Corrigé Epreuve B Agro Véto 2010

Corrigé proposé par Martine Ginestet BCPST2 Fénelon
dessins de Bruno Anselme Fénelon

Partie A Loi gamma

1. a) Par croissances comparées, $\lim_{t \to +\infty} t^{\alpha-1}e^{-t/2} = 0$, donc il existe un réel $A > 0$ tel que :

$$\forall t \geq A, \quad t^{\alpha-1}e^{-t/2} \leq 1$$

D'autre part , $\forall t > 0, \quad t^{\alpha-1}e^{-t/2} > 0$

$$\boxed{\text{il existe } A > 0 \text{ tel que } \forall t \geq A, \quad 0 \leq t^{\alpha-1}e^{-t/2} \leq 1}$$

La fonction : $f : t \longmapsto t^{\alpha-1}e^{-t}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$
$\forall t \geq A, \quad 0 \leq t^{\alpha-1}e^{-t} \leq e^{-t/2}$
et $\int_A^{+\infty} e^{-t/2}dt$ est convergente (car $\int_0^{+\infty} e^{-at}dt$ est convergente pour tout a>0)
Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives,

$$\boxed{\int_A^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t/2}dt \text{ converge}}$$

b) $\forall t \in]0, A], \quad 0 \leq t^{\alpha-1}e^{-t} \leq t^{\alpha-1}$
$\int_0^A t^{\alpha-1}dt$ est convergente car $\alpha - 1 > -1$
Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\int_0^A t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ converge

$$\boxed{\text{l'intégrale } \Gamma(\alpha) \text{ converge pour } \alpha > 0}$$

2. a) $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$ (densité d'une loi exponentielle de paramètre 1)

b) $\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha}e^{-t}dt$
On pose : $\begin{cases} u(t) = t^{\alpha} & u'(t) = \alpha t^{\alpha-1} \\ v'(t) = e^{-t} & v(t) = -e^{-t} \end{cases}$ u et v sont de classe C^1 sur $]0, +\infty[$
$\lim_{t \to +\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées, $\lim_{t \to 0} u(t)v(t) = 0$ car $\alpha > 0$
On peut donc faire l'intégration par parties directement dans l'intégrale généralisée :
$\Gamma(\alpha + 1) = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt = \alpha\Gamma(\alpha)$

$$\boxed{\forall \alpha > 0, \quad \Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)}$$

c) Par récurrence immédiate :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(n) = (n-1)!}$$

3. a) $\varphi_{n,\lambda}$ est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0.
$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,\lambda}(x)dx = \int_0^{+\infty} \varphi_{n,\lambda}(x)dx$
A l'aide du changement de variable $t = \lambda x$, $\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\lambda}(x)dx = \frac{1}{(n-1)!}\Gamma(n) = 1$

$$\boxed{\varphi_{n,\lambda} \text{ est une densité de probabilité}}$$

b) $E(U) = \int_0^{+\infty} x\varphi_{n,\lambda}(x)dx = \frac{n}{\lambda}\int_0^{+\infty} \varphi_{n+1,\lambda}(x)dx = \dfrac{n}{\lambda}$

$$\boxed{U \text{ admet bien une espérance et } E(U) = \frac{n}{\lambda}}$$

De même $E(U^2) = \int_0^{+\infty} x^2\varphi_{n,\lambda}(x)dx = \dfrac{(n+1)n}{\lambda^2}\int_0^{+\infty} \varphi_{n+2,\lambda}(x)dx = \dfrac{(n+1)n}{\lambda^2}$

$V(U) = E(U^2) - E(U)^2 = \dfrac{(n+1)n}{\lambda^2} - \dfrac{n^2}{\lambda^2}$

$$\boxed{U \text{ admet bien une variance et } V(U) = \frac{n}{\lambda^2}}$$

4. a) $I(1,q) = \int_0^x (x-t)^{q-1}dt = \left[-\dfrac{(x-t)^q}{q}\right]_0^x = \dfrac{x^q}{q}$

$$\boxed{I(1,q) = \frac{x^q}{q}}$$

b) On pose : $\begin{cases} u(t) = t^{p-1} & u'(t) = (p-1)t^{p-2} \\ v'(t) = (x-t)^{q-1} & v(t) = -\dfrac{(x-t)^q}{q} \end{cases}$ $\quad u$ et v sont de classe C^1 sur $[0,x]$

