Banque PT 1999 : Mathématiques II-A

Exercice 1

1 Équation de la surface S, ensemble des points E équidistants de D et D'

Désignons par (X, Y, Z) les coordonnées de E.
Soient A et B les points de (respectivement) D et D' d'abscisse x.
Désignons par :
$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, un vecteur directeur de $D \left\{ \begin{array}{rcr} y & = & x \\ z & = & -a \end{array} \right.$
et par :
$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, un vecteur directeur de $D' \left\{ \begin{array}{rcr} y & = & -x \\ z & = & a \end{array} \right.$
Tous les points E vérifient :

$$||\vec{u} \wedge \overrightarrow{AE}|| = ||\vec{v} \wedge \overrightarrow{BE}||$$

$$\vec{u} \wedge \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X - x \\ Y - x \\ Z + a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z + a \\ -Z - a \\ Y - X \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} \wedge \overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X - x \\ Y + x \\ Z - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - Z \\ a - Z \\ Y + X \end{pmatrix}$$

Donc une équation de S est :

$$2(Z + a)^2 + (Y - X)^2 = 2(a - Z)^2 + (Y + X)^2$$

soit :

$$XY = 2aZ$$

ou :

$$xy = 2az$$

pour garder des notations avec des minuscules, en accord avec la question 2.
On peut remarquer aussi, et c'est probablement plus élégant, que si P_1 est le plan d'équation $x - y = 0$, et P_2 le plan d'équation $z + a = 0$, ces plans sont perpendiculaires, donc par application du théorème de Pythagore, $d(M, D)^2 = d(M, P_1)^2 + d(M, P_2)^2$.

$$\left.\begin{array}{r} d(M,P_1) = \frac{|x-y|}{\sqrt{2}} \\ d(M,P_2) = |z+a| \end{array}\right\} \Longrightarrow d(M,D)^2 = \frac{(x-y)^2}{2} + (z+a)^2.$$

On montre de même que $d(M,D')^2 = \dfrac{(x+y)^2}{2} + (z-a)^2$.

$M(x,y,z) \in S \Longleftrightarrow d(M,D) = d(M,D') \Longleftrightarrow \dfrac{(x-y)^2}{2} + (z+a)^2 = \dfrac{(x+y)^2}{2} + (z-a)^2 \Longleftrightarrow x\,y = 2\,a\,z$.

On retrouve bien sûr la même chose.

Bien entendu, pour connaître la nature de S, on peut diagonaliser sa forme quadratique, mais on peut remarquer aussi que :

$$2az = \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2$$

Les valeurs propres de la forme quadratique sont $1/2$, $-1/2$ et 0 et donc S est un *paraboloïde hyperbolique*, ce que nous allons redécouvrir dans la question suivante.

2 Intersection de la surface S avec le plan d'équation $z = h$

Là encore, en posant :

$$X = \frac{x+y}{\sqrt{2}} \quad Y = \frac{x-y}{\sqrt{2}} \quad Z = z$$

ce qui est un changement de repère orthonormé, l'équation de S devient :

$$X^2 - Y^2 = 4aZ$$

et on recherche la nature des courbes :

$$X^2 - Y^2 = 4ah$$

suivant les valeurs de h.

Si $h > 0$, on obtient une *hyperbole* dont les foyers sont sur la “première bissectrice” du repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, d'asymptotes Ox et Oy.

Si $h > 0$, on obtient une *hyperbole* dont les foyers sont sur la “deuxième bissectrice” du repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, d'asymptotes Ox et Oy.

Si $h = 0$, on obtient l'union des droites $x = 0$ et $y = 0$.

Remarquons (non demandé) que si on coupe S par un plan $X = h$ ou $Y = h$ on obtient l'ensemble vide ou une *parabole* (c'est de là que vient le nom *paraboloïde hyperbolique*).

