Corrigé AgroB 2012

A. Détermination des lois de X et de N

1. a) Questions de cours : θ suit $\mathcal{E}(1/\alpha)$, $E(\theta)=\alpha$, $V(\theta)=\alpha^2$

   b) Fonction de répartition : $\left\{\begin{array}{l} \forall x \geq 0,\ F(x)=1-e^{-x/\alpha} \\ \text{sinon},\quad F(x)=0 \end{array}\right.$

2. a) $(N=n)=(\theta\in[2\pi n, 2\pi(n+1)[)$
   N est à valeurs dans $\mathbb{N}$
   $\forall n\in\mathbb{N},\ P(N=n)=F\left(2\pi(n+1)\right)-F\left(2\pi n\right)$ car θ est une variable à densité
   $P(N=n)=e^{-2\pi n/\alpha}-e^{-2\pi(n+1)/\alpha}=(1-e^{-2\pi/\alpha})\left(e^{-2\pi/\alpha}\right)^n$

   $$\boxed{N \text{ suit la loi } \mathcal{G}_{\mathbb{N}}(p) \text{ avec } p{=}1-e^{-2\pi/\alpha}}$$

   b) Questions de cours : $E(N)=\dfrac{q}{p}=\dfrac{e^{-2\pi/\alpha}}{1-e^{-2\pi/\alpha}}$, $V(N)=\dfrac{q}{p^2}=\dfrac{e^{-2\pi/\alpha}}{\left(1-e^{-2\pi/\alpha}\right)^2}$

3. a) $(X=k\cap N=n)=\left(\theta\in[2\pi n+\dfrac{2\left(k-1\right)\pi}{s}, 2\pi n+\dfrac{2k\pi}{s}[\right)$

   $$P\left(X=k\cap N=n\right)=F\left(2\pi n+\frac{2k\pi}{s}\right)-F\left(2\pi n+\frac{2\left(k-1\right)\pi}{s}\right)=e^{-\dfrac{\left(2\pi n+\dfrac{2\left(k-1\right)\pi}{s}\right)}{\alpha}}\left(1-e^{-\dfrac{2\pi}{\alpha s}}\right)$$

   $P\left(X=k\cap N=n\right)=q^{n+(k-1)/s}(1-q^{1/s})=q^nq^{k/s}\left(q^{-1/s}-1\right)$

   $$\boxed{P\left(X=k\cap N=n\right)=q^nq^{k/s}\left(q^{-1/s}-1\right)}$$

   b) $q\in]0,1[$ d'où $\sum q^n$ est convergente et $\sum_{n=0}^{\infty}q^n=\dfrac{1}{1-q}$

   D'où $\sum\limits_n P\left(X=k\cap N=n\right)$ est convergente et $\sum_{n=0}^{\infty}P\left(X=k\cap N=n\right)=\dfrac{q^{k/s}\left(q^{-1/s}-1\right)}{1-q}$
   On peut aussi remarquer que les événements $\left(X=k\cap N=n\right)_{n\in N}$ sont 2 à 2 incompatibles et par la $\sigma-$additivité, $\sum P\left(X=k\cap N=n\right)$ est convergente
   $\left(N=n\right)_{n\in N}$ formant un système complet d'événements, $P(X=k)=\sum_{n=0}^{\infty}P\left(X=k\cap N=n\right)$

   $$\boxed{P(X=k)=\frac{q^{k/s}\left(q^{-1/s}-1\right)}{1-q}}$$

   c) X est à valeurs dans $\{1,..,s\}$
   $\sum_{k=1}^{s}P(X=k)=\dfrac{q^{-1/s}-1}{1-q}\sum_{k=1}^{s}\left(q^{1/s}\right)^k=\dfrac{q^{-1/s}-1}{1-q}\dfrac{q^{(s+1)/s}-q^{1/s}}{q^{1/s}-1}$ car $q^{1/s}\neq 1$
   $\sum_{k=1}^{s}P(X=k)=\dfrac{1-q^{1/s}}{1-q}\dfrac{q-1}{q^{1/s}-1}=1$

d) $P\left(X=k\cap N=n\right)=q^nq^{k/s}\left(q^{-1/s}-1\right)$

$P(X=k)P(N=n)=pq^n\dfrac{q^{k/s}\left(q^{-1/s}-1\right)}{1-q}=q^nq^{k/s}\left(q^{-1/s}-1\right)$