$I(p,q) = \left[-t^{p-1}\dfrac{(x-t)^q}{q}\right]_0^x + \dfrac{p-1}{q}I(p-1,q+1)$

$$\boxed{I(p,q) = \frac{p-1}{q}I(p-1,q+1)}$$

c) $\forall p \geq 1, H_p =$ "$\forall q \geq 1, I(p,q) = \dfrac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}x^{p+q-1}$

Initialisation : H_1 est vrai d'après a)

Hérédité : Soit $p \geq 1$ tel que H_p est vrai

$I(p+1,q) = \dfrac{p}{q}I(p,q+1) = \dfrac{p}{q}\dfrac{(p-1)!(q)!}{(p+q)!}x^{p+q} = \dfrac{(p+1-1)!(q-1)!}{(p+1+q-1)!}x^{p+1+q-1}$ d'où H_{p+1} est vrai

Par principe de récurrence :

$$\boxed{\forall p \geq 1, \forall q \geq 1, I(p,q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}x^{p+q-1}}$$

5. a) Notons θ la densité de $X_p + X_q$ obtenue par le produit de convolution

$\forall x \leq 0, \theta(x) = 0$ car $X_p + X_q$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$

$\forall x > 0, \theta(x) = \int_0^x \varphi_{p,\lambda}(t)\varphi_{q,\lambda}(x-t)dt$ car $\varphi_{p,\lambda}(t)\varphi_{q,\lambda}(x-t) = 0$ si $t \notin [0,x]$

$\theta(x) = \dfrac{\lambda^{p+q}}{(p-1)!(q-1)!}\int_0^x t^{p-1}e^{-\lambda t}(x-t)^{q-1}e^{-\lambda(x-t)}dt = \dfrac{\lambda^{p+q}e^{-\lambda x}}{(p-1)!(q-1)!}I(p,q) = \dfrac{\lambda^{p+q}}{(p+q-1)!}x^{p+q-1}e^{-\lambda x}$

$$\boxed{X_p + X_q \text{ suit } \gamma(p+q,\lambda)}$$

b) i. La loi exponentielle de paramètre λ est la loi $\gamma(1,\lambda)$

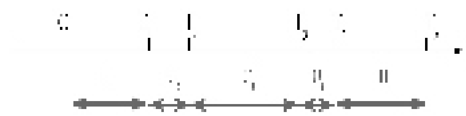
ii. soit une suite $(U_n)_{n\geq 1}$ de variables indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$

$\forall n \geq 1, H_n =$ "$S_n = \sum_{k=1}^n U_k$ suit $\gamma(n,\lambda)$"

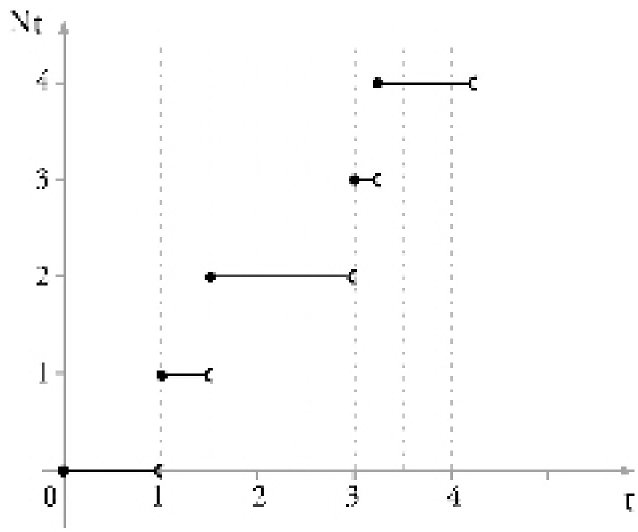
Initialisation : H_1 est vrai d'après i)

Hérédité : Soit $n \geq 1$ tel que H_n est vrai

$S_{n+1} = S_n + U_{n+1}$; S_n et U_{n+1} sont indépendantes, $S_n \hookrightarrow \gamma(n,\lambda)$ et $U_{n+1} \hookrightarrow \gamma(1,\lambda)$



b)



