Corrigé agro-véto 2011 épreuve B

Partie A : Fonction génératrice d'une variable à valeurs dans I_n

1. (a) Si X est à valeurs dans I_n, alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $g_X(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, g_X est un polynôme de degré n.

   $g_X(1) = \sum_{k=0}^{n} a_k = 1$ par définition d'une variable aléatoire à valeurs dans I_n.

   $$\boxed{g_X(1) = 1}$$

   (b) g_X est un polynôme à coefficients réels. Si g_X est donnée, par unicité des coefficients d'un polynôme, les coefficients a_k sont déterminés de façon unique. Donc la loi de X est connue.

2. (a) Pour tout réel t, $E(t^{Z_1+Z_2}) = E(t^{Z_1} t^{Z_2}) = E(t^{Z_1})E(t^{Z_2})$ car les variables aléatoires Z_1 et Z_2 étant indépendantes, t^{Z_1} et t^{Z_2} sont indépendantes. On a bien :

   $$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ g_{Z_1+Z_2}(t) = g_{Z_1}(t) g_{Z_2}(t)}$$

   (b) Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors
   $\forall t \in \mathbb{R},\ g_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} t^k = (pt+q)^n$. (On a posé $q = 1-p$).

   (c) Si Y suit aussi une loi binomiale de paramètres n' et p, et si X et Y sont indépendantes, alors
   $\forall t \in \mathbb{R},\ g_{X+Y}(t) = (pt+q)^n (pt+q)^{n'} = (pt+q)^{n+n'}$.
   On reconnaît la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n+n'$ et p.
   La fonction génératrice caractérise une loi, donc $X+Y$ suit une loi binomiale de paramètres $n+n'$ et p.

3. (a) Si X_1 et X_2 suivent une loi uniforme sur I_6^*, alors :
   $\forall t \in \mathbb{R},\ g_{X_1}(t) = g_{X_2}(t) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} t^k$.
   Si X_1 et X_2 sont indépendantes, alors :
   $g_{X_1+X_2}(t) = g_{X_1}(t) g_{X_2}(t) = \frac{1}{36}\sum_{k=2}^{7}(k-1)t^k + \frac{1}{36}\sum_{k=8}^{12}(13-k)t^k$.
   On en déduit la loi de probabilité de $X_1 + X_2$:

   $$\boxed{\forall k \in \{2,..,7\},\quad P(X_1+X_2=k) = \frac{k-1}{36},\quad \forall k \in \{8,..,12\},\quad P(X_1+X_2=k) = \frac{13-k}{36}}$$

(b) i. Si Y suit une loi uniforme sur I', alors $\forall t \in \mathbb{R},\ R(t) = g_Y(t) = \dfrac{1}{11}\displaystyle\sum_{k=2}^{12} t^k = \dfrac{t^2}{11}\displaystyle\sum_{k=0}^{10} t^k$.

ii. $\boxed{\forall t \in \mathbb{R} - \{1\},\ R(t) = \dfrac{t^2}{11} \times \dfrac{1-t^{11}}{1-t}.}$

0 est racine double de ce polynôme.

Les nombres complexes $e^{i\frac{2k\pi}{11}}$ pour k entier entre 1 et 10 sont racines non réelles de R.

On a trouvé au moins 12 racines (comptées avec leur ordre de multiplicité) de R. Comme le polynôme R est de degré 12, il n'a pas d'autres racines.

iii. $\forall t \in \mathbb{R},\ g_{X_1}(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{6} P(X_1 = k)\, t^k$.

0 est racine du polynôme g_{X_1}, ce polynôme est divisible par t.

Il existe donc un polynôme à coefficients réels P tels que $g_{X1}(t) = tP(t)$.

Le polynôme $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} P(X_1 = k)\, t^k$ étant de degré 6, P est de degré 5.

De même il existe un polynôme Q de degré 5 tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} P(X_2 = k)\, t^k = tQ(t)$.