$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall k\in\{1,..,s\},\ P\left(X=k\cap N=n\right)=P(X=k)P(N=n)$

$$\boxed{X \text{ et } N \text{ sont indépendantes}}$$

B. Numéros gagnants équiprobables

1. a) Quand α tend vers $+\infty$, q tend vers 1

$P(X=k)=\dfrac{q^{(k-1)/s}\left(1-q^{1/s}\right)}{1-q}$

$q=1-p$ avec $p\to 0$

$q^{1/s}=(1-p)^{1/s}=1-\dfrac{1}{s}p+o(p)$

$P(X=k)\underset{p\to 0}{\backsim}\dfrac{\frac{1}{s}p}{p}=\dfrac{1}{s}$

$$\boxed{\forall k\in\{1,..,s\},\ \lim P(X=k)=\frac{1}{s}}$$

la loi limite de X est la loi uniforme sur $\{1,..s\}$

b) Quand α est grand, chaque secteur a la même probabilité d'être obtenu et donc la position initiale n'a presque pas d'influence sur le résultat

2. a) $P\left(X=1\cap N=n\right)=P\left(\theta\in[2\pi n,2\pi n+\pi-\omega[\right)=F\left(2\pi n+\pi-\omega\right)-F\left(2\pi n\right)$

$P\left(X=1\cap N=n\right)=e^{-\frac{2\pi n}{\alpha}}\left(1-e^{-\frac{\pi-\omega}{\alpha}}\right)$

$P\left(X=2\cap N=n\right)=P\left(\theta\in[2\pi n+\pi-\omega,2\pi n+2\pi[\right)=F\left(2\pi(n+1)\right)-F\left(2\pi n+\pi-\omega\right)$

$P\left(X=2\cap N=n\right)=e^{-\frac{2\pi n}{\alpha}}\left(e^{-\frac{\pi-\omega}{\alpha}}-e^{-\frac{2\pi}{\alpha}}\right)$

Comme dans le A.3.b

$P\left(X=1\right)=\sum_{n=0}^{\infty}P\left(X=1\cap N=n\right)=\left(1-e^{-\frac{\pi-\omega}{\alpha}}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-\frac{2\pi}{\alpha}}\right)^n$ série convergente car $0<e^{-\frac{2\pi}{\alpha}}<1$

$$\boxed{P\left(X=1\right)=\frac{1-e^{-\frac{\pi-\omega}{\alpha}}}{1-e^{-\frac{2\pi}{\alpha}}}}$$

$P\left(X=2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}P\left(X=2\cap N=n\right)=\left(e^{-\frac{\pi-\omega}{\alpha}}-e^{-\frac{2\pi}{\alpha}}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-\frac{2\pi}{\alpha}}\right)^n$

$$\boxed{P\left(X=2\right)=\frac{e^{-\dfrac{\pi-\omega}{\alpha}}-e^{-\dfrac{2\pi}{\alpha}}}{1-e^{-\dfrac{2\pi}{\alpha}}}}$$

b) $P\left(X=1\right)=P\left(X=2\right)\Longleftrightarrow e^{-\dfrac{\pi-\omega}{\alpha}}-e^{-\dfrac{2\pi}{\alpha}}=1-e^{-\dfrac{\pi-\omega}{\alpha}}\Longleftrightarrow e^{-\dfrac{\pi-\omega}{\alpha}}=\dfrac{1+e^{-\dfrac{2\pi}{\alpha}}}{2}$

$P\left(X=1\right)=P\left(X=2\right)\Longleftrightarrow e^{\dfrac{\omega}{\alpha}}=\dfrac{e^{\dfrac{\pi}{\alpha}}+e^{\dfrac{-\pi}{\alpha}}}{2}=ch\left(\dfrac{\pi}{\alpha}\right)>0$

