Banque PT 2009 — épreuve B

Partie I

Question I.1
Notons (x', y') les nouvelles coordonnées. On a $x = x' - 3$ e t$y = y' - 2$ de sorte que l'équation de (C) devient

$$(y'-2)^2 - \sqrt{3}(x'-3)(y'-2) - 2\sqrt{3}(x'-3) + (4-3\sqrt{3})(y'-2) + 6 - 6\sqrt{3} = 0 \iff y'^2 - \sqrt{3}x'y' + 2 = 0.$$

Autrement dit, O' est le centre de la conique (C).

Question I.2
A est bien sûr la matrice de la forme quadratique associée à la conique.
I.2.a On trouve $\chi_A(X) = X^2 - X - \dfrac{3}{4}$ et les valeurs propres de A sont donc $\dfrac{3}{2}$ et $-\dfrac{1}{2}$. On peut choisir comme base orthonormée directe de diagonalisation la base $(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u}(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ et $\vec{v}(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2})$, c'est-à-dire la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ qu'on a fait tourner de $-\dfrac{\pi}{3}$. L'isométrie qui transforme le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ en $(O'; \vec{u}, \vec{v})$ est la composée de cette rotation de centre O et de la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$.
Dans le nouveau repère $(O'; \vec{u}, \vec{v})$, en notant (X, Y) les coordonnées, l'équation de (C) se transforme en

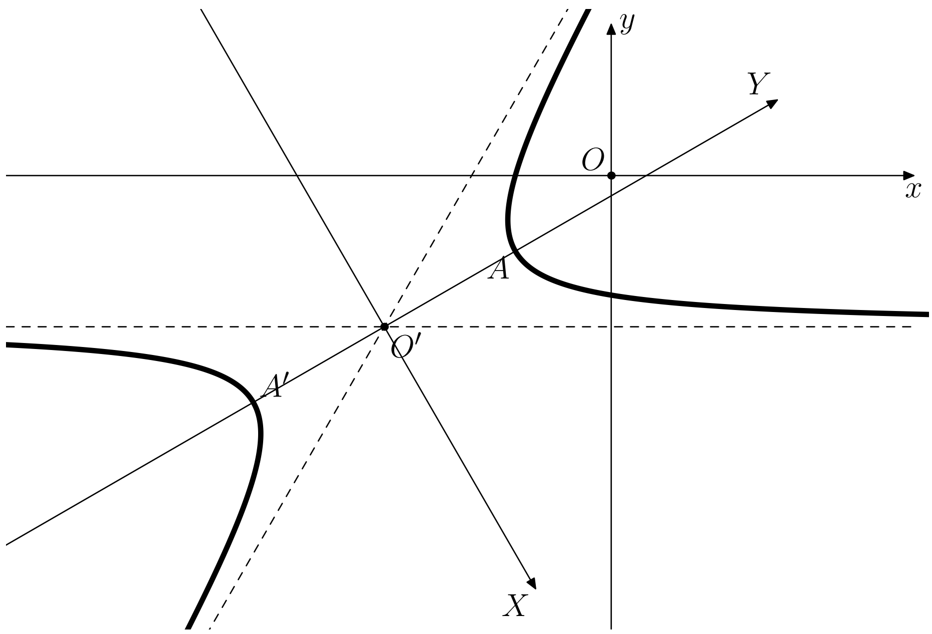
$$\frac{1}{2}(3X^2 - Y^2) + 2 = 0 \iff \frac{Y^2}{4} - \frac{X^2}{4/3} = 1.$$

Le changement de coordonnées s'écrit $\begin{cases} x = \dfrac{X + Y\sqrt{3}}{2} - 3 \\ y = \dfrac{-X\sqrt{3} + Y}{2} - 2 \end{cases}$
(C) est donc une hyperbole équilatère d'axe focal $(O', \vec{v})$.

Question I.3
Les sommets A et A' ont pour coordonnées $X = 0$ et $Y = \pm 2$ ou encore, dans le repère de départ, $A(-3+\sqrt{3}, -1)$ et $A'(-3-\sqrt{3}, -3)$.

Question I.4
Les asymptotes ont pour équation dans le repère final $Y = \pm\sqrt{3}X$ ou encore, dans le repère initial, $y = -2$ et $y = \sqrt{3}x - 2 + 3\sqrt{3}$.

Question I.5



Partie II

Question II.1
$\rho(\theta)$ est définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et tous les $[k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$ pour k entier.