Or X_1 et X_2 sont indépendantes, donc $R(t) = g_{X_1}(t) g_{X_2}(t) = t^2 P(t) Q(t)$.

$$\boxed{R(t) = t^2 P(t) Q(t)}$$

iv. Les racines de P et Q seraient les nombres complexes non réels $e^{i\frac{2k\pi}{11}}$ pour k entier entre 1 et 10. Ce qui est absurde, car P étant de degré impair, il devrait avoir au moins une racine réelle.

$\boxed{\text{On ne peut donc pas truquer les dés de manière que la loi de } X_1 + X_2 \text{ soit uniforme sur } I'.}$

Partie B : Fonction génératrice d'une variable à valeurs dans N

1. $\forall t \in [-1,1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ |a_n t^n| \leqslant a_n$.
   La série de terme $\sum a_n$ converge, et sa somme vaut 1.
   Le théorème de comparaison des séries à termes positifs nous permet d'affirmer que la série $\sum a_n t^n$ converge absolument.
   Or la convergence absolue entraîne la convergence.
   Donc $\boxed{g_X \text{ est défini sur } [-1,1].}$
   $g_X(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$, par définition d'une variable aléatoire.

2. Si X et Y sont indépendantes, alors $\forall t \in [-1,1]$ les variables aléatoires t^X et t^Y sont indépendantes et admettent des espérances d'après le 1.
   Donc $g_{X_1+X_2}(t) = E(t^{X_1+X_2}) = E(t^{X_1} t^{X_2}) = E(t^{X_1}) E(t^{X_2}) = g_{X_1}(t) g_{X_2}(t)$.

$$\boxed{g_{X_1+X_2}(t) = g_{X_1}(t) g_{X_2}(t)}$$

3. (a) Si X suit une loi géométrique de paramètre p à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, alors

$$\forall t \in [-1,1],\ g_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} p t^k = pt \sum_{k=0}^{+\infty} (qt)^k = \frac{pt}{1-qt},\ \text{car } |qt| < 1$$

(b) Si X suit une loi Poisson de paramètre λ, alors $\forall t \in [-1,1],\ g_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} t^k = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda t}$.

Partie C : Fonction génératrice de la somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires

1. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : "$\forall t \in [0,1],\ \psi_n(t) = (f(t))^n$".
   - $\mathscr{P}_1$ est vraie.
   - Supposons que $\mathscr{P}_n$ soit vraie. Sous cette hypothèse, les variables aléatoires $X_1, \dots, X_{n+1}$ étant indépendantes, $X_1 + \dots + X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes.
     D'après B.2 la fonction génératrice de $X_1 + \dots + X_n + X_{n+1}$ est $\psi_{n+1} = g_{X_1+\dots+X_n} g_{X_{n+1}}$
     En utilisant l'hypothèse de récurrence, $\forall t \in [-1,1],\ \psi_{n+1}(t) = (f(t))^n f(t) = (f(t))^{n+1}$.
     Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
   - $\boxed{\text{Par récurrence, } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{P}_n \text{ est vraie.}}$

2. La variable aléatoire N étant à valeurs dans I_s, la famille $(N = n)_{n \in I_s}$ est un système complet d'événements. Utilisons la formule des probabilités totales :

   $\forall k \in \mathbb{N},\ P(Y = k) = \sum_{n=0}^{s} P((S_n = k) \bigcap (N = n))$.

   Or si $N = n$, alors $Y = S_n$. Donc $P(Y = k) = \sum_{n=0}^{s} P((S_n = k) \bigcap (N = n))$.

3. $\forall t \in [-1,1],\ g(t) = g_Y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = k) t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{s} P((S_n = k) \bigcap (N = n)) \right) t^k$

   $g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{s} P(S_n = k) P(N = n) \right) t^k$

   car N est indépendante des variables X_n, donc de S_n.

4. Soit $t \in [-1,1]$. Pour tout $n \in I_s$ la série de terme général $P(S_n = k) t^k$ est absolument convergente.
   Donc la combinaison linéaire $\sum_{n=0}^{s} P(N = n) \left(\sum P(S_n = k) t^k \right)$ est absolument convergente et

   $\sum_{n=0}^{s} P(N = n) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} P(S_n = k) t^k \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{s} P(N = n) P(S_n = k) t^k \right) = g(t)$

   Donc $g(t) = \sum_{n=0}^{s} P(N = n) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} P(S_n = k) t^k \right) = \sum_{n=0}^{s} P(N = n) \psi_n(t)$

   $g(t) = \sum_{n=0}^{s} P(N = n) (f(t))^n = h(f(t))$.

