielles « croisées » doivent coïncider. Ce qui donne les conditions nécessaires suivantes :

$$\begin{cases} 2x\varphi'(x^2-y^2)4x^2yz+8xyz\varphi(x^2-y^2)+8xyz\varphi(x^2-y^2)-2y\varphi'(x^2-y^2)4xy^2z=0\\ +4xy^2\varphi(x^2-y^2)+4x^3\varphi(x^2-y^2)+(x^4-y^4)2x\varphi'(x^2-y^2)=0\\ -4y^3\varphi(x^2-y^2)-2y(x^4-y^4)\varphi'(x^2-y^2)-4x^2y\varphi(x^2-y^2)=0.\end{cases}$$

Après réduction des termes semblables il reste $\begin{cases} 8xyz\big(2\varphi(x^2-y^2)+(x^2-y^2)\varphi'(x^2-y^2)\big)=0\\ 2x\big(2(x^2+y^2)\varphi(x^2-y^2)+(x^4-y^4)\varphi'(x^2-y^2)\big)=0\\ -2y\big(2(x^2+y^2)\varphi(x^2-y^2)+(x^4-y^4)\varphi'(x^2-y^2)\big)=0\end{cases}$

Comme $x^2+y^2\neq 0$ et que x et y ne peuvent être nuls ensemble puisque $(x,y)\in\mathcal{D}$, les deux dernières donnent : $2\varphi(x^2-y^2)+(x^2-y^2)\varphi'(x^2-y^2)=0$. Quand M décrit $\mathcal{D}$, le nombre $t=x^2-y^2$ décrit $\mathbb{R}^*$. φ doit donc vérifier l'équation différentielle $2\varphi(t)+t\varphi'(t)=0$ sur $\mathbb{R}^*$ tout entier.

I B 2) L'équation différentielle précédente s'écrit puisque $t\neq 0$ car $M\in\mathcal{D}$: $2t\varphi(t)+t^2\varphi'(t)=0$ soit $(t^2\varphi(t))'=0$ ou encore $t^2\varphi(t)=$Cte soit $\varphi(t)=\dfrac{C_1}{t^2}$ sur $]-\infty,0[$ et $\varphi(t)=\dfrac{C_2}{t^2}$ sur $]0,+\infty[$. Les conditions initiales seront en outre vérifiées pour $C_1=C_2=1$: $\boxed{\varphi(t)=\dfrac{1}{t^2}.}$

I C) Notons que l'on ne nous demande pas toutes les solutions mais seulement une. Essayons donc avec $\varphi(x^2-y^2)=\dfrac{1}{x^2-y^2}$. On cherche donc U tel que :

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{-4xy^2z}{(x^2-y^2)^2}\quad,\quad\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{4x^2yz}{(x^2-y^2)^2}\quad,\quad\frac{\partial U}{\partial z}=\frac{(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)}$$

On commence par la plus simple (la dernière) qui donne $U(x,y,z)=\dfrac{(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)}z+g(x,y)$ où $g(x,y)$ est une fonction arbitraire. Le report dans les deux autres équations donne immédiatement l'ensemble de deux conditions $\dfrac{\partial g}{\partial x}=0$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}=0$ suffisant pour que U convienne sur $\mathcal{D}$ tout entier ; donc $g=$Cte fera l'affaire et, en prenant cette constante nulle, la condition supplémentaire (3) est vérifiée. Donc $\boxed{U(x,y,z)=z.\dfrac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)}\text{ convient.}}$

Partie II : Étude des surfaces de niveau de U

II A) $U(x,y,z)=\lambda$ équivaut à $\begin{cases} z(x^2+y^2)-\lambda(x^2-y^2)=0\\ (x^2-y^2)\neq 0\end{cases}$. Pour obtenir Σ_λ, il faut donc enlever de S_λ les points de S_λ vérifiant $x^2-y^2=0$, c'est-à-dire les points vérifiant $\begin{cases} z(x^2+y^2)=0\\ x^2-y^2=0\end{cases}$ donc les points : $x=0=y; z$ quelconque, et les points : $z=0; x^2-y^2=0$.