D'après le a), $S_{n+1} \hookrightarrow \gamma(n+1, \lambda)$
Par principe de récurrence,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} U_k \text{ suit } \gamma(n, \lambda)}$$

B. Modélisation du passage de Bus

1. a) i. $t < T_1$ **ssi** le premier bus passe aprés l'instant t **ssi** il n'y a pas de bus entre les instants 0 et t **ssi** $N_t = 0$

   ii. Si $N_t = n$, alors il y a exactement n bus qui sont passés entre les instants 0 et t, alors le n-ième bus passe à l'instant t ou avant et le $(n+1)$-ième aprés t donc $T_n \leq t$ et $T_{n+1} > t$
   Réciproquement si $T_n \leq t < T_{n+1}$, alors il y a exactement n bus qui sont passés entre 0 et t

$$\boxed{(N_t = n) = (T_n \leq t < T_{n+1})}$$

2. Fixons $t > 0$
   a) D'aprés la partie A., $T_n \hookrightarrow \gamma(n, \lambda)$

b) Si $N_t \geq n$ alors il y a au moins n bus qui sont passés entre les instants 0 et t, alors le n-ième bus passe à l'instant t ou avant d'où $T_n \leq t$
Réciproquement, si $T_n \leq t$ alors il est passé au moins n bus entre les instants 0 et t
$P(N_t \geq n) = P(T_n \leq t) = \int_0^t \varphi_{n,\lambda}(x)dx = \int_0^t \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x}dx$

c) N_t est à valeurs dans $\mathbb{N}$
$P(N_t = 0) = P(t < T_1) = 1 - P(U_1 \leq t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}$
$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(N_t = n) = P(N_t \geq n) - P(N_t \geq n+1) = \int_0^t \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x}dx - \int_0^t \dfrac{\lambda^{n+1}}{n!}x^n e^{-\lambda x}dx =$
$\left[\dfrac{\lambda^n}{n!}x^n e^{-\lambda x}\right]_0^t = \dfrac{(t\lambda)^n}{n!}e^{-\lambda t}$

$$\boxed{N_t \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda t)}$$

3. a) Si $N_t = n$, il y a alors $n$épreuves de Bernoulli indépendantes de probabilité de succés p (aller au terminus A). On compte alors le nombre de succès.
D'où la loi conditionnelle de A_t sachant $N_t = n$ est la loi binomiale de paramètres n et p (avec la convention que la loi $\mathcal{B}(0,p)$ est la loi certaine égale à 0)

$$\boxed{P(A_t = k/N_t = n) = \tbinom{n}{k}p^k q^{n-k} \quad \text{avec } q = 1-p}$$

b) A_t est à valeurs dans $\mathbb{N}$
$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(A_t = k) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_t = k/N_t = n)\, P(N_t = n)$ par la formule des probabilités totales avec le SCE $(N_t = n)_{n \in N}$
$P(A_t = k) = \sum_{n=k}^{\infty} \tbinom{n}{k}p^k q^{n-k}\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t} = \dfrac{p^k}{k!}e^{-\lambda t}\sum_{n=k}^{\infty}\dfrac{q^{n-k}(\lambda t)^n}{(n-k)!} = \dfrac{(p\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(q\lambda t)^n}{n!}$
en posant le changement d'indice : $n' = n - k$
On reconnaît une série exponentielle : $P(A_t = k) = \dfrac{(p\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}e^{-\lambda q t} = \dfrac{(p\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda p t}$

$$\boxed{A_t \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p t)}$$

Remarque : on peut montrer que $B_t \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda q t)$ et que A_t et B_t sont indépendantes