3 Étude des courbes C_θ

a) Représentation paramétrique de C_θ

C_θ est l'ensemble des points (x,y,z) tels que : $\left\{\begin{array}{rcl} xy &=& 2az \\ x\sin\theta &=& y\sin\theta \end{array}\right.$

Si $\theta = \pi/2$, on obtient la droite $\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right.$

Sinon ($\theta \neq \pi/2$), si on définit t par $x = t\cos\theta$, on en déduit $y = t\sin\theta$ et :

$$z = t^2 \frac{\sin\theta\cos\theta}{2a}.$$

On remarque alors que même si $\theta = \pi/2$, la représentation paramétrique précédente est valable.

b) Nature de C_θ

Comme on l'a vu précédemment, si $\theta = \pi/2$, on obtient la droite $\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right.$

Si $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, on obtient la droite $\left\{ \begin{array}{lcl} y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right.$

Sinon on a une parabole, dont la projection sur le plan xOz est $z = \frac{\tan\theta}{2a}x^2$.

4 Trièdre de Frenet de C_θ

Orientons C_θ selon le sens des t croissants. Alors :

$$s'(t) = \sqrt{1 + (\frac{t}{a}\cos\theta\sin\theta)^2} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 + (t\cos\theta\sin\theta)^2}$$

et donc :

$$\overrightarrow{T} = \frac{\overrightarrow{dM}}{ds} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + (t\cos\theta\sin\theta)^2}} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ \frac{t}{a}\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix}$$

Mais la question ne concerne que le point O, et on prend donc $t = 0$, et donc :

$$\overrightarrow{T}(0) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculons $\frac{\overrightarrow{dT}}{dt}$. Sa première composante est :

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{a\cos\theta}{\sqrt{a^2 + (t\cos\theta\sin\theta)^2}}\Big) = -\frac{at\cos^3\theta\sin^2\theta}{\Big(a^2 + (t\cos\theta\sin\theta)^2\Big)^{3/2}}$$

Sa deuxième composante est :

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{a\sin\theta}{\sqrt{a^2 + (t\cos\theta\sin\theta)^2}}\Big) = -\frac{at\cos^2\theta\sin^3\theta}{\Big(a^2 + (t\cos\theta\sin\theta)^2\Big)^{3/2}}$$

Sa troisième composante est :

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{t\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{a^2 + (t\cos\theta\sin\theta)^2}}\Big) = \frac{\cos\theta\sin\theta}{\Big(a^2 + (t\cos\theta\sin\theta)^2\Big)^{1/2}} - \frac{t\cos\theta\sin\theta(2t)(\cos\theta\sin\theta)^2}{\Big(a^2 + (t\cos\theta\sin\theta)^2\Big)^{3/2}}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{t\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{a^2+(t\cos\theta\sin\theta)^2}}\Big)=\frac{a^2\cos\theta\sin\theta}{\Big(a^2+(t\cos\theta\sin\theta)^2\Big)^{3/2}}$$

Et donc :

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}=\frac{a^2\cos\theta\sin\theta}{\Big(a^2+(t\cos\theta\sin\theta)^2\Big)^2}\begin{pmatrix}-t\cos^2\theta\sin\theta\\-t\cos\theta\sin^2\theta\\a\end{pmatrix}$$

En O, nous trouvons donc :

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{\cos\theta\sin\theta}{a}\end{pmatrix}$$

Nous pouvons alors calculer le rayon de courbure R en O :

$$\frac{1}{R}=\frac{|\cos\theta\sin\theta|}{a}$$

R n'est pas défini si θ vaut 0, $\pi/2$ ou π.

Nous en déduisons $\overrightarrow{N}=R\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds}$, pour $0<\theta<\pi/2$:

$$\overrightarrow{N}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

et $\overrightarrow{B}=\overrightarrow{T}\wedge\overrightarrow{N}$. Donc, pour $0<\theta<\pi/2$:

$$\overrightarrow{B}=\sin\theta\vec{i}-\cos\theta\vec{j}$$

Pour $\pi/2<\theta<\pi$, les $\overrightarrow{N}$ et $\overrightarrow{B}$ trouvés sont les opposés des précédents.