Question II.2
Les points $M(\theta)$ et $M(\theta + \pi)$ sont symétriques l'un de l'autre par rapport à l'origine. En outre $M(\theta)$ et $M(\frac{\pi}{2} - \theta)$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice des axes. On restreint l'étude à $[0, \frac{\pi}{4}]$.

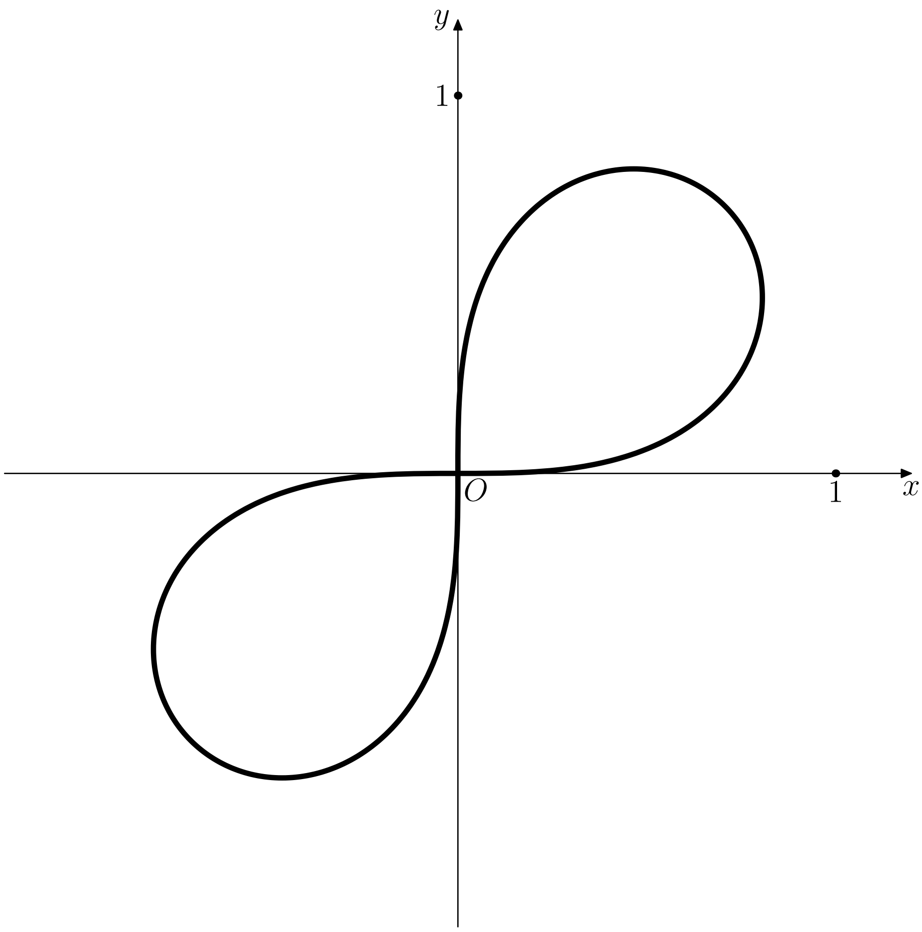
Question II.3
Sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ la fonction ρ croît de 0 à 1.

Question II.4
La courbe coupe $(x'x)$ uniquement au point O puisque $\rho(0) = \rho(\pi) = 0$. La tangente à la courbe est alors dirigée par le vecteur unitaire d'angle polaire θ : elle est bien horizontale.

Question II.5
Pour $\theta \in]0, \frac{\pi}{4}]$, la tangente est dirigée par le vecteur $\vec{M}'(\theta) = \rho'(\theta)\vec{u} + \rho(\theta)\vec{v}$, où $(\vec{u}, \vec{v})$ est la base tournante habituelle.
On trouve que $\vec{M}' = \dfrac{\cos 2\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}\vec{u} + \sqrt{\sin 2\theta}\vec{v}$, colinéaire à $\vec{T} = \cos 2\theta\vec{u} + \sin 2\theta\vec{v}$, donc $\widehat{\vec{u}, \vec{T}} = 2\theta$ et $\widehat{\vec{\imath}, \vec{T}} = 3\theta$.
Ainsi $\vec{T}(\cos 3\theta, \sin 3\theta)$ dans le repère initial.
La tangente a donc pour équation $\sin 3\theta(x - \sqrt{\sin 2\theta}\cos\theta) = \cos 3\theta(y - \sqrt{\sin 2\theta}\sin\theta)$ ou encore

