Corrigé Epreuve B Agro Véto 2009

Partie I

1. G est le nombre d'essais nécessaires pour obtenir le premier succés (prise d'une greffe) lors d'une suite d'épreuve de Bernoulli indépendantes de probabilité de succés p.
   Donc G suit la loi géométrique de paramètre p

$$\boxed{G \hookrightarrow \mathcal{G}(p); \quad G(\Omega) = \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(G = n) = pq^{n-1}}$$

   D'après le cours:

$$\boxed{\mathbb{E}(G) = 1/p, \quad \mathbb{V}(G) = q/p^2}$$

2. a) D'après le I.1, X_k suit la loi $\mathcal{G}(p)$

   b) $X = \sum_{k=1}^{R} X_k$

   c) $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{R} \mathbb{E}(X_k) = R/p$ (par linéarité de l'espérance)
   Les variables X_k étant indépendantes, $\mathbb{V}(X) = \sum_{k=1}^{R} \mathbb{V}(X_k) = Rq/p^2$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 1/p, \quad \mathbb{V}(X) = Rq/p^2}$$

3. Loi de X
   a) L'ensemble des valeurs prises par X est $I = \mathbb{N} \backslash \{0, .., R-1\}$

   b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

      i. $\mathbb{P}(X_1 = x_1, .., X_R = x_R) = \prod\limits_{k=1}^{R} \mathbb{P}(X_k = x_k)$ en raison de l'indépendance des variables
      $\mathbb{P}(X_1 = x_1, .., X_R = x_R) = \prod\limits_{k=1}^{R} pq^{x_k - 1} = p^R q^{n-R}$

      ii. $(X = n) = \bigcup\limits_{(x_1,..,x_R) \in D} \{X_1 = x_1, .., X_R = x_R\}$ où $D = \left\{(x_1, .., x_R) \in (\mathbb{N}^*)^R, \quad x_1 + .. + x_R = n\right\}$
      On a une union d'événements incompatibles deux à deux :
      $\mathbb{P}(X = n) = \sum_{(x_1,..,x_R) \in D} \mathbb{P}(X_1 = x_1, .., X_R = x_R) = \sum_{(x_1,..,x_R) \in D} p^R q^{n-R} = \alpha(R, n) p^R q^{n-R}$
      où $\alpha(R, n)$ est le cardinal de D , le nombre de R-uplets solutions.

4. a) Un partage de S en R segments est défini par $0 < s_1 < s_2. < ... < s_{R-1} < n$; on obtient ainsi les segments non réduits à 1 point : $[0, s_1], [s_1, s_2], .., [s_{R-1}, n]$
   On définit l'application qui à un R-uplet de D, $(x_1, .., x_R)$, associe le partage tel que $s_1 = x_1, s_2 = x_1 + x_2, .., s_{R-1} = x_1 + x_2 + .. + x_{R-1}$
   On définit bien un partage car les x_i sont non nuls et $x_1 + x_2 + .. + x_{R-1} < n$
   Réciproquement, à tout partage, on définit un R-ulpet de D, x_i étant la longueur du $i$ème segment
   On définit donc bien une bijection de l'ensemble des solutions de (E) sur l'ensemble des partages de S

b) Un partage est défini de manière unique par la donnée de $R-1$ points distincts de $[1,..,n-1]$ (les s_i)

c) Il y a donc $\binom{n-1}{R-1}$ partages de S et donc le cardinal de D égal à $\alpha(R,n)$ est égal à $\binom{n-1}{R-1}$

$$\boxed{\forall n \geq R, \quad \mathbb{P}(X=n) = \binom{n-1}{R-1} p^R q^{n-R}}$$

Partie II

1. Soit $n \geq 1$

a) $\mathbb{P}(Y \leq n) = \mathbb{P}(X_1 \leq n, .., X_R \leq n) = \prod_{k=1}^{R} \mathbb{P}(X_k \leq n)$ en raison de l'indépendance des variables

$\mathbb{P}(X_k \leq n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = i) = \sum_{i=1}^{n} pq^{i-1} = p\dfrac{1-q^n}{1-q} = 1-q^n$

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}(Y \leq n) = (1-q^n)^R}$$

b) La formule ci-dessus est encore valable pour $n=0$, car $\mathbb{P}(Y \leq 0) = 0$, car Y est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$
$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(Y \leq n) - \mathbb{P}(Y \leq n-1)$

