Correction INA B 2007

La correction comporte 19 pages.

Première partie

1.

(a) Pour $x \in [0,1]$, l'événement $[Y_n \leq x]$ est réalisé si et seulement si pour tout i de $[|1,n|]$, les variables X_i sont inférieures ou égales à x. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\forall x \in [0,1], \quad \mathbf{P}([Y_n \leq x]) &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leq x]\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}([X_k \leq x]) \text{ par indépendance des variables } X_k \\
&= (\mathbf{P}([X_1 \leq x]))^n \text{ car toutes les variables suivent la même loi} \\
&= (F_{X_1}(x))^n \\
&= \left(\frac{x-0}{1-0}\right)^n \\
&= \boxed{x^n}
\end{aligned}$$

(b) Déterminons F_n la fonction de répartition de Y_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) = \mathbf{P}([Y_n \leq x])$$

Comme pour tout k de $[|1,n|]$, $X_k(\Omega) = [0,1]$ alors $Y_n(\Omega) = [0,1]$, ainsi :

$$\boxed{F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^n & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}} \tag{1}$$

A ce niveau nous constatons que :

- $\lim\limits_{-\infty} F_n = 0$,
- $\lim\limits_{+\infty} F_n = 1$,
- F_n est continue sur $\mathbb{R}$ car :
  - F_n est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ car elle y coïncide avec la fonction nulle ;
  - F_n est continue sur $[0,1]$ en tant que fonction monôme ;
  - F_n est continue sur $]1,+\infty[$ car elle y coïncicide avec la fonction constante égale à 1 ;
  - $\lim\limits_{0^-} F_n = \lim\limits_{0^+} F_n = 0 = F_n(0)$;
  - $\lim\limits_{1^-} F_n = \lim\limits_{1^+} F_n = 1 = F_n(1)$.
- F_n est au moins de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^* - \{1\}$ (coïncidence avec deux fonctions constantes et un monôme)
- Sur $\mathbb{R}^* - \{1\}$, $F_n' \geq 0$ donc F_n est croissante.

  Conclusion : selon ces cinq propriétés vérifiées par F_n, nous pouvons affirmer que :

  $$\boxed{Y_n \text{ est une variable à densité}}$$

  Par *dérivation* de F_n sur $\mathbb{R}^* - \{1\}$, nous obtenons f_n une densité de Y_n et nous poserons que $f_n(0) = f_n(1) = 0$ pour compléter la définition de cette densité pour qu'elle soit bien définie sur $\mathbb{R}$. Ce qui nous donne :

  $$\boxed{f_n(x) = \begin{cases} nx^{n-1} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

(c) Pour $x \in [0,1]$, l'événement $[Y_1 > x]$ est réalisé si et seulement si pour tout i de $[|1,n|]$, les variables X_i sont strictement supérieures à x pour tout i de $[|1,n|]$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\forall x \in [0,1], \ \mathbf{P}([Y_1 > x]) &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k > x]\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}([X_k > x]) \text{ par indépendance des variables } X_k \\
&= (\mathbf{P}([X_1 > x]))^n \text{ car toutes les variables suivent la même loi} \\
&= (1 - F_{X_1}(x))^n \\
&= \left(1 - \frac{x-0}{1-0}\right)^n \\
&= \boxed{(1-x)^n}
\end{aligned}$$

(d) Déterminons F_1 la fonction de répartition de Y_1 définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_1(x) = \mathbf{P}([Y_1 \leq x])$$

Comme pour tout k de $[|1,n|]$, $X_k(\Omega) = [0,1]$ alors $Y_1(\Omega) = [0,1]$, ainsi :

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathbf{P}([Y_1 > x]) & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \\
&= \boxed{\begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1-x)^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}}
\end{aligned}$$

A ce niveau nous constatons que :