$$x \sin 3\theta - y \cos 3\theta = (\sin 2\theta)^{3/2}.$$

Question II.6



Partie III

Question III.1
Si $M = \Omega$, il n'y a aucun point M' répondant à la question, puisque $R > 0$.
Si $M \neq \Omega$, l'alignement impose de chercher M' sous la forme $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ et on trouve alors une seule solution $k = \dfrac{R^2}{\|\Omega M\|^2}$ ou encore $M' = \Omega + \dfrac{R^2}{\|\Omega M\|^2}\overrightarrow{\Omega M}$.

Question III.2
Par définition de ϕ, il s'agit d'une involution : $M' = \phi(M) \iff M = \phi(M')$. Autrement dit : $\phi^{-1} = \phi$.

Question III.3
L'image du cercle de centre Ω et de rayon R est égale à ce cercle lui-même, puisqu'il est défini par $\overrightarrow{\Omega M}^2 = R^2$.

Question III.4
L'image du cercle de centre Ω et de rayon $0 < r \neq R$ est le cercle de centre O et de rayon R^2/r.

Question III.5
Soit D une droite passant par Ω, il faut retirer le point Ω qui n'a pas d'image par ϕ et étudier l'image de $D' = D \setminus \{\Omega\}$. Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire dirigeant D.

Un point $M \in D'$ vérifie $\Omega M = k\vec{u}$, où $k \neq 0$. Son image est alors le point M' défini par $\Omega M' = \dfrac{R^2}{k}\vec{u}$.
Or, quand k décrit $\mathbb{R}^*$, $\dfrac{R^2}{k}$ décrit également $\mathbb{R}^*$. Cela signifie que $\phi(D') = D'$.

Question III.6
On a déjà dit que $\lambda = \dfrac{R^2}{\|\Omega M\|^2}$.
Alors, en complexes : $z' - z_\Omega = \lambda(z - z_\Omega)$ donc

$$z' = z_\Omega + \frac{R^2}{|z - z_\Omega|^2}(z - z_\omega) = z_\Omega + \frac{R^2}{(z - z_\Omega)\overline{(z - z_\Omega)}}(z - z_\Omega) = z_\Omega + \frac{R^2}{\overline{\overline{z - z_\Omega}}}.$$

Question III.7
Ici on a donc $z' = 1 + \dfrac{1}{\bar{z} - 1}$.
$z = \dfrac{1}{2}(1 + e^{i\theta}) = \dfrac{e^{i\theta/2}}{2}(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}) = \cos\dfrac{\theta}{2}e^{i\theta/2}$ est de module $\cos\dfrac{\theta}{2}$ et d'argument $\dfrac{\theta}{2}$ si on choisit $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$, ce qui est toujours possible.

$M(\theta) \neq \Omega \iff e^{i\theta} \neq 1 \iff \theta \neq 0$ (modulo 2π).

Quand $z = \dfrac{1}{2}(1 + e^{i\theta}) \neq 1$ on obtient donc

$$z' = 1 + \frac{2}{e^{-i\theta} - 1} = \frac{e^{-i\theta} + 1}{e^{-i\theta} - 1} = -\frac{e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}}{e^{i\theta/2} - e^{i\theta/2}} = i\text{cotan}\frac{\theta}{2},$$

il s'agit bien sûr d'un imaginaire pur.

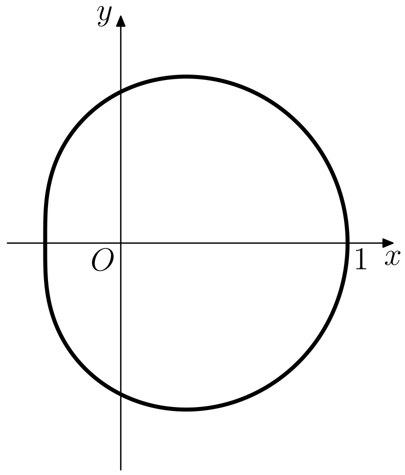
Quand θ décrit $[-\pi, 0[\cup]0, \pi]$, $M(\theta)$ décrit exactement le cercle de diamètre $[O\Omega]$ privé de Ω. Le point $M'(\theta) = \phi(M(\theta))$ décrit alors, d'après ce qu'on vient de voir, l'axe des ordonnées.

