Banque PT 2010 — épreuve B

Partie I

Question I.1

Les matrices des formes quadratiques associées sont $Q_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q_2 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

On trouve aisément leurs polynômes caractéristiques :

$$\text{dét}(Q_1 - XI_3) = -X(X-2)(X-3) \quad \text{et} \quad \text{dét}(Q_2 - XI_3) = -(X+2)(X-3)(X-6).$$

Ainsi, dans des bases orthonormées bien choisies, les équations deviennent : $2X^2 + 3Y^2 = 1$ pour $\mathcal{Q}_1$; $-2X^2 + 3Y^2 + 6Z^2 = 1$ pour $\mathcal{Q}_2$.

On reconnaît : $\mathcal{Q}_1$ est un cylindre à base elliptique ; $\mathcal{Q}_2$ est un hyperboloïde à une nappe.

Question I.2

Posant $f(x,y,z) = 7x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy - 2yz - 4xz - 4x + 5y + 4z + 4 = 0$, on trouve que

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x,y,z) = \vec{0} \iff \begin{cases} 7x + 2y - 2z = 2 \\ 2x + 4y - z = -\dfrac{5}{2} \\ -2x - y + 4z = -2 \end{cases} \iff (x,y,z) = (\frac{11}{27}, -\frac{26}{27}, -\frac{29}{54}),$$

ce qui revient à dire que $\mathcal{Q}_3$ est une quadrique à centre, et que I est son centre.

La matrice de la forme quadratique associée est $Q_3 = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, dont le polynôme caractéristique vaut $\text{dét}(Q_3 - XI_3) = -(X-3)^2(X-9)$.

L'espace propre pour la valeur propre 9 est la droite dirigée par $(2,1,-1)$ donc aussi par $\vec{e}_1$.

L'espace propre pour la valeur propre 3 est ainsi le plan orthogonal, d'équation $2x + y - z = 0$, dont il se trouve que $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthonormée.

Finalement, dans le repère orthonormé $(I; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, une équation de $\mathcal{Q}_3$ est $9X^2 + 3Y^2 + 3Z^2 - f(I) = 0$ donc (si on a une calculatrice pour évaluer $f(I)$) : $9X^2 + 3Y^2 + 3Z^2 = \dfrac{8}{27}$.

On reconnaît un ellipsoïde, de révolution autour de l'axe $(I; \vec{e}_1)$ des abscisses X.

On trouve l'ellipsoïde qui est baptisé $\mathcal{Q}$ dans la suite.

Question I.3

Soit V le volume demandé. Pour $x = x_0$ fixé, la section du volume avec le plan $x = x_0$ est un disque d'équation $3y^2 + 3z^2 = \dfrac{8}{27} - 9x_0^2$ et donc de rayon $\dfrac{\sqrt{8 - 243x_0^2}}{9}$, sa surface vaut $S(x_0) = \pi(\dfrac{8}{81} - 3x_0^2)$.

On en déduit le volume demandé

$$V = \int_{-\frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}}^{\frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}} \pi(\frac{8}{81} - 3x_0^2)\, dx_0 = \pi \left[\frac{8x_0}{81} - x_0^3\right]_{-\frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}}^{\frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}} = \frac{64\pi\sqrt{6}}{6561}.$$

(Là encore, sans calculatrice, c'est pénible.)

On connaît peut-être aussi la formule $V = \dfrac{4}{3}\pi abc$ du volume de l'ellipsoïde d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Question I.4

Posant $\varphi(x,y,z) = 9x^2 + 3y^2 + 3z^2 - \dfrac{8}{27}$, on sait que $\vec{n}_0 = \overrightarrow{\text{grad}}(\varphi)(x_0, y_0, z_0)$ dirige la normale au plan tangent demandé. On trouve ici que $\vec{n}_0$ est colinéaire à $(3x_0, y_0, z_0)$.

Ce plan tangent a donc pour équation $3x_0x + y_0y + z_0z = 3x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \iff 3x_0x + y_0y + z_0z = \dfrac{8}{81}$.

Question I.5

I.5.a La normale est paramétrée par $\begin{cases} x = x_0 + 3tx_0 \\ y = y_0 + ty_0 \\ z = z_0 + tz_0 \end{cases}$ et admet donc pour équations $\begin{cases} y_0x - 3x_0y = -2x_0y_0 \\ yz_0 - y_0z = 0 \end{cases}$ par exemple.