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}(Y = n) = (1-q^n)^R - \left(1-q^{n-1}\right)^R}$$

2. Z est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$

a) $u_n = \mathbb{P}(Z=n) = \mathbb{P}(Z > n-1) - \mathbb{P}(Z > n) = v_{n-1} - v_n$

b) $\sum_{n=1}^{N} nu_n = \sum_{n=1}^{N} n(v_{n-1} - v_n) = \sum_{n=0}^{N-1} (n+1) v_n - \sum_{n=1}^{N} nv_n$
$\sum_{n=1}^{N} nu_n = \sum_{n=0}^{N-1} (n+1) v_n - \sum_{n=0}^{N-1} nv_n - Nv_N$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} nu_n = \sum_{n=0}^{N-1} v_n - Nv_N}$$

Posons $T_N = \sum_{n=1}^{N} nu_n$ et $S_N = \sum_{n=0}^{N} v_n$
Si la série $\sum v_n$ converge, alors la suite (S_N) converge et elle est donc majorée.
Or d'après l'inégalité ci-dessus, $T_N \leq S_{N-1}$ car $Nv_N \geq 0$;d'où la suite (T_N) est majorée
D'autre part , la suite (T_N) est croissante car $T_{N+1} - T_N = (N+1)u_{N+1} \geq 0$
La suite (T_N) est croissante et majorée, elle est donc convergente;
Cela signifie que la série $\sum nu_n$ converge.

c) La série $\sum u_n$ converge (et sa somme vaut 1), $v_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n$
On suppose que la série $\sum nu_n$ converge.
$\forall n \geq N+1, \quad nu_n \geq Nu_n$ car $u_n \geq 0$
D'où $\sum_{n=N+1}^{\infty} nu_n \geq \sum_{n=N+1}^{\infty} Nu_n = Nv_N$
Le reste d'ordre N tend vers 0 , et comme $0 \leq Nv_N \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} nu_n$, par le thm des gendarmes, $\lim\limits_{N\to\infty} Nv_N = 0$

d) Si $\sum nu_n$ converge, alors $S_{N-1} = T_N + Nv_N$
La suite (T_N) converge ainsi que la suite (Nv_N)
D'où la suite (S_N) converge, cela signifie que la série $\sum v_n$ converge.
On a donc montré que si $\sum nu_n$ converge alors $\sum v_n$ converge et par le b) on a montré que si $\sum v_n$ converge alors $\sum nu_n$ converge

$$\boxed{Z \text{ admet une espérance si et seulement si } \sum v_n \text{converge}}$$

En cas de convergence, $\lim\limits_{N\to\infty} Nv_N = 0$, d'où $\lim\limits_{N\to\infty} S_{N-1} = \lim\limits_{N\to\infty} T_N$ et donc

$$\boxed{\mathbb{E}(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n}$$

3. $v_n = 1 - (1-q^n)^R$

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ d'où $(1-q^n)^R = 1 - Rq^n + o(q^n)$ (DL de $(1+x)^\alpha$); d'où

   $$\boxed{v_n \sim Rq^n}$$

   b) D'après le II.1, $\mathbb{P}(Y \le n) = (1-q^n)^R$, d'où $v_n = \mathbb{P}(Y > n)$
   A partir d'un certain rang, $0 \le v_n \le 2Rq^n$
   $\sum 2Rq^n$ converge, car série géométrique de raison $q \in]0,1[$
   Par le thm de comparaison des séries à termes positifs, $\sum v_n$ converge
   D'après le II.2, on en déduit que Y admet une espérance et

   $$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 - (1-q^n)^R}$$

   c) Pour $R = 2$
   $1 - (1-q^n)^2 = 2q^n - q^{2n}$
   $\mathbb{E}(Y) = 2\sum_{n=0}^{\infty} q^n - \sum_{n=0}^{\infty} (q^2)^n$ car les deux séries convergent
   $\mathbb{E}(Y) = 2\dfrac{1}{1-q} - \dfrac{1}{1-q^2} = \dfrac{2}{p} - \dfrac{1}{p(1+q)} = \dfrac{1+2q}{1-q^2}$