Ce qui montre que :

$$\boxed{\forall \in [-1,1],\ g(t) = (h\circ f)(t).}$$

5. On a vu au B.3.a. que $\forall t \in [-1,1],\ f(t) = \dfrac{pt}{1-qt}$ et $h(t) = \dfrac{p't}{1-q't}$.

   Donc $g(t) = h(f(t)) = \dfrac{p'f(t)}{1-q'f(t)} = \dfrac{p'\dfrac{pt}{1-qt}}{1-q'\dfrac{pt}{1-qt}} = \dfrac{pp't}{1-(q+q'p)t}$.

   $$\boxed{g(t) = \frac{pp't}{1-(q+q'p)t}.}$$

   Or $q+q'p = 1-p+(1-p')p = 1-pp'$, donc $g(t) = \dfrac{pp't}{1-(1-pp')t}$. On reconnaît la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre pp'.

   $$\boxed{Y \text{ suit la loi géométrique de paramètre } pp'}$$

Partie D : Multiplication d'une bactérie

1. Si à la génération n il n'y a plus de bactéries, alors à génération $n+1$ il n'y a pas non plus de bactérie.
   L'événement $Y_n = 0$ entraîne l'événement $Y_{n+1} = 0$, donc $x_n \leqslant x_{n+1}$.
   La suite (x_n) est croissante, majorée par 1 (ce sont des probabilités), donc converge.

2. Y_1 est le nombre de fils de la bactérie de départ. Donc Y_1 suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   $f(0) = g_{Y_1}(0) = P(Y_1 = 0) = x_1$

   $$\boxed{x_1 = f(x_0)}$$

3. Si $Y_1 = 0$, alors $Y_2 = 0$
   Sinon : la bactérie de départ a Y_1 fils qu'on peut numéroter de 1 à Y_1.
   Appelons X_k le nombre de fils du fils numéro k.
   Notons, comme dans le C. $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$
   Le nombre de fils de la seconde génération est $Y_2 = S_{Y_1}$
   Par hypothèse les variables aléatoires $(X_k)_{k\geq 1}$ sont indépendantes et suivent la même loi que X.
   Nous avons montré à la question C.4 que alors $\boxed{g_{Y_2} = g_{Y_1}\circ f = f\circ f.}$

4. (a) Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : "$g_{Y_n} = f^n$" (composée n-ème de f).
   - $\mathscr{P}_1$ est vraie.

- Supposons que $\mathscr{P}_n$ soit vraie.
  Si $Y_n = 0$, alors $Y_{n+1} = 0$
  Sinon : à la génération n il y a Y_n bactéries qu'on peut numéroter de 1 à Y_n.
  Appelons X_k le nombre de fils du fils numéro k.
  Notons, comme dans le C. $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
  Le nombre de fils de la $(n+1)$-ème génération est $Y_{n+1} = S_{Y_n}$
  Par hypothèse les variables aléatoires $(X_k)_{k\geq 1}$ sont indépendantes et suivent la même loi que X.
  Nous avons montré à la question C.4 que alors $g_{Y_{n+1}} = g_{Y_n} \circ f$
  En utilisant l'hypothèse de récurrence, $g_{Y_{n+1}} = f^n \circ f = f^{n+1}$.
- $\boxed{\text{Par récurrence, } g_{Y_{n+1}} = f^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$

  Donc $x_n = g_{Y_n}(0) = f^n(0) = f(f^{n-1}(0)) = f(x_{n-1})$.