I.5.b Comme M, P, Q et R sont tous les quatre sur la même droite Δ_M, les trois vecteurs $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MQ}$ et $\overrightarrow{MR}$ sont évidemment colinéaires.

Question I.6

Il est utile, voire nécessaire, d'avoir à disposition Maple pour traiter cette question...

I.6.a L'intersection de $\mathcal{Q}$ avec le plan $z = 0$ est l'ellipse $\mathcal{E}_0$ d'équation $9x^2 + 3y^2 = \dfrac{8}{27}$.

I.6.b Un point M est sur le cône $\mathcal{C}_T$ si et seulement si la droite (TM) coupe le plan $z = 0$ en un point de l'ellipse $\mathcal{E}_0$.

On aura alors $T + \lambda\overrightarrow{TM} \in \mathcal{E}_0$, et on obtiendra une équation du cône en éliminant le paramètre λ.

I.6.c On obtient ainsi

$$\begin{cases} 9(p + \lambda(x - p))^2 + 3(q + \lambda(y - q))^2 = \dfrac{8}{27} \\ r + \lambda(z - r) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{243}{8}(p + \lambda(x - p))^2 + \dfrac{81}{8}(q + \lambda(y - q))^2 = 1 \\ r + \lambda(z - r) = 0 \end{cases}$$

Observons que $(z - r)(p + \lambda(x - p)) = p(z - r) - r(x - p) = pz - rx$ et que $(z - r)(q + \lambda(y - q)) = q(z - r) - r(y - q) = qz - ry$, en utilisant$r + \lambda(z - r) = 0$, et donc qu'en multipliant la première égalité par $(z - r)^2$ on obtient bien une équation du cône $\mathcal{C}_T$ sous la forme :

$$\frac{243}{8}(rx - pz)^2 + \frac{81}{8}(ry - qz)^2 = (z - r)^2.$$

I.6.d L'intersection $\mathcal{C}_T \cap (yOz)$ a alors pour équations $x = 0$ et $\dfrac{243}{8}p^2z^2 + \dfrac{81}{8}(ry - qz)^2 = (z - r)^2$.

Cette deuxième équation se développe en

$$\begin{aligned} &(\frac{243}{8}p^2 + \frac{81}{8}q^2 - 1)z^2 + \frac{81}{8}r^2y^2 - \frac{81}{4}rqyz + 2rz = r^2 \\ \iff &(3p^2 + q^2 - \frac{8}{81})z^2 + r^2y^2 - 2rqyz + \frac{16}{81}rz = \frac{8}{81}r^2. \qquad (e) \end{aligned}$$

I.6.e (e) est l'équation d'une conique du plan yOz.

La méthode du gradient (et l'utilisation de Maple !) montre que, si $3p^2 \neq \dfrac{8}{81}$, cette conique a un centre de coordonnées $y = -\dfrac{8}{81}\dfrac{q}{3p^2 - \frac{8}{81}}$ et $z = -\dfrac{8}{81}\dfrac{r}{3p^2 - \frac{8}{81}}$. L'origine ayant été translatée en ce centre, l'équation (e) se réécrit

$$(3p^2 + q^2 - \frac{8}{81})z^2 + r^2y^2 - 2rqyz = \frac{24}{81}\frac{p^2r^2}{3p^2 - \frac{8}{81}}. \qquad (e')$$

La matrice de la forme quadratique associée est $Q = \begin{pmatrix} 3p^2 + q^2 - \dfrac{8}{81} & -rq \\ -rq & r^2 \end{pmatrix}$ et le polynôme caractéristique de Q vaut $X^2 - \operatorname{tr}(Q)X + \operatorname{dét} Q$.

Pour que l'intersection $\mathcal{C}_T \cap (yOz)$ soit un cercle, il faut imposer que Q ait deux valeurs propres égales, donc que le discriminant du polynôme précédent soit nul.

On obtient ainsi la condition $(\operatorname{tr} Q)^2 = 4 \operatorname{dét} Q$ ou encore

$$\left(3p^2 + q^2 + r^2 - \frac{8}{81}\right)^2 = 4r^2(3p^2 - \frac{8}{81}).$$

Cette condition impose que $3p^2 > \dfrac{8}{81}$, ce qui entraîne que la trace est positive, donc la valeur propre double également positive et finalement que (e') est bien une équation de cercle.