$\boxed{\Sigma_\lambda\text{ est }S_\lambda\text{ privée des points de l'axe }Oz\text{ et des points des bissectrices des axes dans le plan }xOy.}$

II B) Si le point (x,y,z) est sur S_λ les points $(\pm x,\pm y,z)$ et $(\pm y,\pm x,-z)$ y sont aussi. Donc :

$\boxed{S_\lambda$ admet les plans xOz yOz et l'axe Oz comme éléments de symétrie ainsi que les deux bissectrices des axes dans le plan xOy.}

II C 1) $\boxed{S_0\text{ est constitué de l'union de l'axe }\mathbf{Oz}\text{ et du plan }xOy.}$

II C 2) $M(x,y,z)\in S_\lambda$ équivaut à $M(x,y,-z)\in S_{-\lambda}$ donc

$\boxed{S_{-\lambda}\text{ de déduit de }S_\lambda\text{ par symétrie orthogonale par rapport au plan }x=y}$

dans le plan xOy : $(x\sqrt{3}-y)(x^2+y^2)=\lambda(x^2-y^2)$. Posant $x=\rho\cos\theta$ $y=\rho\sin\theta$ on voit que $C'_{\lambda,1}$ est la réunion de $\rho=0$(l'origine) et de la courbe $\rho(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta)=\lambda(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$. Comme $\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta$ et $\cos^2\theta-\sin^2\theta$ ne s'annulent pas simultanément, cette dernière équation peut aussi s'écrire $\rho=\lambda\dfrac{\cos(2\theta)}{\cos(\theta)\sqrt{3}-\sin(\theta)}$. Enfin on remarque que cette courbe passe par l'origine, qu'il n'y a donc pas lieu de rajouter. Finalement

$$\boxed{C'_{\lambda,1}\text{ est la courbe }\rho=\lambda\frac{\cos(2\theta)}{\cos(\theta)\sqrt{3}-\sin(\theta)}=\lambda\frac{\cos(2\theta)}{2\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)}.}$$

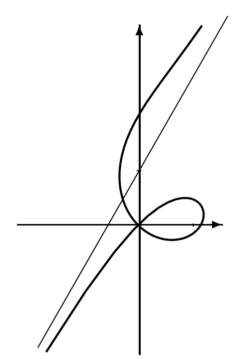
II D 2) La fonction $\theta\mapsto\rho(\theta)$ est de période 2π mais le changement de θ en $\theta+\pi$ change ρ en $-\rho$: on obtient le même point ; pour avoir toute la courbe il suffit d'étudier ρ sur un intervalle de longueur π, par exemple $[0,\pi]$. Dans cet intervalle la seule valeur de non définition de ρ est obtenue pour le dénominateur nul, c'est à dire $\theta=\frac{\pi}{3}$. La direction asymptotique est donc dans la direction $\theta=\frac{\pi}{3}$.

L'origine est obtenue pour $\rho=0$ donc les tangentes au pôle ont comme angles polaires : $2\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi$ soit $\theta=\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4}$.

Pour une courbe en polaires, l'étude du signe de ρ est plus importante que l'étude de ses variations (non demandée). Pour $\theta\neq\frac{\pi}{3}$, $\rho'(\theta)$ est du signe de son numérateur, soit, après réductions, du signe de $f(\theta)=-\sqrt{3}\sin\theta(1+2\cos^2\theta)+\cos\theta(1+2\sin^2\theta)$.

On pose $\theta=\varphi+\frac{\pi}{4}$. Alors : $1+2\cos^2\theta=1+(\cos\varphi-\sin\varphi)^2=2(1-\cos\varphi\sin\varphi)$ et $1+2\sin^2\theta=1+(\cos\varphi+\sin\varphi)^2=2(1+\cos\varphi\sin\varphi)$. Donc $f(\theta)=\sqrt{2}[-\sqrt{3}(\sin\varphi+\cos\varphi)(1-\cos\varphi\sin\varphi)+(\cos\varphi-\sin\varphi)(1+\cos\varphi\sin\varphi)]=-\sqrt{2}[(\sqrt{3}-1)\cos^3\varphi+(\sqrt{3}+1)\sin^3\varphi]$. Soit $\varphi_0=-\operatorname{Arctan}\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}}$. Alors $\varphi_0\in]-\frac{\pi}{4};0[$ et $f(\theta)$ est du signe de $(\cos\varphi\sin\varphi_0)^3-(\sin\varphi\cos\varphi_0)^3$, donc du signe de $\cos\varphi\sin\varphi_0-\sin\varphi\cos\varphi_0=\sin(\varphi_0-\varphi)$. D'où le tableau de variations :