- $\lim\limits_{-\infty} F_1 = 0$,
- $\lim\limits_{+\infty} F_1 = 1$,
- F_1 est continue sur $\mathbb{R}$ car :
  - F_1 est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ car elle y coïncide avec la fonction nulle ;
  - F_1 est continue sur $[0,1]$ en tant différence de telles fonctions (fonction constante et fonction polynôme) ;
  - F_1 est continue sur $]1,+\infty[$ car elle y coïncicide avec la fonction constante égale à 1 ;
  - $\lim\limits_{0^-} F_1 = \lim\limits_{0^+} F_1 = 0 = F_1(0)$;
  - $\lim\limits_{1^-} F_1 = \lim\limits_{1^+} F_1 = 1 = F_1(1)$.
- F_1 est au moins de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^* - \{1\}$ (coïncidence avec deux fonctions constantes et un polynôme)
- Sur $\mathbb{R}^* - \{1\}$, $F_1' \geq 0$ donc F_1 est croissante.
  Conclusion : selon ces cinq propriétés vérifiées par F_1, nous pouvons affirmer que :

  $$\boxed{Y_1 \text{ est une variable à densité}}$$

  Par *dérivation* de F_1 sur $\mathbb{R}^* - \{1\}$, nous obtenons f_1 une densité de Y_1 et nous poserons que $f_1(0) = f_1(1) = 0$ pour compléter la définition de cette densité pour qu'elle soit bien définie sur $\mathbb{R}$. Ce qui nous donne :

  $$\boxed{f_1(x) = \begin{cases} n(1-x)^{n-1} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

2.

(a) Après avoir vérifié que $Y_n(\Omega) = (1 - Y_1)(\Omega)$, pour montrer que Y_n et $1 - Y_1$ ont la même loi il nous suffit de comparer leur fonction de répartion pour voir si elles sont égales. Comme nous connaissons celle de Y_n partons uniquement à la recherche de celle de $1 - Y_1$ avec :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbf{P}([1 - Y_1 \leq x]) &= \mathbf{P}([Y_1 \geq 1 - x]) \\
&= 1 - F_1(1 - x) \\
&= \begin{cases} 1 - 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - 1 + (1 - (1 - x))^n & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 1 - 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^n & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \qquad (2)
\end{aligned}$$

Conclusion : selon (1) et (2) nous pouvons conclure que $F_n = 1 - F_1$ et donc :

$$\boxed{Y_n \text{ et } 1 - Y_1 \text{ ont la même loi}}$$

Comme les variables Y_1 et Y_n sont à support fini, elles admettent chacune une espérance et une variance et du fait qu'elles suivent la même loi, leurs moments sont égaux, avec par propriétés élémentaires de l'espérance et de la variance :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{E}(Y_n) = 1 - \mathbf{E}(Y_1) \\ \mathbf{V}(Y_n) = \mathbf{V}(Y_1) \end{array}} \qquad (3)$$

(b) Y_n admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} x f_n(x)\,dx$ est absolument convergente et en cas de convergence l'espérance est le nombre réel noté $\mathbf{E}(Y_n)$ défini par :

$$\mathbf{E}(Y_n) = \int_{\mathbb{R}} x f_n(x)\,dx$$

Or par la définition de f_n qui coïncide avec la fonction nulle en dehors de $[0,1]$, $\mathbf{E}(Y_n)$ existe si et seulement si $\displaystyle\int_0^1 x f_n(x)\,dx$ converge, avec :

$$\int_0^1 x f_n(x)\,dx = \int_0^1 n x^n dx$$

qui converge trivialement en tant qu'intégrale d'une fonction monôme continue sur le segment $[0,1]$.
Conclusion : Y_n admet une espérance égale à :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y_n) &= \int_0^1 n x^n dx \\
&= n\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\
&= \boxed{\frac{n}{n+1}} \\
\text{et } \mathbf{E}(Y_1) &= 1 - \mathbf{E}(Y_n) \\
&= 1 - \frac{n}{n+1} \\
&= \boxed{\frac{1}{n+1}} \qquad (4)
\end{aligned}$$