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad x_n = f(x_{n-1})}$$

(b) Lorsque n tend vers $+\infty$, (x_n) tend vers p.
(x_{n-1}) tend aussi vers p. La fonction f étant continue en p, $(f(x_{n-1}))$ tend vers $f(p)$.
Or $x_n = f(x_{n-1})$, donc par unicité de la limite $p = f(p)$.

$$\boxed{p = f(p).}$$

5. Soit $\lambda \leqslant 1$.

$\forall t \in [0,1]$, $\varphi(t) = f(t) - t = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)} - t$, $\varphi^{'}(t) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda(t-1)} - 1$.
$\forall t \in [0,1[$, $t-1<0$ donc $\mathrm{e}^{\lambda(t-1)} < 1$, donc $\lambda \mathrm{e}^{\lambda(t-1)} < 1$ et $\varphi^{'} < 0$ sur $[0,1]$.

t	0		1
$\varphi'(t)$		$-$	
φ	$\mathrm{e}^{-\lambda}$	$\searrow$	0

φ est strictement décroissante de $[0,1]$ sur $[0, \mathrm{e}^{-\lambda}]$.
Le seul zéro de φ est 1. Or les zéros de φ sont les point fixes de f, donc nécessairement $p = 1$.

$$\boxed{\text{La probabilité que la bactérie disparaisse est 1}}$$

6. Soit $\lambda > 1$.

(a) $\forall t \in]1, +\infty[$, $\theta^{'}(t) = \dfrac{\ln u - 1}{u^2}$.

u	1		e		$+\infty$
$\theta'(t)$		$-$	0	$+$	
θ	1	$\searrow$	$1-\mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$	1

D'après le tableau de variations : $\forall u > 1,\ \theta(u) > 0$, donc $\dfrac{\ln u}{u} < 1$ et donc que $\ln u < u$.

$$\boxed{\forall u > 1,\ \ln u < u}$$

(b) $\forall t \in [0,1],\ \varphi(t) = f(t) - t = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)} - t,\ \varphi'(t) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda(t-1)} - 1$ et $\varphi''(t) = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda(t-1)} > 0$.
φ' est continue, strictement croissante sur $[0,1]$ dans $J = [\lambda \mathrm{e}^{-\lambda} - 1, \lambda - 1]$ donc réalise une bijection entre ces deux intervalles.
On a montré à la question précédente que $\ln \lambda < \lambda$, donc $\lambda < \mathrm{e}^{\lambda}$ et $\lambda \mathrm{e}^{-\lambda} - 1 < 0$.
Comme $\lambda - 1 > 0$, 0 est élément de J. $\boxed{\text{Il existe donc un unique } \beta \in]0,1[\text{ tel que } \varphi'(\beta) = 0.}$
φ' est négative sur $[0,\beta]$ et positive sur $[\beta,1]$.

t	0		α		β		1
$\varphi'(t)$	$\lambda \mathrm{e}^{-\lambda} - 1 < 0$	$-$			0	$+$	
φ	$\mathrm{e}^{-\lambda}$	$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

φ est strictement décroissante sur $[0,\beta]$ et strictement croissante sur $[\beta,1]$.

(c) $\varphi(1)$ étant égal à 0, nécessairement $\varphi(\beta) < 0$.
La restriction de φ à $[0,\beta]$ réalise une bijection entre $[0,\beta]$ et $[\varphi(\beta), \mathrm{e}^{-\lambda}]$. Il existe donc un réel unique $\alpha \in]0,\beta[$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$. Or $\varphi(\alpha) = 0$ équivaut à $f(\alpha) = \alpha$.
Donc $\boxed{\text{il existe un unique } \alpha \in]0,1[\text{ tel que } f(\alpha) = \alpha.}$

(d) f est continue strictement croissante de $[0,\alpha]$ dans $[\mathrm{e}^{-\lambda}, \alpha] \subset [0,\alpha]$. Le segment $[0,\alpha]$ est stable par f.
Comme $x_0 = 0$, on montre facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in [0,\alpha]$.
La limite de (x_n) est donc élément de $[0,\alpha]$.
Or on a vu que la limite de (x_n) est un point fixe de f. Le seul point fixe de f dans ce segment est α, donc la suite (x_n) tend vers α.

$$\boxed{\text{La probabilité de disparition de la bactérie est } \alpha \text{ qui est strictement inférieur à 1.}}$$