θ	0	$\varphi_0+\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
φ	$-\frac{\pi}{4}$	φ_0	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{\rho}{\lambda}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 0.58$ ↗	0.61 ↘	0 ↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘	1 ↘	0 ↘	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$



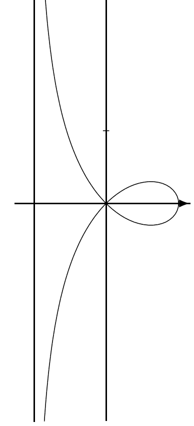
Étude de l'asymptote : On a $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{3}}\rho(\theta)\sin(\theta-\frac{\pi}{3})=\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{-\lambda\cos2\theta}{2}=\dfrac{\lambda}{4}$. Donc il y a une asymptote d'équation : $Y=\frac{\lambda}{4}$ dans le repère d'angle polaire $\frac{\pi}{3}$. De plus $\rho(\theta)\sin(\theta-\frac{\pi}{3})-\frac{\lambda}{4}=-\frac{\lambda}{2}\left(\cos2\theta+\frac{1}{2}\right)$ donc la courbe est au-dessous de l'asymptote quand $\theta\to\frac{\pi}{3}-$ et au-dessus de l'asymptote quand $\theta\to\frac{\pi}{3}+$. Pour $\theta\in[0,\pi]$, $\rho\sin(\theta-\frac{\pi}{3})=\frac{\lambda}{4}$ équivaut à $\theta=\frac{2\pi}{3}$, qui donne donc l'unique intersection de la courbe et de l'asymptote. D'où le tracé ci-contre (fait pour $\lambda=1$) ; il s'agit d'une strophoïde gauche.

II E 1) Éliminant z entre $z=x$ et l'équation de S_λ on obtient l'équation cartésienne de $C'_{\lambda,2}$ dans le plan xOy : $x(x^2+y^2)-\lambda(x^2-y^2)=0$. L'origine est le seul point de la courbe sur la droite $x=0$. Tous les autres sont donc sur une droite $y=tx$. Coupons donc la courbe par la droite variable $y=tx$. Nous obtenons, outre le point $x=0;y=0$, c'est-à-dire l'origine (encore !), le point $x=\lambda\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$; $y=\lambda\dfrac{t-t^3}{1+t^2}$. Quand t décrit $\mathbb{R}$, nous obtenons donc toute la courbe, sauf peut-être l'origine. En fait, même l'origine est obtenue (pour $t=1$). Résumons :

$$\boxed{x=\lambda\frac{1-t^2}{1+t^2}\ ;\ y=\lambda\frac{t-t^3}{1+t^2}\text{ est une représentation paramétrique de }C'_{\lambda,2}.}$$

II E 2) Comme x est pair et y impair on fait l'étude sur $\mathbb{R}^+$; on complètera par symétrie orthogonale par rapport à Ox. x et y sont définis et dérivables pour tout t puisque ce sont des fonctions rationnelles dont le dénominateur ne s'annule jamais ; x' est du signe de $-2t(1+t^2)-2t(1-t^2)=-4t$; y' est du signe de $(1-3t^2)(1+t^2)-2t(t-t^3)=1-3t^2+t^2-3t^4-2t^2+2t^4=1-4t^2-t^4$. y' est du signe de $-(t^2+2-\sqrt{5})(t^2+2+\sqrt{5})$. D'où le tableau de variations :

x'	$0\ -\ \ -\ \ -\ -\ -\ \ -$
y'	$+\ +\ \ +0-\ \ -\ -\ -\ \ -$
x	$\lambda\searrow\ \ \searrow 0 \searrow -\lambda$
y	$0\nearrow\ \ \searrow 0 \searrow -\infty$



Pour $t \geqslant 0$, O est obtenu pour $t=1$ et la pente de la tangente en ce point est la limite de $t = \frac{y-0}{x-0}$ donc la tangente en O est $y=x$; par symétrie par rapport à Ox, on obtient la deuxième tangente : $y=-x$. Quand $t \to +\infty$, x tend vers $-\lambda$ et y vers l'infini donc la droite $x=-\lambda$ est asymptote à la courbe. D'après le tableau de variations la courbe est à droite de $x=-\lambda$; voir le tracé ci-contre (il s'agit d'une strophoïde droite).