(c) Y_n admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre deux, soit si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} x^2 f_n(x)\,dx$ est convergente et en cas de convergence le moment d'ordre deux est le nombre réel noté $\mathbf{E}(Y_n^2)$ défini par :

$$\mathbf{E}(Y_n) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_n(x)\,dx$$

Or par la définition de f_n qui coïncide avec la fonction nulle en dehors de $[0,1]$, $\mathbf{E}\left(Y_n^2\right)$ existe si et seulement si $\int_0^1 x^2 f_n(x)\,dx$ converge. Or :

$$\int_0^1 x^2 f_n(x)\,dx = \int_0^1 n x^{n+1} dx$$

qui converge trivialement en tant qu'intégrale d'une fonction monôme continue sur le segment $[0,1]$.
Conclusion : Y_n admet un moment d'ordre deux égal et donc une variance respectivement égales à :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(Y_n^2\right) &= \int_0^1 n x^{n+1} dx \\
&= n\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 \\
&= \frac{n}{n+2} \\
\text{et } \mathbf{V}(Y_n) &= \mathbf{E}\left(Y_n^2\right) - \left(\mathbf{E}(Y_n)\right)^2 \text{ selon le \textit{théorème de Huygens-Koenig}} \\
&= \frac{n}{n+2} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \\
&= \boxed{\frac{n}{(n+1)^2 (n+2)}}
\end{aligned}$$

Selon (3) :

$$\boxed{\mathbf{V}(Y_1) = \frac{n}{(n+1)^2 (n+2)}}$$

3.

(a) C'est une question de cours très classique, comme les variables U_i sont des bernoulliennes indépendantes et de même paramètre x, alors :

$$\boxed{U \hookrightarrow \mathcal{B}(n,x)}$$

car pour tout $i \in [|1,n|]$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([U_i = 1]) &= \mathbf{P}([X_i \leq x]) \\
&= x
\end{aligned}$$

(b) Pour k fixé dans $[|1,n|]$ et pour x fixé dans $[0,1]$, l'événement $[Y_k \leq x]$ est réalisé si et seulement si le $k^{\text{ème}}$ client est venu au plus tard à l'instant x, ce qui équivaut à dire qu'il y au moins k électeurs qui sont venus voter entre les instants 0 et x. Autrement dit :

$$\boxed{[Y_k \leq x] = [U \geq k]}$$

Par conséquent $\forall k \in [|1,n|]$ fixé, $\forall x \in [0,1]$ fixé :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([Y_k \leq x]) &= \mathbf{P}([U \geq k]) \\
&= \sum_{j=k}^{n} \mathbf{P}([U = j]) \\
&= \boxed{\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j}}
\end{aligned}$$

4.

(a) Pour tout x dans $[0,1]$ et tout entier k compris entre 2 et $n-1$:

$$\begin{aligned}
F_{n-k+1}(1-x) &= \mathbf{P}\left([Y_{n-k+1} \leq 1-x]\right) \\
&= \sum_{j=n-k+1}^{n} \binom{n}{j} (1-x)^j x^{n-j} \\
&= \sum_{l=0}^{k-1} \binom{n}{n-l} x^l (1-x)^{n-l} \text{ en posant } l = n-j \\
&= \sum_{l=0}^{k-1} \binom{n}{l} x^l (1-x)^{n-l} \text{ par propriété des coefficients binomiaux} \\
&= \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} x^l (1-x)^{n-l} - \sum_{l=k}^{n} \binom{n}{l} x^l (1-x)^{n-l} \\
&= 1 - \sum_{l=k}^{n} \binom{n}{l} x^l (1-x)^{n-l} \\
&= 1 - \mathbf{P}\left([Y_k \leq x]\right) \\
&= 1 - F_k(x)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ dans } [0,1] \text{ et tout entier } k \text{ compris entre 2 et } n-1, \quad F_k(x) = 1 - F_{n-k+1}(1-x)}$$