5 Étude du centre de courbure de C_θ au point O

a) Centre de courbure I_θ de C_θ au point O

On a vu que R n'existait pas si θ valait 0, $\pi/2$ ou π.
Sinon,

$$\overrightarrow{OI_\theta}=\overrightarrow{OM}+R\overrightarrow{N}=\overrightarrow{OM}+R^2\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}$$

Donc

$$\overrightarrow{OI_\theta}=\frac{a}{\cos\theta\sin\theta}\vec{k}$$

b) Étude de $\dfrac{1}{\zeta(\theta)}+\dfrac{1}{\zeta(\theta+\frac{\pi}{2})}$

La troisième composante de $\overrightarrow{OI_\theta}$ est :

$$\frac{a}{\cos\theta\sin\theta}$$

Donc pour tout θ, $0\le\theta\le\pi$,

$$\frac{1}{\zeta(\theta)}+\frac{1}{\zeta(\theta+\frac{\pi}{2})}=0$$

Exercice 2

1 Séries entières solutions de l'équation différentielle (E_2)

On cherche une série entière :

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

de rayon de convergence R non nul, solution de (E_2). Les fonctions suivantes ont même rayon de convergence et ont pour développement en série entière :

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + (n+1)a_{n+1}x^n + \cdots$$

$$y''(x) = 2.1a_2 + 3.2a_3 x + 4.3a_4 x^2 + \cdots + (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \cdots$$

Grâce aux théorèmes d'addition et multiplication des séries entières, on remplace les termes précédents dans l'équation différentielle (E_2).
Terme en x^0 : $2a_0 + 2a_2 = 0$.
Terme en x^1 : $2a_1 - 2a_1 + 3.2a_3 = 0$.
Terme en x^2 : $2a_2 - 2.2a_2 + 4.3a_4 - 2.1a_2 = 0$.
Terme en x^3 : $2a_3 - 2.2a_3 + 5.4a_5 - 3.2a_3 = 0$.
...
Terme en x^{n-2} : $2a_{n-2} - 2(n-2)a_{n-2} + n(n-1)a_n - (n-2)(n-3)a_{n-2} = 0$.
On peut aussi écrire les égalités précédentes sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_0 & = & -a_2 \\ a_3 & = & 0 \\ 4.3a_4 & = & 2.2a_2 \\ a_5 & = & 0 \\ & \cdots & \\ (n-1)a_n & = & (n-3)a_{n-2} \end{array}\right.$$

On voit que tous les termes impairs sont nuls sauf a_1 qui est indéterminé.
Pour calculer les termes pairs, on réécrit certaines des égalités précédentes et on multiplie termes à termes :

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_2 & = & -a_0 \\ 3a_4 & = & 1a_2 \\ 5a_6 & = & 3a_2 \\ 7a_8 & = & 5a_6 \\ & \cdots & \\ (2p-1)a_{2p} & = & (2p-3)a_{2p-2} \end{array}\right.$$

On obtient, pour $p \geq 1$:

$$a_{2p} = -\frac{a_0}{2p-1}$$

Et donc :

$$y(x) = a_0 + a_1 x - a_0 \sum_{p \geq 1} \frac{x^{2p}}{2p-1}$$

$$y(x) = a_0 + a_1 x - a_0 x \sum_{p\geq 1} \frac{x^{2p-1}}{2p-1}$$
$$y(x) = a_0 + a_1 x - a_0 x \sum_{p\geq 0} \frac{x^{2p+1}}{2p+1}$$

Comme :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2p-1}}{2p-1} - \frac{x^{2p}}{2p} + \cdots$$

et :

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2p-1}}{2p-1} + \frac{x^{2p}}{2p} + \cdots$$

on voit que :

$$\frac{1}{2}[\ln(1-x) - \ln(1+x)] = -x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \cdots - \frac{x^{2p-1}}{2p-1} - \cdots$$

et donc :

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_0 \frac{x}{2} \ln(\frac{1-x}{1+x})$$
$$y(x) = a_0[1 + \frac{x}{2} \ln(\frac{1-x}{1+x})] + a_1 x$$

Comme les séries entières représentant $\ln(1+x)$ et $\ln(1-x)$ ont un rayon de convergence 1, le rayon de convergence de la série de la fonction :

$$1 + \frac{x}{2} \ln(\frac{1-x}{1+x})$$

est supérieur ou égal à 1. Comme la série diverge pour $x = 1$, le rayon de convergence de la série de cette fonction est 1. Bien entendu, le rayon de convergence de la série entière x est infini.
On a mis les solutions de (E_2) comme combinaison linéaire de deux fonctions linéairement indépendantes : on a un espace vectoriel de solutions de dimension 2. On a donc toutes les solutions de (E_2) sur $]-1, 1[$.