Si a et b sont strictement positifs, a=b$\Longleftrightarrow \ln a=\ln b$

D'où $P\left(X=1\right)=P\left(X=2\right)\Longleftrightarrow \dfrac{\omega}{\alpha}=\ln\left(ch\left(\dfrac{\pi}{\alpha}\right)\right)$

$$\boxed{P\left(X=1\right)=P\left(X=2\right)\Longleftrightarrow \omega=\alpha\ln\left(ch\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)\right)}$$

c) Remarquons que la loi de N ne dépend pas des secteurs tracés sur la roue

$P\left(X=1\cap N=n\right)=e^{-\dfrac{2\pi n}{\alpha}}\left(1-e^{-\dfrac{\pi-\omega}{\alpha}}\right)$

$P\left(X=1\right)P(N=n)=\dfrac{1-e^{-\dfrac{\pi-\omega}{\alpha}}}{1-e^{-\dfrac{2\pi}{\alpha}}}(1-e^{-\dfrac{2\pi}{\alpha}})e^{-\dfrac{2\pi n}{\alpha}}=P\left(X=1\cap N=n\right)$

Les événements $(X=1)$ et $P(N=n)$ sont indépendants d'où $(X=2)=\overline{(X=1)}$ et $P(N=n)$ le sont aussi

$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall k\in\{1,2\},\ P\left(X=k\cap N=n\right)=P(X=k=P(N=n)$

$$\boxed{X \text{ et } N \text{ sont indépendantes}}$$

3. a) la fonction ch est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0,+\infty[$ et la fonction $\ln$ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$

Par composition, φ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$

$\forall\alpha>0,\ \varphi'(\alpha)=\ln\left(ch\left(\dfrac{\pi}{\alpha}\right)\right)-\dfrac{\pi}{\alpha}sh\left(\dfrac{\pi}{\alpha}\right)\dfrac{1}{ch\left(\dfrac{\pi}{\alpha}\right)}=-\psi\left(\dfrac{\pi}{\alpha}\right)$

b) ψ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x>0,\ \psi'(x)=\dfrac{shx}{chx}+x\dfrac{ch^2x-sh^2x}{ch^2x}-\dfrac{shx}{chx}=\dfrac{x}{ch^2x}>0$

ψ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et $\lim\limits_{0}\psi(x)=0-\ln(1)=0$

Donc $\boxed{\forall x>0,\ \psi(x)>0}$

Or, $\forall\alpha>0,\ \varphi'(\alpha)=-\psi\left(\dfrac{\pi}{\alpha}\right)<0$

Donc $\boxed{\varphi \text{ est strictement décroissante sur }]0,+\infty[}$

c) $\ln\left(ch\left(\dfrac{\pi}{\alpha}\right)\right)=\ln\dfrac{e^{\dfrac{\pi}{\alpha}}+e^{\dfrac{-\pi}{\alpha}}}{2}=\ln\left(e^{\dfrac{\pi}{\alpha}}\right)+\ln\left(\dfrac{1+e^{\dfrac{-2\pi}{\alpha}}}{2}\right)$

$\varphi(\alpha)=\pi+\alpha\ln\left(\dfrac{1+e^{\dfrac{-2\pi}{\alpha}}}{2}\right)$

$$\lim_{0} \ln\left(\frac{1+e^{\frac{-2\pi}{\alpha}}}{2}\right) = \ln\frac{1}{2} \text{ d'où } \lim_{0}\alpha \ln\left(\frac{1+e^{\frac{-2\pi}{\alpha}}}{2}\right) = 0$$

$$\boxed{\lim_{0+}\varphi(\alpha) = \pi}$$

φ étant décroissante sur $]0, +\infty[$, $\forall\alpha > 0$, $\varphi(\alpha) < \pi$
D'autre part, $\forall\alpha > 0$, $\varphi(\alpha) > 0$ car $ch\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) > 1$ (on montre rapidement que $\forall x > 0$, $chx > 1$)
D'où $\forall\alpha > 0$, $\varphi(\alpha) \in]0, \pi[$
Donc en prenant $\omega = \varphi(\alpha)$, on eut diviser le disque en deux secteurs le premier d'angle $\pi - \omega$ et le deuxième d'angle $\pi + \omega$ de telle sorte qu'il y a équiprobabilité d'obtenir l'un ou l'autre des secteurs

d) $\lim_{+\infty} ch\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) = 1$ d'où $\ln\left(ch\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)\right) \underset{+\infty}{\backsim} ch\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) - 1$

$$chx = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{2} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

D'où $ch\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) - 1 \underset{+\infty}{\backsim} \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2$

$\varphi(\alpha) \underset{+\infty}{\backsim} \frac{\pi^2}{2\alpha}$

$$\boxed{\lim_{+\infty}\varphi(\alpha) = 0}$$

Quand α tend vers $+\infty$, ω tend vers 0 et on retrouve le résultat du B avec $s = 2$, à savoir qu'il y a équiprobabilité des secteurs de même angle, quand α est trés grand.