   $$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{1+2q}{1-q^2}}$$

4. $\forall x \ge 0, \quad f(x) = 1 - (1-q^x)^R = 1 - (1-e^{x\ln q})^R$
   a) $\forall x \ge 0, \quad f'(x) = R\ln q e^{x\ln q}(1-e^{x\ln q})^{R-1} \le 0$ car $\ln q < 0$
   f est décroissante sur $[0,+\infty[$

   b) $q^x \to 0$ quand $x \to +\infty$, d'où $(1-q^x)^R = 1 - Rq^x + \frac{R(R-1)}{2}q^{2x} + o\left(q^{2x}\right)$
   D'où $f(x) - Rq^x \sim -\frac{R(R-1)}{2}q^{2x}$ quand $x \to +\infty$

   c) Les deux équivalents sont de mêmes signes dans un voisinage de $+\infty$
   Donc il existe un réel $A > 0$, tel que $\forall x \ge A, \quad f(x) - Rq^x < 0$, d'où $f(x) < Rq^x$
   La fonction f est continue et positive sur $[0,+\infty[$
   $\forall x \ge A, \quad f(x) < Rq^x$
   $\displaystyle\int_A^X q^x dx = \left[\frac{e^{x\ln q}}{\ln q}\right]_A^X = \frac{e^{X\ln q} - e^{A\ln q}}{\ln q} \to \frac{-e^{A\ln q}}{\ln q}$ quand $X \to +\infty$
   D'où $\displaystyle\int_A^{+\infty} q^x dx$ converge
   Par le thm de comparaison des intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\displaystyle\int_A^{+\infty} f(x)dx$ converge

   $$\boxed{\int_0^{+\infty} f(x)dx \text{ converge}}$$

d) Si $x \geq 0$, $\sum_{k=0}^{R-1} q^x (1-q^x)^k = q^x \dfrac{1-(1-q^x)^R}{1-(1-q^x)} = f(x)$ (somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison $1-q^x \neq 1$

$$\boxed{\forall x \in [0,+\infty[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{R-1} q^x (1-q^x)^k}$$

$$\int_0^A q^x (1-q^x)^k \, dx = \int_0^A e^{x \ln q} \left(1-e^{x \ln q}\right)^k dx = \left[-\frac{\left(1-e^{x \ln q}\right)^{k+1}}{(k+1)\ln q}\right]_0^A = -\frac{\left(1-e^{A \ln q}\right)^{k+1}}{(k+1)\ln q} \to \frac{-1}{(k+1)\ln q}$$

quand $A \to +\infty$

D'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} q^x (1-q^x)^k \, dx = \frac{-1}{(k+1)\ln q}$

On retrouve alors que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge et

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{-1}{\ln q} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{(k+1)}}$$

5. Encadrement de $\mathbb{E}(Y)$

a) f étant décroissante sur $\mathbb{R}^+$, si $x \in [n, n+1]$, $\quad f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$

$$\boxed{v_{n+1} \leq f(x) \leq v_n}$$

b) On en déduit que $v_{n+1} \leq \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)dx \leq v_n$ par positivité de l'intégrale

Puis en sommant : $\displaystyle\int_0^{N+1} f(x)dx \leq \sum_{n=0}^{N} v_n$ par la relation de Chasles ;

$\sum_{n=0}^{N-1} v_{n+1} \leq \displaystyle\int_0^N f(x)dx$, d'où $\sum_{n=0}^{N} v_n \leq \displaystyle\int_0^N f(x)dx + v_N \leq \int_0^N f(x)dx + 1$

$$\boxed{\int_0^{N+1} f(x)dx \leq \sum_{n=0}^{N} v_n \leq \int_0^N f(x)dx + 1}$$

c) En faisant tendre N vers $+\infty$ dans les inégalités ci-dessus, puisque tous les termes convergent :

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \leq \int_0^{+\infty} f(x)dx + 1$$

$$\boxed{\frac{-1}{\ln q} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{(k+1)} \leq \mathbb{E}(Y) \leq \frac{-1}{\ln q} \sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{(k+1)} + 1}$$

6. a) Mêmes types de calculs qu'au II5

Si $x \in [k, k+1]$, $\quad \dfrac{1}{k+1} \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{k}$ d'où $\dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$

$$\int_1^{R+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=1}^{R} \frac{1}{k}$$