2 Étude de l'endomorphisme Φ

a) Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

$\Phi(P) = (1 - X^2)P''(X) - 3XP'(X)$. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et soit λ un réel.

$$\Phi(P + \lambda Q) = (1 - X^2)(P + \lambda Q)''(X) - 3X(P + \lambda Q)'(X)$$
$$\Phi(P + \lambda Q) = (1 - X^2)P''(X) - 3XP'(X) + \lambda((1 - X^2)Q''(X) - 3XQ'(X))$$
$$\Phi(P + \lambda Q) = \Phi(P) + \lambda\Phi(Q)$$

De plus si le degré de P est inférieur ou égal à n, celui de $\Phi(P)$ aussi.
Donc Φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$

La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $\{1, X, X^2, \dots, X^n\}$.
$\Phi(1) = 0$
$\Phi(X) = -3X$
$\Phi(X^2) = (1 - X^2).2.1 - 3.2.X^2 = 2 - 8X^2$
$\Phi(X^3) = (1 - X^2).3.2.X - 3.3.X^3 = 6X - 15X^3$
$\dots$
$\Phi(X^n) = (1 - X^2).n.(n-1).X^{n-2} - 3.n.X^3 = n(n-1)X^{n-2} - n(n+2)X^n$
Nous en déduisons la matrice M de Φ dans la base canonique :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2.1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3.1 & 0 & 3.2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4.2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5.3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -(n-3)(n-1) & 0 & (n-1)(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -(n-2)n & 0 & n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -(n-1)(n+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -n(n+2) \end{pmatrix}$$

c) Diagonalisation de Φ

La matrice M est triangulaire et le polynôme caractéristique est :

$$\det(M - \lambda I_n) = -\lambda(-\lambda - 3)(-\lambda - 8) \cdots (-\lambda - j(j+2)) \cdots (-\lambda - n(n+2))$$

où j est entier compris entre 0 et n (la dimension de M est $n+1$).
Donc Φ admet $n+1$ valeurs propres distinctes deux à deux : Φ est diagonalisable et chaque sous espace propre est de dimension 1.

Solutions polynomiales de l'équation différentielle ($\mathbf{E}_3$)

Cela revient à chercher le sous espace propre associé à la valeur propre -3 :

$$\Phi(P) = -3P$$

On est ramené à résoudre le système linéaire :

$$(M + 1.3 I_n) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

si le polynôme propre cherché est $P(X) = x_0 + x_1 X + \cdots + x_n X^n$.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} -3.1x_0 + 2.1x_2 & = & 0 \\ (-3.1 + 1.3)x_1 + 3.2x_3 & = & 0 \\ (-4.2 + 1.3)x_2 + 4.3x_4 & = & 0 \\ \cdots & & \\ (-(n-3)(n-1) + 1.3)x_{n-3} + (n-1)(n-2)x_{n-1} & = & 0 \\ (-(n-2)n + 1.3)x_{n-2} + n(n-1)x_n & = & 0 \\ (-(n-1)(n+1) + 1.3)x_{n-1} & = & 0 \\ (-n(n+2) + 1.3)x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

On voit que la seule solution est le polynôme X (et ses multiples par une constante).
Tout ce qui vient d'être dit est valable pour tout n entier. Donc les seules solutions polynomiales de l'équation différentielle (E_3) sont kX $(k \in \mathbb{R})$.