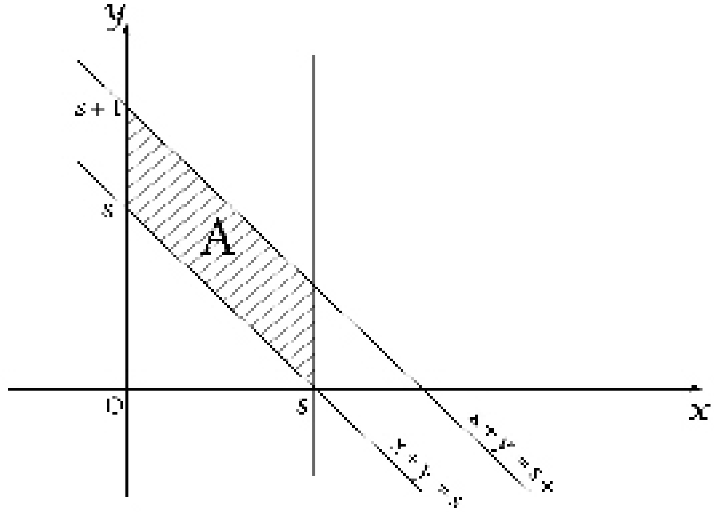
C. Absence de mémoire

1. a) i. $N_b - N_a$ est égale au nombre de bus qui sont passés dans l'intervalle de temps $]a,b]$
D'où $N_{t+s} - N_s$ est égale au nombre de bus qui sont passées dans l'intervalle de temps $]s, s+t]$

$$\boxed{M_t = N_{t+s} - N_s}$$

ii. $T_1' \leq t$ ssi il passe au moins un bus dans l'intervalle de temps $]s, s+t]$
$(N_s = n)_{n \in N}$ étant un SCE,$(T_1' \leq t) = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \left[(T_1' \leq t) \cap (N_s = n)\right]$
Pour $n \geq 1, (T_1' \leq t) \cap (N_s = n) =$ "le n-ième bus est passé avant s et il est passé un autre entre s et $s+t$"$=(T_n \leq s) \cap (s < T_{n+1} \leq s+t)$
Pour $n = 0$, $(T_1' \leq t) \cap (N_s = 0) = (s < T_1 \leq s+t) = (T_0 \leq s) \cap (s < T_1 \leq s+t)$ car $T_0 = 0$

$$\boxed{(T_1' \leq t) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[(T_n \leq s) \cap (s < T_{n+1} \leq s+t)\right]}$$



iii. T_n est fonction de U_1,..,U_n et U_1,..,U_n,U_{n+1} sont mutuellement indépendantes, d'où T_n et U_{n+1} sont indépendantes
On peut alors définir une densité du couple (T_n, U_{n+1}) par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f_{T_n,U_{n+1}}(x,y) = f_{T_n}(x) f_{U_{n+1}}(y)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f_{T_n,U_{n+1}}(x,y) = \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y}, \quad \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \\ f_{T_n,U_{n+1}}(x,y) = 0 \text{ sinon} \end{array}}$$

$P\left[(T_n \le s) \cap (s < T_{n+1} \le s+t)\right] = P\left[(T_n \le s) \cap (s < T_n + U_{n+1} \le s+t)\right] = \displaystyle\iint_A f_{T_n,U_{n+1}}(x,y) dxdy$

avec $A = \left\{ (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2, x \le s \text{ et } s < x + y \le s+t \right\}$

i. $P\left[(T_n \le s) \cap (s < T_{n+1} \le s+t)\right] = \int_0^s \left[\int_{s-x}^{s+t-x} f_{T_n,U_{n+1}}(x,y) dy \right] dx$
$P\left[(T_n \le s) \cap (s < T_{n+1} \le s+t)\right] = \int_0^s \left[\dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} \int_{s-x}^{s+t-x} \lambda e^{-\lambda y} dy \right] dx$
$P\left[(T_n \le s) \cap (s < T_{n+1} \le s+t)\right] = \int_0^s \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} \left[-e^{-\lambda y} \right]_{s-x}^{s+t-x} dx$
$P\left[(T_n \le s) \cap (s < T_{n+1} \le s+t)\right] = \left(e^{-\lambda s} - e^{-\lambda(s+t)} \right) \int_0^s \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} dx = \dfrac{\lambda^n s^n}{n!} e^{-\lambda s} \left(1 - e^{-\lambda t}\right)$

$$\boxed{P\left[(T_n \le s) \cap (s < T_{n+1} \le s+t)\right] = \frac{\lambda^n s^n}{n!} e^{-\lambda s} \left(1 - e^{-\lambda t}\right)}$$

b) Par union dénombrable d'événements 2 à 2 incompatibles :
$P\left(T_1' \le t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P\left[(T_n \le s) \cap (s < T_{n+1} \le s+t)\right] = \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^n s^n}{n!} e^{-\lambda s} = 1 - e^{-\lambda t}$ car on reconnaît la loi de Poisson de paramètre λs
T_1' est une variable à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$
$\forall t \le 0, \quad P\left(T_1' \le t\right) = 0$
$\forall t > 0, \quad P\left(T_1' \le t\right) = 1 - e^{-\lambda t}$
On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ

$$\boxed{T_1' \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)}$$

c) M_t a même loi que N_t : cete propriété est appelée absence de mémoire, car on "oublie" tout ce qui s'est passé avant l'instant s, on repart à zéro