II E 3) Quand t décrit $[-1,1]$, on obtient effectivement une boucle dont la longueur est

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Le calcul déja fait de x' et y' nous donne

$$x'(t)^2+y'(t)^2 = \frac{\lambda^2[16t^2+(1-4t^2-t^4)^2]}{(1+t^2)^4} = \frac{\lambda^2(t^8+8t^6+14t^4+16t^2+1)}{(1+t^2)^4} = \frac{\lambda^2(1+t^2)^2(t^4+6t^2+1)}{(1+t^2)^4}$$

donc $$\boxed{L = 2\lambda\int_0^1 \frac{\sqrt{t^4+6t^2+1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \text{ et } r=6,\ s=1.}$$

La machine donne $1,24479\ldots$ comme valeur approchée. Donc $\dfrac{L}{2\lambda} = 1,245$ à 10^{-3} près.

II E 4) D'après la formule de Riemann-Green, $A = \displaystyle\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$, où $x=x(t)$ et $y=y(t)$. Comme $t = \dfrac{y}{x}$ on a $A = \dfrac{\lambda^2}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \lambda^2\int_0^1 \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$. On fait le changement de variable $t=\tan\theta$, $\theta\in[0,\frac{\pi}{4}]$, donc $A = \lambda^2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 2\theta}{\cos^2\theta}d\theta = \lambda^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{\sin^2 2\theta}{\cos^2\theta}\right)d\theta = \lambda^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 2 + 2\cos 2\theta\right)d\theta = \lambda^2[\tan\theta - 2\theta + \sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}$.

$$\boxed{A = \lambda^2(2-\tfrac{\pi}{2}) \text{ et } \frac{A}{\lambda^2} \approx 0,429 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$$

Partie III : Étude des droites tracées sur S_λ

III A 1) $S_\lambda \cap \Pi_t$ est l'ensemble des points vérifiant

$$\begin{cases} z(x^2+y^2)-\lambda(x^2-y^2)=0 \\ y=tx \end{cases} \iff \begin{cases} x^2[z(1+t^2)-\lambda(1-t^2)]=0 \\ y=tx \end{cases}$$

donc $$\boxed{S_\lambda\cap\Pi_t = (Oz)\cup\Delta_{\lambda,t}, \text{ où } \Delta_{\lambda,t} \text{ est la droite d'équations } \begin{cases} y=tx \\ z=\lambda\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}.}$$

III A 2) L'intersection de S_λ avec le plan $z=z_0$ a pour équations $\begin{cases} z_0(x^2+y^2)-\lambda(x^2-y^2)=0 \\ z=z_0\end{cases}$ ou encore $\begin{cases}(z_0-\lambda)x^2+(z_0+\lambda)y^2=0 \\ z=z_0\end{cases}$. Si cette intersection contient une droite, la première relation doit être vérifiée par des couples (x,y) autres que $(0,0)$ donc $z_0-\lambda$ et $z_0+\lambda$ doivent être de signe contraire et cette première relation est de la forme $y=\pm kx$ (ou $x=\pm ky$), équation de la réunion de deux plans contenant Oz ; l'un des deux doit contenir la droite en entier ; elle est donc dans un plan contenant Oz donc dans un plan Π_t ou dans le plan $x=0$. C'est donc l'une des droites trouvées à la question précédente ou bien elle est contenue dans $\begin{cases} x=0 \\ z=z_0 \\ (z_0+\lambda)y^2=0\end{cases}$, qui fournit une droite si et seulement si $z_0=-\lambda$. L'ensemble des droites horizontales contenues dans S_λ est donc $\{\Delta_{\lambda,t}, t\in\mathbb{R}\}\bigcup\{[x=0; z=-\lambda]\}$.