3 Utilisation d'une fonction auxiliaire φ

a) Calcul des dérivées y' et y'' en fonction de z et φ

$$y'(x) = \frac{d}{dx}(z(\varphi)(x)) = \frac{dz}{d\varphi}(\varphi)\varphi'(x)$$

$$y''(x) = \frac{d}{dx}(\frac{dz}{d\varphi}(\varphi)\varphi'(x)) = \frac{dz}{d\varphi}(\varphi)\varphi''(x) + \frac{d^2z}{d\varphi^2}(\varphi)\varphi'^2(x)$$

b) Valeurs de α pour lesquelles il existe un changement de variable convenable

Remplaçons y, y' et y'' dans (E_α) par les valeurs calculées ci-dessus :

$$(1-x^2)\Big(\varphi''(x)\frac{dz}{d\varphi} + \varphi'^2(x)\frac{d^2z}{d\varphi^2}\Big) - \alpha x\varphi'(x)\frac{dz}{d\varphi} + \alpha z = 0$$

$$(1-x^2)\varphi'^2(x)\frac{d^2z}{d\varphi^2} + \Big((1-x^2)\varphi''(x) - \alpha x\varphi'(x)\Big)\frac{dz}{d\varphi} + \alpha z = 0$$

On veut se ramener à une équation différentielle à coefficients constants, c'est-à-dire on veut qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$ tels que :

$$(1-x^2)\varphi'^2(x) = A$$

$$(1-x^2)\varphi''(x) - \alpha x\varphi'(x) = B$$

Dans $]-1,1[$, la première équation impose :

$$\varphi'(x) = \frac{\beta}{\sqrt{1-x^2}}$$

où $\beta = \sqrt{A}$ ou $\beta = -\sqrt{A}$.
Alors :

$$\varphi''(x) = \frac{\beta x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

Si nous remplaçons dans la deuxième équation, nous obtenons :

$$\frac{\beta x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\alpha x\beta}{\sqrt{1-x^2}} = B$$

La seule solution possible est $B = 0$ et donc $\alpha = 1$ et $A = 1$.
Donc si $\alpha = 1$, il existe un changement de variable $\varphi = \arcsin(x) + C$ $(C \in \mathbb{R})$, transformant (E_1) en une équation différentielle linéaire à coefficients constants.
Si $\alpha \neq 1$, il n'existe pas de tel changement de variable.

c) Résolution de $(\mathbf{E}_1)$

Alors (E_1) est équivalente à :

$$z''(\varphi) + z(\varphi) = 0$$

L'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$.
Les solutions sont donc :

$$z(\varphi) = C_1 \cos(\varphi) + C_2 \sin(\varphi)$$

avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.
Si on choisit φ de sorte que $\varphi'(0) = 1$,

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

et $\varphi(x) = \arcsin(x) + C$. On peut choisir $C = 0$. On obtient donc les solutions y(x) sous la forme :

$$y(x) = C_1 \cos(\arcsin(x)) + C_2 \sin(\arcsin(x))$$

avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.
On retrouve la fonction $x \mapsto x$ qui est solution quel que soit α et la fonction $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ qu'on aurait pu obtenir aussi comme somme de série entière.

Exercice 3

1 Enveloppe L de la famille de droites $(\Delta_t)_{t\in\mathbb{R}}$

La droite (Δ_t) est l'ensemble des points P tels que $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{OM}=0$:

$$\begin{pmatrix} x-\frac{1}{t(1+t^2)} \\ y-\frac{1}{1+t^2}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{1}{t(1+t^2)} \\ \frac{1}{1+t^2}\end{pmatrix}=0$$

soit :

$$t(1+t^2)x-1+t^2(1+t^2)y-t^2=0$$
$$tx+t^2y-1=0$$

L'enveloppe de la famille de droites $(\Delta_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est donc obtenue en résolvant le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} tx & + & t^2y & = & 1 \\ x & + & 2ty & = & 0\end{array}\right.$$

dont l'unique solution ($t\neq 0$) est :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & 2/t \\ y & = & -1/t^2\end{array}\right.$$

Finalement, l'enveloppe de la famille de droites $(\Delta_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est la parabole d'équation :

$$y=-\frac{x^2}{4}$$

moins l'origine $(0,0)$.