On peut alors poser $a^2 = 3p^2 - \dfrac{8}{81}$, et la condition (C) se réécrit

$$(a^2 + q^2 + r^2)^2 = 4a^2r^2 \iff a^2 \pm 2ar + r^2 + q^2 = 0 \iff (a \pm r)^2 + q^2 = 0 \iff q = 0 \text{ et } a = \pm r$$

$\mathcal{H}$ est donc l'hyperbole du plan $y = 0$ qui a pour équation $3x^2 - z^2 = \dfrac{8}{81}$ (puisqu'on a écrit les coordonnées de T sous la forme $x = p$, $y = q$, $z = r$).

Partie II

Question II.1
$\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(2,1,0)$ et de rayon $R = \sqrt{5}$ puisque son équation se réécrit facilement $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$.

Question II.2
Pour trouver la tangente au cercle en O, on peut, par exemple, dire qu'elle est orthogonale à $\overrightarrow{\Omega O}$, on obtient ainsi la droite du plan $z = 0$ qui a pour équation $2x + y = 0$.

Question II.3
La droite d'équation $y = mx - 3m - 2$ a bien pour coeffiicient directeur m, elle passe bien par A : c'est donc d_m.

Question II.4
C'est une formule bien connue : $\delta_m = \dfrac{|2m - 3m - 2 - 1|}{\sqrt{m^2 + 1^2}} = \dfrac{|m+3|}{\sqrt{m^2+1}}$.

Question II.5
d_m est tangente au cercle si et seulement si $\delta_m = R$, c'est-à-dire, en élevant au carré si et seulement si $(m+3)^2 = 5(m^2+1) \iff 4m^2 - 6m - 4 = 0 \iff 4(m-2)(m+\frac{1}{2}) = 0$. On trouve donc bien deux tangentes issues de A, de pentes 2 et $-1/2$. On remarque au passage que ces deux tangentes sont perpendiculaires en A.

d_2 a pour équation $y = 2x - 8$ (et $z = 0$, bien sûr), elle est dirigée par $\vec{u}_2 = (1,2,0)$; on trouve son point de contact P_2 avec le cercle en écrivant par exemple

$$\begin{cases} P_2 \in d_2 \\ \vec{u}_2 \perp \overrightarrow{\Omega P_2} \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ y = 2x - 8 \\ x - 2 + 2(y-1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

De même $d_{-1/2}$ a pour équation $y = -\dfrac{x+1}{2}$ (et $z = 0$). La même méthode fournit le point de contact $P_{-1/2}$ avec le cercle ; on obtient $P_{-1/2}(1,-1,0)$.

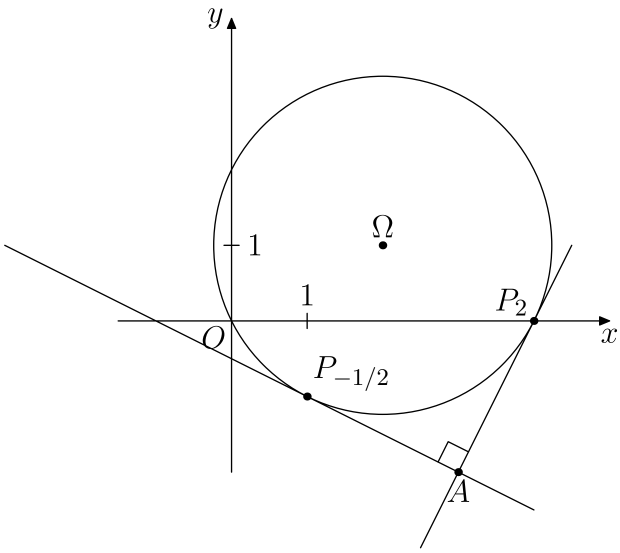

Figure 1 deux tangentes perpendiculaires issues de A

Question II.6
Dans toute la suite de cette partie, on travaille dans le plan (xOy) d'équation $z = 0$ et on omettra la troisième coordonnée, toujours nulle, des points considérés.

Avec les notations usuelles, notre ellipse, centrée à l'origine et d'axe focal (Oy), a pour paramètres $a = 1$, $b = 1/2$ donc $c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ses foyers sont donc $F_1(0, \dfrac{\sqrt{3}}{2})$ et $F_2(0, -\dfrac{\sqrt{3}}{2})$.