III B 1) Tout droite non parallèle au plan xOy le coupe en un point $A(p,q,0)$ et a un vecteur directeur de la forme $\overrightarrow{V}(a,b,1)$, ce qui permet de paramétrer la droite sous la forme demandée en prenant z pour paramètre. Pour une droite donnée cette représentation est unique, car si on change certains des quatre nombres a,b,p,q cela modifie soit la direction de la droite soit son intersection avec xOy.

qui se traduit par $z(a^2z^2+b^2z^2+2apz+2bqz+p^2+q^2)-\lambda(a^2z^2-b^2z^2+2apz-2bqz+p^2-q^2)=0$ pour tout z ; le coefficient de z^3 doit être nul donc $a^2+b^2=0$ soit $a=b=0$ puisque a et b sont réels ; le coefficient de z doit être nul donc $p^2+q^2-2\lambda(ap-bq)=p^2+q^2=0$ soit $p=q=0$ puisque p et q sont réels. Finalement, la seule droite non horizontale de S_λ est l'axe Oz.

Partie IV : Définition géométrique de S_λ

IV A) Le vecteur $\overrightarrow{M_0H}$ doit être orthogonal au vecteur directeur $(1,t,0)$ de la droite proposée ce qui donne la condition sur les coordonnées (X,Y,Z) du point H cherché : $(X-x_0).1+(Y-y_0).t=0$; comme $Y=tX$, on a donc $X(1+t^2)=x_0+ty_0$. Enfin, la coordonnée Z est la même que pour tout autre point de la droite. Par conséquent, les coordonnées de $H_{\lambda,t}$ sont : $X=\dfrac{x_0+ty_0}{1+t^2}$; $Y=t\dfrac{x_0+ty_0}{1+t^2}$; $Z=\lambda\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

IV B) On écrit vectoriellement les formules précédentes : $\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\y_0\\-\lambda\end{pmatrix}+\dfrac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix}x_0\\-y_0\\2\lambda\end{pmatrix}+\dfrac{t}{1+t^2}\begin{pmatrix}y_0\\x_0\\0\end{pmatrix}$. Le vecteur $\vec{U}=\begin{pmatrix}x_0\\-y_0\\2\lambda\end{pmatrix}$ n'est pas nul et, si le point M_0 n'est pas sur Oz, le vecteur $\vec{V}=\begin{pmatrix}y_0\\x_0\\0\end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $\vec{U}$. Le point $H_{0,t}$ appartient donc au plan Q_0 passant par le point $(0,y_0,-\lambda)$ et dirigé par ces deux vecteurs.

L'équation de Q_0 est : $\begin{vmatrix}X-0 & x_0 & y_0\\ Y-y_0 & -y_0 & x_0\\ Z+\lambda & 2\lambda & 0\end{vmatrix}=0$. En développant par rapport à la première colonne, on obtient :

$$\boxed{\text{l'équation de } Q_0 :\ -2\lambda x_0X+2\lambda y_0Y+Z(x_0^2+y_0^2)+\lambda(x_0^2+y_0^2)=0}$$

Compte tenu que M_0 est sur S_λ, il est immédiat de vérifier que ses coordonnées vérifient l'équation de Q_0.
Remarque : si M_0 est sur Oz, alors H est sur Oz pour tout t. N'importe quel plan Q_0 passant par Oz répond à la question.

IV C) Projeter sur le plan xOy, c'est créer un cylindre de direction Oz s'appuyant sur l'objet à projeter (équation du type $F(x,y)=0$), puis intersecter avec le plan xOy (ajouter la condition $z=0$). Il suffit donc d'ignorer Z dans la représentation paramétrique de la courbe décrite par $H_{\lambda,t}$. On obtient ainsi la représentation paramétrique de Γ'_0, (où on utilise $1=\frac{1}{2}[(1+t^2)+(1-t^2)]$) :

$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\y_0\end{pmatrix}+\frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix}x_0\\-y_0\end{pmatrix}+\frac{t}{1+t^2}\begin{pmatrix}y_0\\x_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x_0}{2}\\\frac{y_0}{2}\end{pmatrix}+\frac{1-t^2}{2(1+t^2)}\begin{pmatrix}x_0\\-y_0\end{pmatrix}+\frac{t}{1+t^2}\begin{pmatrix}y_0\\x_0\end{pmatrix}.$$