2 Étude de la courbe C_a

a) Comparaison de C_a et C_{-a}

$$x_a(t)=\frac{1}{(t+a)(1+t^2)}\quad\text{et}\quad x_{-a}(t)=\frac{1}{(t-a)(1+t^2)}$$

donc pour tout t dans son domaine de définition :

$$x_{-a}(-t)=-x_a(t)\quad\text{et}\quad y_{-a}(-t)=y_a(t)$$

Les courbes C_a et C_{-a} sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des y.

b) Branches infinies de C_a

Les seules branches infinies sont obtenues pour t tendant vers a.

$$\lim_{t\to a^-}x(t)=-\infty\quad\text{et}\quad\lim_{t\to a^-}y(t)=\frac{1}{1+a^2}$$

$$\lim_{t\to a^+}x(t)=+\infty\quad\text{et}\quad\lim_{t\to a^+}y(t)=\frac{1}{1+a^2}$$

c) Forme de la courbe au voisinage de l'origine

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0^- \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} y(t) = 0^+$$
$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{t\to-\infty} y(t) = 0^+$$

Posons $u = 1/t$.

$$x = \frac{1}{(t+a)(t^2+1)} = \frac{u^3}{(1+au)(1+u^2)}$$

Comme :

$$\frac{1}{1+au} = 1 - au + au^2 + u^2\varepsilon_1(u)$$
$$\frac{1}{1+u^2} = 1 - u^2 + u^2\varepsilon_2(u)$$
$$\frac{1}{(1+au)(1+u^2)} = 1 - au + (a^2-1)u^2 + u^2\varepsilon_3(u)$$

et donc :

$$x(1/u) = \frac{u^3}{(1+au)(1+u^2)} = u^3 - au^4 + (a^2-1)u^5 + u^5\varepsilon_4(u)$$

Évidemment :

$$y(1/u) = \frac{u^2}{1+u^2} = u^2 - u^4 + u^5\varepsilon_5(u)$$

Donc :

$$\overrightarrow{OM}(1/u) = u^2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + u^3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + u^3\begin{pmatrix}\varepsilon_6(u)\\\varepsilon_7(u)\end{pmatrix}$$

avec

$$\lim_{u\to 0}\varepsilon_i(u) = 0, \quad i = 1,\ldots,7$$

Donc la courbe admet un point de rebroussement de première espèce à l'origine. La tangente à la courbe (complétée par l'origine) à l'origine est portée par l'axe des y.
On peut remarquer aussi que $\overrightarrow{OM}$ est colinéaire à $(\frac{1}{t+a}, 1)$ qui tend vers $(0,1)$ lorsque t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, d'où la tangente en O, la nature du point (rebroussement de première espèce), s'obtenant par examen des signes de $x(t)$ et $y(t)$ au voisinage de 0.

d) Variations de x et y

$$x'(t) = \frac{-(3t^2+2at+1)}{((t+a)(t^2+1))^2}$$
$$y'(t) = \frac{-2t}{(t^2+1)^2}$$

Le signe de x' dépend du signe de $-(3t^2+2at+1)$. Le discriminant de $3t^2+2at+1$ est $\Delta = a^2-3$. Comme $0 < a < \sqrt{3}$, le discriminant est négatif pour tout t réel, donc $x'(t) < 0$ pour tout t réel (différent de $-a$).
$y'(t) < 0$ si $t > 0$ et y'(t)>0 si $t < 0$.

Tableau de variations

t	$-\infty$		$-a$		0		$+\infty$
$x'(t)$	0	$-$	$\Vert$	$-$		$-$	0
$x(t)$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$1/a$	$\searrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{(1+a^2)}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$y'(t)$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0

3 Étude de trois points $M(t_1)$, $M(t_2)$ et $M(t_3)$

a) Condition nécessaire et suffisante pour que les trois points soient alignés

M_1, M_2 et M_3 sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{M_1M_3}$ et $\overrightarrow{M_2M_3}$ forment un système libre c'est-à-dire si :

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix} = 0$$

Soustrayons la troisième colonne aux deux premières dans le determinant :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Nous obtenons :

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 & x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

En développant suivant la dernière ligne, nous trouvons le premier déterminant rencontré.