C. Parties enchainées

1. a) Pour $s = 3$, la loi de X (de la partie A)est :
$\forall k \in \{1, 2, 3\}, P(X = k) = \frac{q^{(k-1)/3}\left(1 - q^{1/3}\right)}{1 - q} = q_0 r^{k-1}$
-Si $X_i = 3$, avant le $(i + 1)-$ème lancer, la position initiale est I_0,
et donc $P(X_{i+1} = k/X_i = 3) = P(X = k) = q_0 r^{k-1}$
-Si $X_i = 2$, avant le $(i + 1)-$ème lancer, la position initiale est I_2, et donc
$P(X_{i+1} = 3/X_i = 2) = P(X = 1) = q_0$
$P(X_{i+1} = 1/X_i = 2) = P(X = 2) = q_0 r$
$P(X_{i+1} = 2/X_i = 2) = P(X = 3) = q_0 r^2$
-Si $X_i = 1$, avant le $(i + 1)-$ème lancer, la position initiale est I_1, et donc
$P(X_{i+1} = 2/X_i = 1) = P(X = 1) = q_0$
$P(X_{i+1} = 3/X_i = 1) = P(X = 2) = q_0 r$
$P(X_{i+1} = 1/X_i = 1) = P(X = 3) = q_0 r^2$

b) On vérifie que $a_{k,j} = P(X_{i+1} = k/X_i = j)$
ligne 1 : $a_{1,1} = q_0 r^2 = P(X_{i+1} = 1/X_i = 1)$, $a_{1,2} = q_0 r = P(X_{i+1} = 1/X_i = 2)$, $a_{1,3} = q_0 = P(X_{i+1} = 1/X_i = 3)$
ligne 2 : $a_{2,1} = q_0 = P(X_{i+1} = 2/X_i = 1)$, $a_{2,2} = q_0 r^2 = P(X_{i+1} = 2/X_i = 2)$, $a_{1,3} = q_0 r = P(X_{i+1} = 2/X_i = 3)$
ligne 3 : $a_{3,1} = q_0 r = P(X_{i+1} = 3/X_i = 1)$, $a_{3,2} = q_0 = P(X_{i+1} = 3/X_i = 2)$, $a_{3,3} = q_0 r^2 = P(X_{i+1} = 3/X_i = 3)$

c) $(X_i=j)_{j=1,2,3}$ forme un système complet d'événements, donc par la formule des probabilités totales :
Pour $k=1,2,3,\ P(X_{i+1}=k)=\sum_{j=1}^{3}P(X_{i+1}=k/X_i=j)P\left(X_i=j\right)=\sum_{j=1}^{3}a_{k,j}P\left(X_i=j\right)$

$$\boxed{Y_{i+1}=AY_i}$$

par récurrence immédiate : $\forall i\geq 1,\ Y_i=A^iU$, car la position initiale avant le premier lancer est I_0
et donc $Y_1=\begin{pmatrix} P(X=1)\\ P(X=2)\\ P(X=3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q_0\\ q_0 r\\ q_0^2\end{pmatrix}=AU$

$$\boxed{\forall i\geq 1,\ Y_i=A^iU}$$

2. a) $J^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

D'où $\boxed{A=q_0\left(r^2I+J+rJ^2\right)}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$

Donc 1 est valeur propre de J et $\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ j^2\\ j\end{pmatrix}=j\begin{pmatrix} 1\\ j^2\\ j\end{pmatrix}$

Donc j est valeur propre de J et $\begin{pmatrix} 1\\ j^2\\ j\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ j\\ j^2\end{pmatrix}=j^2\begin{pmatrix} 1\\ j\\ j^2\end{pmatrix}$

Donc j^2 est valeur propre de J et $\begin{pmatrix} 1\\ j\\ j^2\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé

J étant une matrice d'ordre 3 admet au plus 3 valeurs propres.
On vient de montrer que $1,j$ et j^2 sont valeurs propres de J, il n'y en n'a pas d'autres

$$\boxed{sp(J)=\{1,j,j^2\}}$$

c) $\mathrm{j}^3=\left(e^{i2\pi/3}\right)^3=e^{i2\pi}=1$

$1+j+j^2=1+e^{i2\pi/3}+\left(e^{i2\pi/3}\right)^2=\dfrac{1-\left(e^{i2\pi/3}\right)^3}{1-e^{i2\pi/3}}=0$ (somme de termes d'une suite géométrique de raison différente de 1)

$\overline{j}=e^{-i2\pi/3}=e^{i2\pi}e^{-i2\pi/3}=\left(e^{i2\pi/3}\right)^2=j^2$

d) On sait d'autre part, comme on a trouvé 3 valeurs propres distinctes, que J est diagonalisable (dans $\mathbb{C}$) et que chaque sous-espaces propre est de dimension 1.
Comme on a trouvé des vecteurs propres directement, on peut sans calcul écrire :
$E_1=vect(\varepsilon_1)$ avec $\varepsilon_1=(1,1,1)$

$E_j = vect(\varepsilon_2)$ avec $\varepsilon_2 = (1, j^2, j)$
$E_{j^2} = vect(\varepsilon_3)$ avec $\varepsilon_3 = (1, j, j^2)$
Notons P la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$
P est une matrice inversible

Par le thm de changement de base : $\boxed{J = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}}$

e) $\overline{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$

$\overline{P}P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I$ en utilisant $jj^2 = 1$ et $1+j+j^2 = 0$

On en déduit l'inverse de P , car $\left(\frac{1}{3}\overline{P}\right) P = \int$

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3}\overline{P}}$$

f) $A = q_0 \left(r^2 I + J + rJ^2\right)$
$I = PIP^{-1}$, $J = PDP^{-1}$, $J^2 = PD^2P^{-1}$
D'où $A = P\left(q_0 r^2 I + q_0 D + q_0 r D^2\right) P^{-1}$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}, D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j^2 & 0 \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix}$ car $j^4 = j$

$A = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = q_0 r^2 I + q_0 D + q_0 r D^2 = q_0 \begin{pmatrix} r^2+1+r & 0 & 0 \\ 0 & r^2+j+rj^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2+j^2+rj \end{pmatrix}$

$1 + r + r^2 = \dfrac{1-q}{1-q^{1/s}}$ d'où $q_0\left(r^2+1+r\right) = 1$

$$\boxed{A = P\Delta P^{-1} \text{ avec } \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 \end{pmatrix}, \text{ avec } \delta_2 = q_0\left(r^2+j+rj^2\right) \text{ et } \delta_3 = q_0\left(r^2+j^2+rj\right)}$$

g) $\overline{\delta_2} = q_0\left(r^2 + \overline{j} + r\overline{j^2}\right) = q_0\left(r^2+j^2+rj^4\right) = q_0\left(r^2+j^2+rj\right) = \delta_3$
$\left(r^2+j+rj^2\right)_0 \left(r^2+j^2+rj\right) = r^4 + r^2j^2 + r^3j + r^2j + j^3 + rj^2 + r^3j^2 + rj^4 + r^2j^3$
$\left(r^2+j+rj^2\right)_0 \left(r^2+j^2+rj\right) = r^4 + r^3\left(j+j^2\right) + r^2\left(j+j^2+1\right) + r\left(j^2+j\right) + 1 = r^4 - r^3 - r + 1$
$(1-r)\left(1-r^3\right) = 1 - r - r^3 + r^4$

$$\boxed{\delta_2\delta_3 = q_0^2(1-r)\left(1-r^3\right)}$$

$\delta_2\delta_3 = |\delta_2|^2 = q_0^2(1-r)\left(1-r^3\right) = \dfrac{(1-r)^3}{1-r^3}$

$\dfrac{(1-r)^3}{1-r^3} < 1 \Longleftrightarrow 1 - 3r + 3r^2 - r^3 < 1 - r^3$ (car $r^3 < 1$)