Si $x_0=y_0=0$, on obtient un point. Sinon, on norme les deux vecteurs générateurs (qui sont orthogonaux et de même norme), et on fait le changement de paramètre $t=\tan\theta$, θ décrivant $]-\frac{\pi}{2}:\frac{\pi}{2}[$. On obtient la représentation paramétrique :

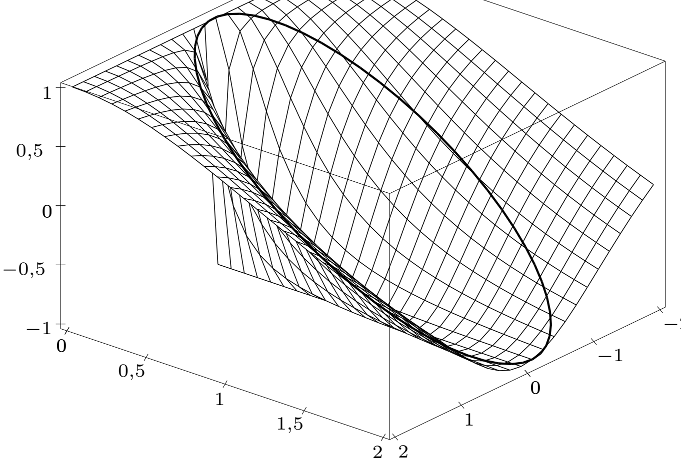
$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x_0}{2}\\\frac{y_0}{2}\end{pmatrix}+\frac{(1-t^2)\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{2(1+t^2)}\vec{I}+\frac{t\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{1+t^2}\vec{J}=\begin{pmatrix}\frac{x_0}{2}\\\frac{y_0}{2}\end{pmatrix}+\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{2}\cos 2\theta\vec{I}+\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{2}\sin 2\theta\vec{J}$$

On reconnaît une représentation paramétrique du cercle de centre $(\frac{x_0}{2},\frac{y_0}{2})$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{2}$ privé du point $\theta=\frac{\pi}{2}$ donc du point $(x=0;y=y_0)$;

$$\boxed{\Gamma'_0 \text{ est le cercle } X^2+Y^2-x_0X-y_0Y=0 \text{ privé du point } (x=0;y=y_0).}$$

N'oublions pas le cas délaissé où $x_0=y_0=0$.
Intersection d'un cylindre de révolution (privé d'une génératrice) et d'un plan non parallèle à l'axe du cylindre (si M_0 n'est pas sur Oz), Γ_0 est une ellipse (privée d'un point). Si M_0 est sur Oz ($x_0=0=y_0$) A) donne : $X=0$; $Y=0$; $Z=\lambda\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.
Quand t décrit $\mathbb{R}$, on voit que Γ_0 est un segment vertical.

IV D) Appliquons ce qui précède au point $M_0=(\lambda,0,\lambda)$ de S_λ.
Alors Γ'_0 est le cercle C de centre $(\frac{\lambda}{2},0,0)$ et de rayon $\frac{\lambda}{2}$ dans le plan xOy, privé de O. Q_0 est le plan $2x=z+\lambda$.
On voit bien alors l'ellipse d'intersection du plan et du cylindre de révolution. Notamment, son point le plus haut est $(\lambda,0,\lambda)$ et son point le plus bas est $(0,0,-\lambda)$. C'est ce dernier point qu'il faut enlever pour obtenir Γ_0. (voir dessin plus loin)
Cela dit, en reprenant III, on voit, en coupant S_λ par les plans $z=z_0$, que S_λ est la réunion des droites horizontales $\Delta_{\lambda,t}$, de la droite $x=0, z=-\lambda$ et de l'axe Oz. De plus, on voit que les $\Delta_{\lambda,t}$ sont obtenues quand z_0 décrit $]-\lambda,\lambda]$ et que, dans chaque plan $z=z_0$, il y en a deux (sauf pour $z_0=\lambda$, où les deux sont confondues).