$\sum_{k=1}^{R-1} \dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_1^R \frac{1}{x} dx$, $\quad$ d'où $\sum_{k=2}^{R} \dfrac{1}{k} + 1 \leq \displaystyle\int_1^R \frac{1}{x} dx + 1$

$$\boxed{\int_1^{R+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=1}^{R} \frac{1}{k} \leq \int_1^R \frac{1}{x} dx + 1}$$

b) $\ln(R+1) \leq \sum_{k=1}^{R} \dfrac{1}{k} \leq \ln(R)+1$;pour $R \geq 2$, $\quad \dfrac{\ln(R+1)}{\ln(R)} \leq \dfrac{\sum_{k=1}^{R} \frac{1}{k}}{\ln(R)} \leq \dfrac{\ln(R)+1}{\ln(R)}$

$\dfrac{\ln(R+1)}{\ln(R)} - 1 = \dfrac{\ln(\frac{R+1}{R})}{\ln(R)} \to 0$ quand $R \to +\infty$

Par le thm des gendarmes, $\dfrac{\sum_{k=1}^{R} \frac{1}{k}}{\ln(R)} \to 1$ quand $R \to +\infty$

$\dfrac{-1}{\ln q} \dfrac{\sum_{k=1}^{R} \frac{1}{k}}{\ln(R)} \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{\ln(R)} \leq \dfrac{-1}{\ln q} \dfrac{\sum_{k=1}^{R} \frac{1}{k}}{\ln(R)} + \frac{1}{\ln(R)} \qquad \left(\dfrac{-1}{\ln q} > 0\right)$

Encore par le thm des gendarmes, $\frac{\mathbb{E}(Y)}{\ln(R)} \to \dfrac{-1}{\ln q}$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) \sim \dfrac{-\ln(R)}{\ln q} \text{ quand } R \to +\infty}$$

Partie III

1. Z_n est le nombre de de rosiers pour lesquels la greffe a pris pendant la $(n+1)$ième semaine

2. Y_1 est le nombre de greffes prises lors de la première semaine.
   C'est le nombre de succés lors de R épreuves de Bernouilli indépendantes de probabilité de succés p

$$\boxed{Y_1 \text{ suit la loi binomiale } B(R,p),\ \ \mathbb{E}(Y_1) = np, \quad \mathbb{V}(Y_1) = npq}$$

3. Y_n est à valeurs dans $\{0, .., R\}$

   a) $(Y_n = m)_{m=0,..,R}$ forme un système complet d'événements
   $\mathbb{P}((Y_{n+1} = l) = \sum_{m=0}^{R} \mathbb{P}((Y_{n+1} = l, Y_n = m) = \sum_{m=0}^{R} \mathbb{P}((Z_n + Y_n = l, Y_n = m) = \sum_{m=0}^{R} \mathbb{P}(Z_n = l-m, Y_n = m$
   Pour $l \in \{0, .., R\}$, $\mathbb{P}((Y_{n+1} = l) = \sum_{m=0}^{R} \mathbb{P}(Z_n = l - m / Y_n = m) \mathbb{P}(Y_n = m)$
   Si $l - m < 0, \mathbb{P}(Z_n = l - m / Y_n = m) = 0$

$$\boxed{\text{Pour } l \in \{0, .., R\},\ \mathbb{P}((Y_{n+1} = l) = \sum_{m=0}^{l} \mathbb{P}(Z_n = l - m / Y_n = m) \mathbb{P}(Y_n = m)}$$

   b) Si $Y_n = m$, a l'issue de la nième semaine, il reste $R - m$ rosiers non greffés. On retente une greffe sur ces rosiers, et on obtient à nouveau un shéma binomial

$$\boxed{\text{La loi conditionnelle de } Z_n \text{ sachant } Y_n = m \text{ est la loi binomiale } \mathcal{B}(R-m,p)}$$