Ses directrices sont d'équations $y = \pm\dfrac{a^2}{c} = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; son excentricité est $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Question II.7
On utilise la formule de Green-Riemann pour calculer l'aire $\mathcal{A}$ demandée :

$$\mathcal{A} = \oint_{\mathcal{E}} x\,dy = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\cos t\,\cos t\,dt = \frac{1}{4}\left[t + \cos t \sin t\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Question II.8
Le point B est le point de paramètre $t = \dfrac{\pi}{3}$. En ce point, la tangente est dirigée par le vecteur de coordonnées $(-\dfrac{1}{2}\sin t, \cos t) = (-\dfrac{\sqrt{3}}{4}, \dfrac{1}{2})$.
Une équation de la tangente est donc $2x + y\sqrt{3} = 2$.

Question II.9
II.9.a On reprend l'équation cartésienne de l'ellipse, sous la forme $\varphi(x,y) = 0$ où $\varphi(x,y) = 4x^2 + y^2 - 1$.
On sait que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\varphi)$ dirige la normale au point courant.
On en déduit une équation de la tangente en un point $(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$ sous la forme $4x_0x + y_0y = 4x_0^2 + y_0^2$ ou encore $4x_0x + y_0y = 1$, puisque $\varphi(x_0, y_0) = 0$.
II.9.b D est tangente à $\mathcal{E}$ si son équation est équivalente à la précédente, pour des valeurs particulières de (x_0, y_0).
Comme a et b sont non tous les deux nuls, c n'est pas nul non plus.
D est alors tangente à $\mathcal{E}$ si et seulement si il existe $(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$ tel que $\begin{cases} 4x_0 = \dfrac{a}{c} \\ y_0 = \dfrac{b}{c} \end{cases}$ c'est-à-dire si et seulement si $4\left(\dfrac{a}{4c}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{c}\right)^2 = 1$ et on trouve bien la condition $a^2 + 4b^2 = 4c^2$.
II.9.c Il suffit de remplacer dans l'équation : D passe par $M(\alpha, \beta)$ si et seulement si $a\alpha + b\beta = c$.
II.9.d L'énoncé semble supposer $a \neq 0$.
On réunit les deux résultats précédents :

$$\begin{cases} M \in D \\ D \text{ tangente à } \mathcal{E} \end{cases} \iff \begin{cases} c = a\alpha + b\beta \\ a^2 + 4b^2 = 4c^2 \end{cases} \iff \begin{cases} c = a\alpha + b\beta \\ a^2 + 4b^2 = 4a^2\alpha^2 + 8ab\alpha\beta + 4b^2\beta^2 \end{cases}$$

et, divisant par a^2, on obtient la condition requise :

$$1 + 4m^2 = 4\alpha^2 - 8m\alpha\beta + 4m^2\beta^2 \iff (1-\beta^2)m^2 + 2\alpha\beta m + \frac{1}{4} - \alpha^2 = 0.$$

II.9.e On cherche à quelle condition l'équation précédente a deux solutions distinctes : il s'agit bien sûr de dire que le discriminant du trinôme est strictement positif. On trouve donc $4\alpha^2\beta^2 - 4(\dfrac{1}{4} - \alpha^2)(1-\beta^2) > 0$ ou encore $4\alpha^2 + \beta^2 > 1$: il s'agit bien entendu des points à l'extérieur de l'ellipse, ce dont on aurait pu se douter.
Remarque : dans le cas $\beta = \pm 1$, on ne peut plus poser $m = -\dfrac{b}{a}$, mais par exemple $m' = -\dfrac{a}{b}$. On trouverait alors la condition $1 - \beta^2 + 2\alpha\beta m' + (\dfrac{1}{4} - \alpha^2)m'^2 = 0$ dont le discriminant vaut encore $\alpha^2 + \beta^2 - 1$, ce qui donnerait le même résultat.
II.9.f Les deux tangentes trouvées sont orthogonales si leurs coefficients directeurs m_1 et m_2 vérifient $m_1m_2 = -1$, ce qui revient à dire que le produit des racines de l'équation du second degré en m précédente vaut -1. On trouve donc la condition $\dfrac{\frac{1}{4} - \alpha^2}{1 - \beta^2} = -1$ ce qui se transforme en $4\alpha^2 + 4\beta^2 = 5$. On trouve donc un cercle centré à l'origine et de rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, appelé *cercle orthoptique de l'ellipse.*
On trouvera la construction dans la figure 2, page 5.