$\dfrac{(1-r)^3}{1-r^3} < 1 \Longleftrightarrow 3r(r-1) < 0$ ce qui est vrai car $r \in]0,1[$

d'où $\boxed{|\delta_2| = |\delta_3| < 1}$

h) $A^n = P\Delta^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\delta_2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (\delta_3)^n \end{pmatrix} P^{-1}$

$\lim \Delta^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ car $|\delta_2| = |\delta_3| < 1$

les coefficients de A^n étant obtenus par combinaison linéaires des coefficients de Δ^n , on obtient :

$$\begin{aligned}
\lim A^n &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Comme $Y_n = A^n U$, il vient

$$\lim Y_n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\forall k \in \{1,2,3\},\ \lim P(X = k) = \frac{1}{3}}$$

D.Autres modèles de parties enchainées

1. a) Notons T_i l'angle effectué par la roue au i-ème lancer.$\theta_l = \sum_{i=1}^{l} T_i$
   (T_i) est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi admettant une espérance m et un écart-type σ, d'aprés le thm de la limite centrée, pour l grand, on peut approcher la loi de $\dfrac{\theta_l - lm}{\sigma\sqrt{l}}$ par la loi $\mathcal{N}(0,1)$
   Ou encore, on approche la loi de θ_l par la loi normale de moyenne lm et d'écart-type $\sigma\sqrt{l}$,avec $m = E(\theta) = \alpha$ et $\sigma = \alpha$

   b) On sait que $G(r) + G(-r) = 1$;
   $G(r) - G(-r) = 0,95 \Longleftrightarrow 2G(r) - 1 = 0,95 \Longleftrightarrow G(r) = 1,95/2 = 0,975$
   Par lecture du graphe de G : cela donne $r = 2$ (à 10^{-1} prés)
   D'où en posant $\boxed{a = lm - 2 * \sigma\sqrt{l} \text{ et } a = lm + 2 * \sigma\sqrt{l}}$
   alors $P(a \leq \theta_l \leq b) = P\left(-2 \leq \dfrac{\theta_l - lm}{\sigma\sqrt{l}} \leq 2\right) = G(2) - G(-2) = 0,95$

   c) $\alpha = 10\pi$, $l = 100$
   $a = 1000\pi - 200\pi = 800\pi$ et $b = 1000\pi + 200\pi = 1200\pi$
   $P(n_1 \leq N_l \leq n_2) = P(2n_1\pi < \theta_l < 2(n_2 + 1)\pi))$
   En prenant $2n_1\pi = a$ et $2(n_2 + 1)\pi = b$, on aura bien $P(n_1 \leq N_l \leq n_2) = 0,95$
   $2n_1 = 800 \Longleftrightarrow n_1 = 400$ et $2(n_2 + 1) = 1200 \Longleftrightarrow n_2 = 599$

$$\boxed{n_1 = 400 \text{ et } n_2 = 599}$$

Montrons que le couple (a, b) trouvés ci-dessus est tel que $P\left(a \leq \theta_l \leq b\right) \geq 0,95$ et $b - a$ minimal.
Cela revient à montrer que si x et y vérifie $G(y) - G(x) \geq 0,95$ alors $y - x \geq 2r$
Pour cela, étudions la fonction : $H(x) = G(x + d) - G(x)$ avec d fixé $d > 0$

$$H'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\dfrac{(x+d)^2}{2}} - e^{-\dfrac{x^2}{2}} \right)$$

$H'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow (x + d)^2 \leq x^2 \Longleftrightarrow d(2x + d) \leq 0 \Longleftrightarrow x \leq -d/2$
D'où H est croissante puis décroissante et admet donc un maximum en $x = -d/2$
$H(-d/2) = G(d/2) - G(-d/2) = 2G(d/2) - 1$
$H(-d/2) \geq 0,95 \Longleftrightarrow G(d/2) \geq 0,975 \Longleftrightarrow d \geq 2r$
Donc pour qu'il exsite x tel que $H(x) \geq 0,95$, il faut que que $d \geq 2r$
Donc pour qu'il existe x et y tel que $G(y) - G(x) \geq 0,95$, il faut $y - x \geq 2r$
Les valeurs trouvées pour n_1 et n_2 sont telles que $P\left(n_1 \leq N_l \leq n_2\right) \geq 0,95$ et telles que $[n_1, n_2]$ soit de longueur minimale