4. a) $.l \in \{0, .., R\} : \mathbb{P}(Z_1 = l - m / Y_n = m) = \binom{R-m}{l-m} p^{l-m} q^{R-l}, \quad \mathbb{P}(Y_1 = m) = \binom{R}{m} p^m q^{R-m}$

$$\boxed{\forall l \in \{0, .., R\}, \quad \mathbb{P}((Y_2 = l) = \sum_{m=0}^{l} \binom{R-m}{l-m}\binom{R}{m} p^l q^{2R-l-m}}$$

   b) $0 \leq m \leq l \leq R$, $\binom{R-m}{l-m}\binom{R}{m} = \dfrac{(R-m)!}{(l-m)!\,(R-l)!} \dfrac{R!}{(R-m)!m!} = \dfrac{R!}{l!\,(R-l)!} \dfrac{l!}{(l-m)!m!} = \binom{R}{l}\binom{l}{m}$

   c) $\mathbb{P}((Y_2 = l) = \binom{R}{l} p^l q^{2R-2l} \sum_{m=0}^{l} \binom{l}{m} q^{l-m} 1^m$

d) Par la formule du binôme, $\mathbb{P}\left((Y_2 = l\right) = \binom{R}{l} p^l q^{2(R-l)} (1+q)^l$
$\forall l \in \{0, .., R\}\,, \quad \mathbb{P}\left((Y_2 = l\right) = \binom{R}{l} (p+pq)^l q^{2(R-l)}$
On vérifie que $p + pq + q^2 = p + q(p+q) = p + q = 1; p + pq = 1 - q^2$

$\boxed{Y_2 \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(R, 1-q^2)}$

5. Initialisation pour $n = 1$: on a montré que Y_1 suit la loi binomiale $B(R, 1-q)$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que Y_n suit la loi binomiale $B(R, 1-q^n)$
On applique la formule (*)
$\forall l \in \{0, .., R\}\,, \quad \mathbb{P}\left((Y_{n+1} = l\right) = \sum_{m=0}^{l} \mathbb{P}\left(Z_n = l - m / Y_n = m\right) \mathbb{P}\left(Y_n = m\right)$
$\mathbb{P}\left((Y_{n+1} = l\right) = \sum_{m=0}^{l} \binom{R-m}{l-m} p^{l-m} q^{R-l} \binom{R}{m} \left(1 - q^n\right)^m \left(q^n\right)^{R-m}$
$\mathbb{P}\left((Y_{n+1} = l\right) = \binom{R}{l} q^{R-l} \left(q^n\right)^{R-l} \sum_{m=0}^{l} \binom{l}{m} \left(1 - q^n\right)^m p^{l-m} \left(q^n\right)^{l-m}$
$\mathbb{P}\left((Y_{n+1} = l\right) = \binom{R}{l} q^{R-l} \left(q^n\right)^{R-l} \sum_{m=0}^{l} \binom{l}{m} \left(1 - q^n\right)^m \left(pq^n\right)^{l-m}$
$\mathbb{P}\left((Y_{n+1} = l\right) = \binom{R}{l} \left(q^{n+1}\right)^{R-l} \left(1 - q^n + pq^n\right)^l$ (binôme)
$q^{n+1} + 1 - q^n + pq^n = 1 - q^n + q^n\,(q+p) = 1$
On a donc montré que Y_{n+1} suit la loi binomiale $B(R, 1-q^{n+1})$

$\boxed{\text{Par principe de récurrence, pour tout } n \in \mathbb{N}^* \; Y_n \text{ suit la loi binomiale } B(R, 1-q^n)}$

Remarque: ce résultat peut se retrouver directement.
On numérote les rosiers, et on note T_i la variable aléatoire de Bernoulli qui vaut 1 si la greffe a pris sur le rosier i lors les n premières semaines.
$\mathbb{P}(T_i = 0) = \mathbb{P}(\text{les } n \text{ greffes ont raté}) = q^n$
T_i suit la loi de Bernouilli $\mathcal{B}(1-q^n)$
Or $Y_n = \sum_{i=1}^{R} T_i$, somme de R variables indépendantes suivant $\mathcal{B}(1-q^n)$
D'où Y_n suit $B(R, 1-q^n)$

6. Soit $k \in \{0, .., R\}\,, \mathbb{P}\left((Y_n = k\right) = \binom{R}{k} \left(1 - q^n\right)^k q^{n(R-k)}$
$q^n \to 0$ quand $n \to \infty$, d'où si $k \in \{0, .., R-1\}\,, \mathbb{P}\left((Y_n = k\right) \to 0$ et $\mathbb{P}\left((Y_n = R\right) \to 1$
Ce qui est assez logique!!

Fin

corrigé proposé par Martine Ginestet (UPA)
Si vous avez des remarques ou des corrections à apporter, me joindre, SVP par mail : martine-ginestet@orange.fr