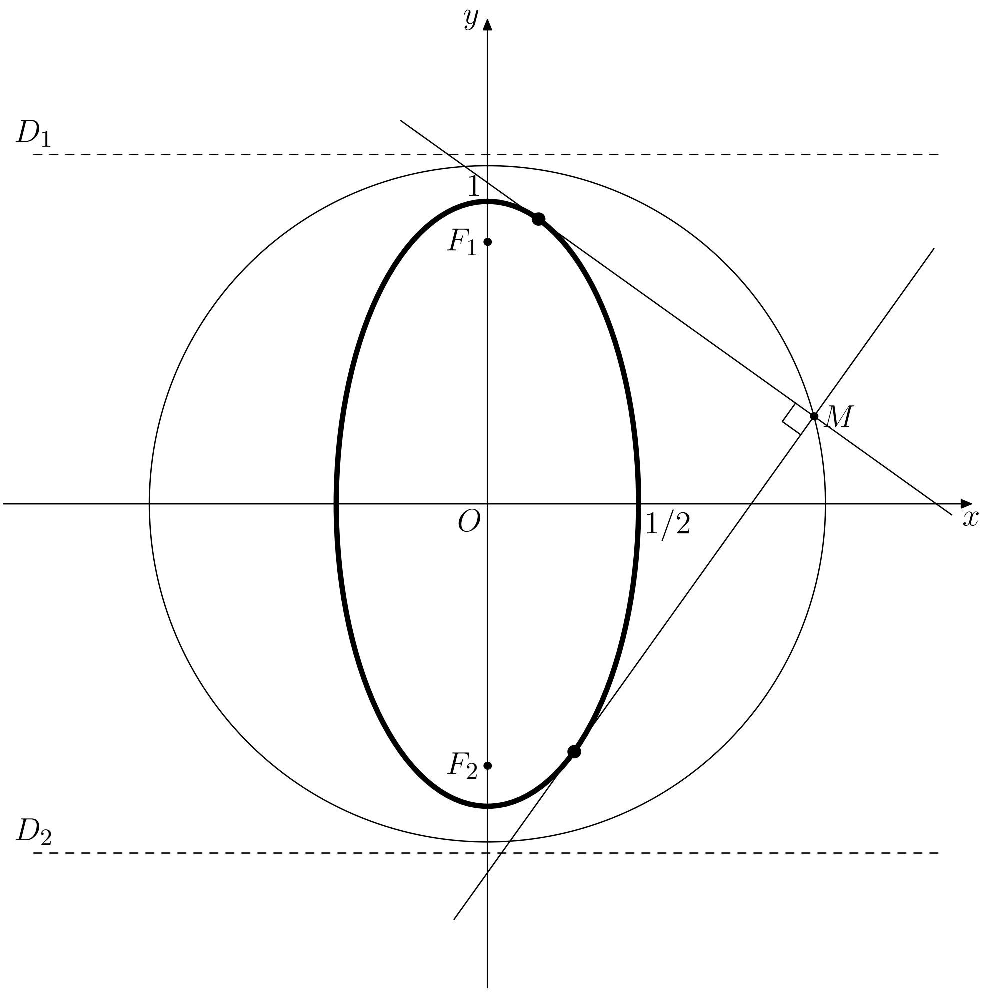

Figure 2 le cercle orthoptique de l'ellipse $\mathcal{E}$

Partie III

Question III.1

III.1.a Le paramètre t vérifie $y = tx$: t est donc la pente de la droite (OM) où M est le point de Γ de paramètre t.

III.1.b On vérifie que $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe (Ox) qui est donc axe de symétrie de Γ, permettant de réduire l'étude à $t \in [0, +\infty[$.

III.1.c On écrit d'abord $x'(t) = -\dfrac{4t}{(1+t^2)^2} \leqslant 0$.