Or le plan $z = z_0$, pour $z_0 \in]-\lambda, \lambda]$, coupe Oz en un point et l'ellipse trouvée plus haut en deux points distincts (sauf pour $z_0 = \lambda$). Les deux droites $\Delta_{\lambda,t}$ joignent donc l'intersection du plan avec Oz à chacun des deux points de l'ellipse.
Finalement, après avoir mis de côté l'axe Oz et la droite $x = 0, z = -\lambda$, on voit que S_λ est engendrée par les droites horizontales s'appuyant sur Oz et rencontrant l'ellipse située dans Q_0 dont la projection orthogonale sur xOy est Γ_0. S_λ s'appelle un **CONOÏDE DE PLÜCKER.** Plus généralement, on appelle conoïde une surface engendrée par une droite variable parallèle à un plan fixe, rencontrant une droite fixe et aussi une courbe fixe.
La figure ci-contre met en évidence les courbes tracées sur S_λ et définies par x = constante ou y=constante. L'ellipse se devine bien...

Partie V : Courbes asymptotiques de S_λ

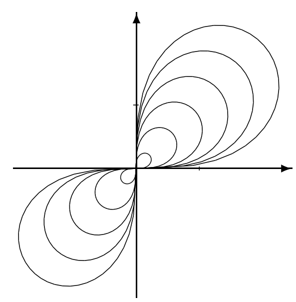
V A) Avec $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$ on trouve immédiatement que $M \in S_\lambda$ équivaut à $z = \lambda\cos 2\theta$ ou $\rho = 0$. ($\rho = 0$ donne l'axe Oz, qu'on enlève dans la suite ; $z = \lambda\cos 2\theta$ donne, pour θ fixé, une droite horizontale.)

V B) La normale en M à S_λ est dirigée par $\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial\theta} \wedge \dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial\rho}$, s'il est non nul ; or $\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial\theta} = \rho\vec{v} - 2\lambda\sin(2\theta)\vec{k}$ et $\overrightarrow{OM}\rho = \vec{u}$ donc $\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial\theta} \wedge \dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial\rho} = 2\lambda\sin 2\theta\vec{v} + \rho\vec{k}$, qui est effectivement non nul puisque $\rho \neq 0$. Donc $\vec{n}$ est normal à la surface si et seulement si $\alpha = 0$ et $\beta = 2\lambda\sin(2\theta)$.

V C) Le plan osculateur en M est dirigé par les deux vecteurs $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}$ et $\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{d\theta^2}$ s'il sont non colinéaires. Or $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} = \psi'\vec{u} + \psi\vec{v} - 2\lambda\sin(2\theta)\vec{k}$ et $\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{d\theta^2} = (\psi'' - \psi)\vec{u} + 2\psi'\vec{v} - 4\lambda\cos(2\theta)\vec{k}$. En faisant le produit vectoriel, $\overrightarrow{N} = (-4\lambda\cos(2\theta)\psi + 4\lambda\sin(2\theta)\psi')\vec{u} + (-2\lambda\sin(2\theta)(\psi'' - \psi) + 4\lambda\psi'\cos(2\theta))\vec{v} + 2(\psi'^2 + \psi^2 - \psi\psi'')\vec{k}$ est un vecteur orthogonal au plan osculateur à $L_{\lambda,\varphi}$ en M.

V D 1) Les deux plans coïncident si et seulement si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{N}$ sont colinéaires, soit $(-4\lambda\cos(2\theta) + 4\lambda\sin(2\theta)\psi') = 0$ et comme λ est non nul, pour que $L_{\lambda,\psi}$ soit une asymptotique il faut et suffit que $\cos(2\theta)\psi + \sin(2\theta)\psi' = 0$.

V D 2) Sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\sin 2\theta > 0$. L'équation différentielle précédente équivaut donc à $\dfrac{d}{d\theta}\Big(\dfrac{\psi(\theta)}{\sqrt{\sin 2\theta}}\Big) = 0$. Ainsi, $\psi(\theta) = C\sqrt{\sin 2\theta}$ où C est une constante arbitraire.



V D 3) Le point A proposé a pour angle polaire $\theta = \frac{\pi}{4}$ et $\rho = \sqrt{2}$ donc il faut prendre $C = \sqrt{2}$.
Comme le changement de θ en $\frac{\pi}{2} - \theta$ laisse ρ invariant on peut se limiter à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{4}]$, puis effectuer sur l'arc obtenu une symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice des axes (rappelons qu'on se limite à $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$. ρ étant monotone sur cet intervalle le tracé est immédiat. On découvre une famille de lemniscates de Bernoulli, homothétiques les unes des autres.