2. a) T_{Nt} est l'heure de passage du dernier bus passé avant l'instant t (avec la convention , si $N_t = 0, T_0 = 0$)
D'où $s - T_{Ns}$ est égal au temps écoulé entre le dernier passage de bus avant l'instant s et l'arrivée de l'employé à l'instant s

$$\boxed{\Delta = s - T_{Ns}}$$

b) $(\Delta = s) = (N_s = 0)$
Δ est à valeurs dans $[0, s]$ d'où $P(\Delta \leq s) = 1$

c) $P(\Delta = s) = P(N_s = 0) = e^{-\lambda s}$ car N_s suit $\mathcal{P}(\lambda s)$
Δ n'est pas une variable à densité puisque $P(\Delta = s) \neq 0$
Ce n'est pas non plus une variable discrète puisque son univers image n'est pas dénombrable

d) Soit $0 < t < s$
$N_s - N_{s-t} \geq 1$ **ssi** au moins un bus passe entre les instants $s - t$ et s **ssi** le dernier bus avant s est passé aprés $s - t$ ssi $\Delta < s - (s - t)$

$$\boxed{(N_s - N_{s-t} \geq 1) = (\Delta < t)}$$

$N_s - N_{s-t}$ a même loi que M_t qui suit la loi $\mathcal{P}(\lambda t)$
$P(\Delta < t) = P(M_t \geq 1) = 1 - P(M_t = 0) = 1 - e^{-\lambda t}$
$P(\Delta < t) \leq P(\Delta \leq t) \leq P(\Delta < t + h)$ avec $h > 0$
Soit $h > 0$ tel que $t + h < s$ (c'est possible car $t < s$) : $1 - e^{-\lambda t} \leq P(\Delta \leq t) \leq 1 - e^{-\lambda(t+h)}$
Par le thm des gendarmes, en faisant tendre h vers 0+, on obtient $P(\Delta \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} = P(\Delta < t)$

$$\boxed{P(\Delta = t) = P(\Delta \leq t) - P(\Delta < t) = 0}$$

e) $\forall t \leq 0, \quad F(t) = 0$
$\forall t \in]0, s[, \quad F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$
$\forall t \geq s, \quad F(t) = 1$
F est continue sur $\mathbb{R} \backslash \{s\}$, dérivable sur $\mathbb{R} \backslash \{0, s\}$
$\forall t \in]0, s[, \quad F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$; on peut prolonger par continuité en 0 et s par :

$$\boxed{\forall t \in [0, s], \quad g(t) = \lambda e^{-\lambda t}}$$

f) $E(\Delta) = \int_0^s tg(t)dt + sP(\Delta = s) = \int_0^s t\lambda e^{-\lambda t}dt + se^{-\lambda s} = \left[-te^{-\lambda t}\right]_0^s + \int_0^s e^{-\lambda t}dt + se^{-\lambda s} = \dfrac{1 - e^{-\lambda s}}{\lambda}$

$$\boxed{E(\Delta) = \frac{1 - e^{-\lambda s}}{\lambda}}$$

g) $E(\Delta) + E(U_1') = \dfrac{1 - e^{-\lambda s}}{\lambda} + \dfrac{1}{\lambda}$ car $U_1' \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$
$E(\Delta) + E(U_1') = \dfrac{2 - e^{-\lambda s}}{\lambda}$ et $E(U_n) = \dfrac{1}{\lambda}$

$$\boxed{E(\Delta) + E(U_1') > E(U_n)}$$

Ceci est paradoxal, car $\Delta + U_1'$ est égal au temps qui s'écoule entre le passage du dernier bus avant s et du premier bus aprés s., donc entre 2 bus consécutifs mais de part et d'autre de s.
On s'attendrait à ce qu'en moyenne, on ait une attente égale à celle entre 2 bus consécutifs.