Puis $y'(t) = \dfrac{1 - 4t^2 - t^4}{(1+t^2)^2}$, or

$$1 - 4t^2 - t^4 = -(t^2 + 2 + \sqrt{5})(t^2 + 2 - \sqrt{5}) = -(t^2 + 2 + \sqrt{5})(t - \sqrt{\sqrt{5} - 2})(t + \sqrt{\sqrt{5} - 2}),$$

qui a le signe de $t_0 - t$, où $t_0 = \sqrt{\sqrt{5} - 2}$. On notera que y s'annule pour $t = 0$ et pour $t = 1 > t_0$.

t	0		t_0		$+\infty$
x'	0	$-$		$-$	
y'	0	$+$	0	$-$	
x	1	$\searrow$	$x(t_0)$	$\searrow$	-1
y	0	$\nearrow$	$y(t_0)$	$\searrow$	$-\infty$

Tableau 1 le tableau de variations

III.1.d Γ a une seule asymptote : la droite verticale d'équation $x = -1$.

III.1.e La tangente est horizontale aux points de paramètres 0 et $\pm t_0$.
Elle est verticale pour $t = 0$, au point $(1, 0)$.
On trouve $x(t_0) = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1} = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$ et $y(t_0) = t_0 x(t_0) = \sqrt{\sqrt{5} - 2}\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$.
Si on avait une calculatrice, on trouverait $x(t_0) \approx 0{,}618$ et $y(t_0) \approx 0{,}300$.

III.1.f x étant strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, il n'y a pas de point double quand t décrit $[0, +\infty[$.
Le point double demandé est donc sur l'axe de symétrie : c'est l'origine, atteinte pour $t = \pm 1$.

III.1.g On a $(x'(1), y'(1)) = (-1, -1)$ et $(x'(-1), y'(-1)) = (1, -1)$: les deux tangentes coïncident avec les deux bissectrices des axes, elles sont perpendiculaires.

III.1.h On a fait tourner la figure suivante de 90 degrés, afin de la faire tenir proprement dans cette feuille.

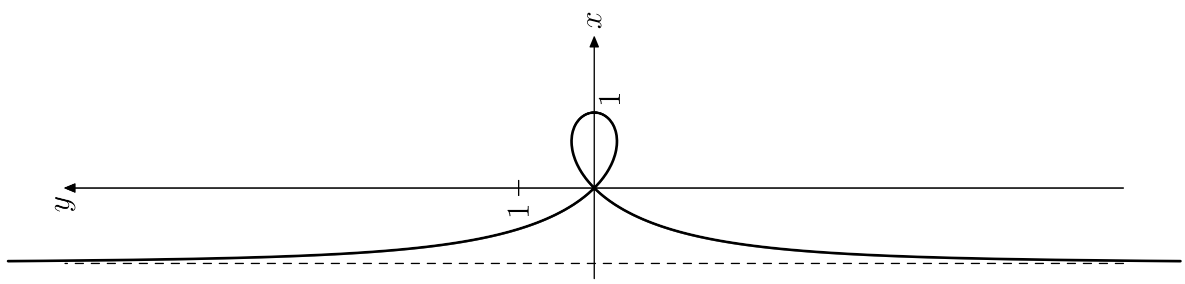

Figure 3 la courbe Γ

Question III.2

Si $x \neq 0$, on peut éliminer t en écrivant $t = \dfrac{y}{x}$, obtenant l'équation $x = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ et donc finalement $(e) : x(x^2 + y^2) = x^2 - y^2$. Comme pour $x = 0$, (e) redonne le seul point $(0, 0)$ qui est sur Γ, on a montré que tout point de Γ vérifie l'équation (e).
Soit réciproquement, un point M dont les coordonnées (x, y) vérifient l'équation (e) : si $x = 0$, on retrouve $y = 0$ et $M \in \Gamma$; sinon, posant $t = y/x$, (e) fournit $x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$ et $y = tx$, de sorte que $M \in \Gamma$.
Finalement (e) est bien une équation cartésienne de Γ.

Question III.3
Passant en coordonnées polaires, on écrit $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$, et l'équation (e) devient $\rho^3\cos\theta = \rho^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$. On en déduit qu'une équation polaire de Γ est $\rho = \dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$.
En effet, on n'a pas perdu l'origine ($\rho = 0$) qu'on retrouve pour $\theta = \pm\dfrac{\pi}{4}$.