b) Calcul du déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} x(t_1) & x(t_2) & x(t_3) \\ y(t_1) & y(t_2) & y(t_3) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Remarquons d'abord que $y(t) = (t+a)x(t)$.
Donc :

$$\Delta = \begin{vmatrix} x(t_1) & x(t_2) & x(t_3) \\ (t_1+a)x(t_1) & (t_2+a)x(t_2) & (t_3+a)x(t_3) \\ \frac{x(t_1)}{x(t_1)} & \frac{x(t_2)}{x(t_2)} & \frac{x(t_3)}{x(t_3)} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = x(t_1)x(t_2)x(t_3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (t_1+a) & (t_2+a) & (t_3+a) \\ (t_1+a)(1+t_1^2) & (t_2+a)(1+t_2^2) & (t_3+a)(1+t_3^2) \end{vmatrix}$$

Si on soustrait la première colonne aux deux suivantes, on est donc ramené à calculer le déterminant :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} t_2 - t_1 & t_3 - t_1 \\ (t_2+a)(1+t_2^2) - (t_1+a)(1+t_1^2) & (t_3+a)(1+t_3^2) - (t_1+a)(1+t_1^2) \end{vmatrix}$$

Remarquons alors que :

$$(t_2+a)(1+t_2^2) - (t_1+a)(1+t_1^2) = (t_2 - t_1) + (t_2^3 - t_1^3) + a(t_2 - t_1)$$

$$(t_2+a)(1+t_2^2) - (t_1+a)(1+t_1^2) = (t_2 - t_1)\Big(1 + t_2^2 + t_1 t_2 + t_1^2 + at_2 + at_1\Big)$$

Donc :

$$\Delta_1 = (t_2 - t_1)(t_3 - t_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 + t_2^2 + t_1 t_2 + t_1^2 + at_2 + at_1 & 1 + t_3^2 + t_1 t_3 + t_1^2 + at_3 + at_1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = (t_2 - t_1)(t_3 - t_1)\Big((t_3^2 - t_2^2) + t_1(t_3 - t_2) + a(t_3 - t_2)\Big)$$

$$\Delta_1 = (t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)\Big(t_3 + t_2 + t_1 + a\Big)$$

Finalement, on a bien :

$$\begin{vmatrix} x(t_1) & x(t_2) & x(t_3) \\ y(t_1) & y(t_2) & y(t_3) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)(t_1 - t_2)(a + t_1 + t_2 + t_3)}{(t_1+a)(t_2+a)(t_3+a)(1+t_1^2)(1+t_2^2)(1+t_3^2)}$$

c) Condition nécessaire et suffisante pour que trois points distincts de C_a soient alignés

C'est une conséquence immédiate de la question précédente. C'est que :

$$a + t_1 + t_2 + t_3 = 0$$

4 Étude des points Q, intersection de la droite (AP) et de C_a

a) Q existe pour tout point P différent de A'

Désignons par t_P le paramètre de P et par t_Q celui de Q.
A, P et Q sont alignés si et seulement si :

$$a - a/3 + t_P + t_Q = 0 \ \text{ et } \ t_P \neq -a/3 \ \text{ et } \ t_Q \neq -a$$

La première condition s'écrit :

$$t_Q = \frac{-2a}{3} - t_P$$

Donc, si $t_P \neq a/3$, t_Q est bien différent de $-a$.

b) Si P_1, P_2 et P_3 sont alignés, alors Q_1, Q_2 et Q_3 aussi.

Soient t_1, t_2 et t_3 les paramètres respectifs de P_1, P_2 et P_3 et t'_1, t'_2 et t'_3 ceux de Q_1, Q_2 et Q_3.
Dire que A, P_1 et Q_1 sont alignés est équivalent à :

$$t_1 + t'_1 + \frac{2a}{3} = 0$$

De même pour A, P_2 et Q_2 :

$$t_2 + t'_2 + \frac{2a}{3} = 0$$

et pour A, P_3 et Q_3 :

$$t_3 + t'_3 + \frac{2a}{3} = 0$$

Or P_1, P_2 et P_3 alignés est équivalent à :

$$a + t_1 + t_2 + t_3 = 0$$

Additionnons les trois égalités précédentes. On obtient :

$$2a + t_1 + t_2 + t_3 + t'_1 + t'_2 + t'_3 = 0$$

et donc :

$$a + t'_1 + t'_2 + t'_3 = 0$$

Donc Q_1, Q_2 et Q_3 sont alignés aussi.