Comme ϕ est involutive, l'image de l'axe des ordonnées est égale au cercle de diamètre $[O\Omega]$ privé de Ω.

Question III.8
Avec les notations traditionnelles, l'équation réduite de l'ellipse s'écrit $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ donc $a = 2$ et $b = \sqrt{3}$.
Alors $c = \sqrt{4 - 3} = 1$ et les foyers sont $F(1, 0)$ et $F'(-1, 0)$. L'excentricité vaut $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{2}$.

La représentation polaire dans un repère centré au foyer est une question de cours !

Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est la base tournante habituelle, le point générique de l'ellipse est $M(\theta) = F + \rho(\theta)\vec{u}$, donc $M'(\theta) = \phi(M(\theta)) = F + \dfrac{R^2}{\rho(\theta)}\vec{u}$. Autrement dit, l'image de l'ellipse est la courbe d'équation polaire $\rho = \dfrac{2+\cos\theta}{3}$.
Le tracé n'en est pas demandé, on le trouvera néanmoins ci-dessous.



Question III.9
Pour $\theta \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, le point de (H) d'angle polaire θ a pour coordonnées $(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ et vérifie $xy = \rho^2\cos\theta\sin\theta = 1$ donc $\rho^2 = \dfrac{2}{\sin 2\theta}$ et $\rho = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2\theta}}$, ce qui est une équation polaire de (H).
Alors le même raisonnement qu'en III.8 montre que la courbe $\phi(H)$ est d'équation polaire

$$\rho = \frac{R^2}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2\theta}}} = \frac{\sqrt{\sin 2\theta}}{\sqrt{2}}.$$

On reconnaît la courbe étudiée au II, privée de l'origine, et transformée par l'homothétie de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Partie IV

Question IV.1
Le point courant P de la droite (SM) est de coordonnées $x = x_0 + t(x_M - x_0)$, $y = ty_M$ et $z = z_0 + t(z_M - z_0)$.

Question IV.2
Notons (X, Y, Z) les coordonnées de M dans le repère d'origine S : $X = x_M - x_0$, $Y = y_M$ et $Z = z_M - z_0$.
Alors P est de coordonnées (tX, tY, tZ).
L'intersection de la droite (SM) avec le plan $z = 0$ ou $Z = -z_0$ doit être sur l'ellipse. Or il s'agit du point P de paramètre $t = -\dfrac{z_0}{z_M - z_0} = -\dfrac{z_0}{Z}$ donc de coordonnées $\left(\dfrac{x_0 Z - X z_0}{Z}, -\dfrac{Y z_0}{Z}, 0\right)$. M est sur le cône si et seulement si P est sur l'ellipse. On obtient ainsi une équation du cône :
$\dfrac{(\frac{x_0 Z - X z_0}{Z})^2}{4} + (\dfrac{Y z_0}{Z})^2 = 1$ ou encore, en simplifiant, $\dfrac{(x_0 Z - z_0 X)^2}{4} + z_0^2 Y^2 - Z^2 = 0$.

Question IV.3
En développant l'équation du cône trouvée précédemment, on vérifie que A est la matrice de la forme quadratique associée.

IV.3.a Son polynôme caractéristique est $\chi_A = (z_0^2 - X)\left(X^2 - \dfrac{x_0^2 + z_0^2 - 4}{4}X - \dfrac{z_0^2}{4}\right)$.

IV.3.b A est symétrique donc diagonalise dans une base orthonormée.

IV.3.c Le discriminant de P vaut $\Delta = 4z_0^2 + \dfrac{(x_0^2 + z_0^2 - 4)^2}{16} \geqslant 4z_0^2 > 0$ car on a supposé $z_0 \neq 0$.

IV.3.d $\chi_A(X) = (z_0^2 - X)P(X)$. Comme P n'a pas de racine double, pour que χ_A admette une racine double, il est nécessaire que ce soit z_0^2, et donc que z_0^2 soit racine de P.

Question IV.4

Comme $P(z_0^2) = \dfrac{z_0^2}{4}(3 - x_0^2 + 3z_0^2)$, et qu'on a supposé $z_0 \neq 0$, le cône est de révolution si et seulement si $x_0^2 - 3z_0^2 = 3$, c'est-à-dire si et seulement si S se trouve sur l'hyperbole du plan (xOz) d'équation $\dfrac{x^2}{3} - z^2 = 1$.