Question III.4
On utilise la formule habituelle en coordonnées polaires pour calculer l'aire $\mathcal{A}$ demandée :

$$\mathcal{A} = 2\int_0^{\pi/4} \frac{\rho^2}{2}\,d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos^2 2\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

qu'on transforme en posant $t = \tan\theta$ donc $dt = \dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$. Comme $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \dfrac{2}{1+t^2} - 1$, on écrit

$$\mathcal{A} = \int_0^1 \left(\frac{4}{(1+t^2)^2} - \frac{4}{1+t^2} + 1\right) dt = \left[\frac{2t}{1+t^2} - 2\arctan t + t\right]_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

Question III.5
Dans cette question, on suppose que $v \neq 0$, sans quoi l'équation n'est pas de degré 3 et on ne pourrait parler des trois racines t_1, t_2 et t_3.

III.5.a Il suffit de remplacer, dans l'équation de Δ, x et y par les expressions $x(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $y(t) = \dfrac{t-t^3}{1+t^2}$ pour obtenir le résultat de l'énoncé.

III.5.b En développant le membre de droite, on s'aperçoit que le coefficient de t vaut $v(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1)$, et en identifiant avec le membre de gauche (puisque l'égalité de deux polynômes sur $\mathbb{R}$ entraîne l'égalité de leurs coefficients), on trouve $t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = -1$.

III.5.c Si trois points de Γ, de paramètres t_1, t_2 et t_3 sont alignés, la droite Δ qui les porte a une équation de la forme $ux + vy + wz = 0$, (avec $v \neq 0$ car une droite verticale ne coupe Γ qu'en 0, 1 ou 2 points, jamais 3) et d'après l'étude précédente on en déduit que $t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = -1$.

Réciproquement, si on suppose que $t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = -1$, l'un au moins de ces trois paramètres n'est pas nul, par exemple $t_3 \neq 0$.
Si on avait $t_1 = -t_2$, on aurait $t_1^2 = 1$ dont $t_1 = 1$ et $t_2 = -1$ (ou le contraire), ce qui correspond à l'origine $M(1) = M(-1) = O$, et non pas à deux points distincts. On peut donc exclure le cas où $t_1 = -t_2$.
Soit alors $\Delta : ux + vy + w = 0$ la droite qui passe par les points de paramètres t_1 et t_2, cette droite n'est pas verticale car $t_1 \neq -t_2$.
Le calcul précédent montre que le polynôme $P(t) = vt^3 + (u-w)t^2 - vt - (u+w)$ admet t_1 et t_2 pour racines, donc se factorise en $P(t) = v(t-t_1)(t-t_2)(t-\tau)$, et on aura de même $t_1t_2 + t_2\tau + \tau t_1 = -1$.
Mais $t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = -1$ donc $(t_1+t_2)(t_3-\tau) = 0$ et $\tau = t_3$ car $t_1 \neq t_2$. On a bien montré que les trois points de paramètres t_1, t_2 et $\tau = t_3$ se trouvent alignés sur la droite Δ.

Question III.6

III.6.a Le point A est de paramètre $t_3 = 0$.

III.6.b D'après la question III.5, on aura donc $t_1t_2 = -1$.

III.6.c D'après la question III.1.a, cela traduit l'orthogonalité des droites (OM_1) et (OM_2).

III.6.d Comme $(OM_1) \perp (OM_2)$, on en déduit que O est sur le cercle de diamètre $[M_1M_2]$.
Ce cercle est donc tangent en O à l'axe (Ox) si et seulement si son centre, le milieu de $[M_1M_2]$, est sur l'axe des y, c'est-à-dire si et seulement si $x(t_1) = -x(t_2)$, ce qui équivaut à la relation $t_1^2t_2^2 = 1$, qui est satisfaite d'après III.6.b.

Question III.7

III.7.a On a vu précédemment que dire que les points de paramètres t_0, t_1 et t_2 sont alignés se traduit par la relation $t_0t_1 + t_1t_2 + t_2t_0 = -1$.
La droite d'alignement est la tangente au point de paramètre τ si le contact est d'ordre 2 en $t = \tau$, c'est-à-dire si $t_1 = t_2 = \tau$. On obtient donc que les paramètres t' et t'' cherchés doivent être les solutions de l'équation $2t_0\tau + \tau^2 = -1$, d'inconnue τ.
Cette équation se réécrit $(\tau + t_0)^2 = t_0^2 - 1$, donc ces points M' et M'' existent seulement pour $t_0 > 1$ ou $t_0 < -1$, c'est-à-dire S à gauche de l'axe (Oy).

Pour $t_0 = \pm 1$, $S = A$, et il n'y a pas de tangente à Γ issue de A (autre que la tangente en A elle-même, bien sûr).

III.7.b Les paramètres t' et t'' des points M' et M'' sont les solutions de l'équation en τ : $\tau^2 + 2t_0\tau + 1 = 0$. On a donc $t' + t'' = -2t_0$ et $t't'' = 1$.

Alors, le paramètre ξ du troisième point P d'intersection de Γ avec $(M'M'')$ vérifie

$$\xi t' + \xi t'' + t't'' = -1 \iff \xi(t' + t'') + t't'' + 1 = 0 \iff -2t_0\xi + 2 = 0 \iff \xi = \frac{1}{t_0}.$$

III.7.c Comme $t't'' = 1$, $t'' = 1/t'$ donc $x(t'') = \dfrac{t'^2 - 1}{t'^2 + 1} = -x(t')$ puis $y(t'') = t''x(t'') = -\dfrac{1}{t'}x(t')$. Ainsi, la pente de la droite $(M'M'')$ vaut-elle $\dfrac{y(t') - y(t'')}{x(t') - x(t'')} = \dfrac{t' + \frac{1}{t'}}{2} = \dfrac{t' + t''}{2} = -t_0$.

$(M'M'')$ a pour pente $-t_0$; (OP) a pour pente $\xi = \dfrac{1}{t_0}$: cela confirme que ces deux droites sont bien perpendiculaires.

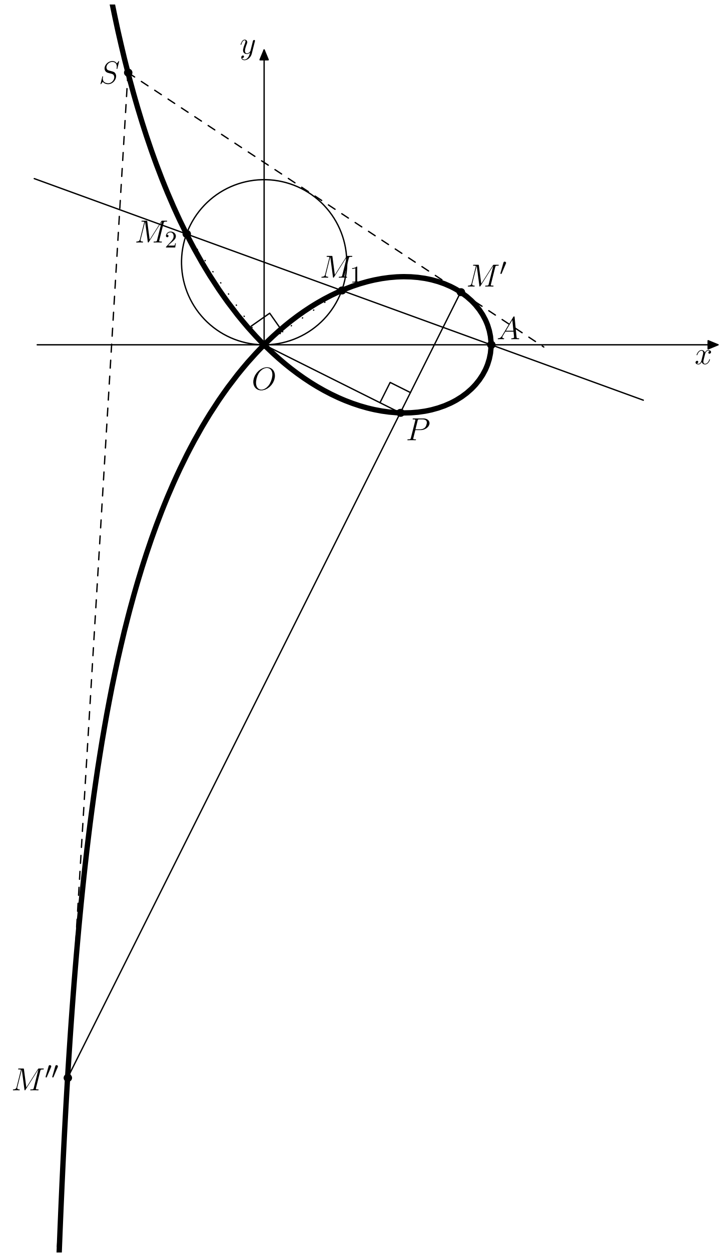

Figure 4 quelques constructions