Par dérivation membre à membre dans $[0,1]$, nous obtenons :

$$F'_k(x) = F'_{n-k+1}(1-x)$$

soit :

$$\boxed{\forall x \in [0,1], \quad f_k(x) = f_{n-k+1}(1-x)}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\forall k \in [|2, n-1|], \quad \mathbf{E}(Y_k) &= \int_{\mathbb{R}} x f_k(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} x f_{n-k+1}(1-x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} (1-u) f_{n-k+1}(u)\, du \\
&\quad \text{en posant le changement affine donc licite } u = 1-x \Longrightarrow du = -dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f_{n-k+1}(u)\, du - \int_{\mathbb{R}} u f_{n-k+1}(u)\, du \\
&= 1 - \mathbf{E}(Y_{n-k+1})
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall k \in [|2, n-1|], \quad \mathbf{E}(Y_k) = 1 - \mathbf{E}(Y_{n-k+1})}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\forall k \in [|2, n-1|], \quad \mathbf{E}\left(Y_k^2\right) &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f_k(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} x^2 f_{n-k+1}(1-x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} (1-u)^2 f_{n-k+1}(u)\, du \\
&\quad \text{en posant le même changement donc licite } u = 1-x \Longrightarrow du = -dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(u^2 - 2u + 1\right) f_{n-k+1}(u)\, du \\
&= \int_{\mathbb{R}} u^2 f_{n-k+1}(u)\, du - 2\int_{\mathbb{R}} u f_{n-k+1}(u)\, du + \int_{\mathbb{R}} f_{n-k+1}(u)\, du \\
&= \mathbf{E}\left(Y_{n-k+1}^2\right) - 2\mathbf{E}(Y_{n-k+1}) + 1
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(Y_k) &= \mathbf{E}\left(Y_k^2\right) - \left(\mathbf{E}(Y_k)\right)^2 \\
&= \left(\mathbf{E}\left(Y_{n-k+1}^2\right) - 2\mathbf{E}(Y_{n-k+1}) + 1\right) - \left(1 - \mathbf{E}(Y_{n-k+1})\right)^2 \\
&= \mathbf{E}\left(Y_{n-k+1}^2\right) - 2\mathbf{E}(Y_{n-k+1}) + 1 - \left(1 - 2\mathbf{E}(Y_{n-k+1}) + \left(\mathbf{E}(Y_{n-k+1})\right)^2\right) \\
&= \mathbf{E}\left(Y_{n-k+1}^2\right) - \left(\mathbf{E}(Y_{n-k+1})\right)^2 \\
&= \mathbf{V}(Y_{n-k+1})
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall k \in [|2, n-1|], \quad \mathbf{V}(Y_k) = \mathbf{V}(Y_{n-k+1})}$$

(b) Pour tout entier k compris entre 1 et n, nous avons, par définition de f_n nulle en dehors du segment $[0,1]$:

$$\mathbf{E}(Y_k) = \int_0^1 x f_k(x)\, dx$$

Intégrons par parties en posant :

$$\begin{array}{lcl}
u(x) = x & \Longrightarrow & u'(x) = 1 \\
v(x) = F_k(x) - 1 & \Longleftarrow & v'(x) = f_k(x)
\end{array}$$

avec u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y_k) &= \left[x\left(F_k(x) - 1\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \left[F_k(x) - 1\right] dx \\
&= \left(F_k(1) - 1\right) - 0 - \int_0^1 \left[F_k(x) - 1\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[1 - F_k(x)\right] dx \text{ car } F_k(1) = 1 \text{ du fait que } X_k(\Omega) = [0,1]
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall k \in [|1, n|], \quad \mathbf{E}(Y_k) = \int_0^1 \left[1 - F_k(x)\right] dx}$$

Par conséquent $\forall k \in [|1, n-1|]$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y_{k+1}) - \mathbf{E}(Y_k) &= \int_0^1 \left[1 - F_{k+1}(x)\right] dx - \int_0^1 \left[1 - F_k(x)\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[F_k(x) - F_{k+1}(x)\right] \\
&= \int_0^1 \left[\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} - \sum_{j=k+1}^{n} \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j}\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{j=k+1}^{n} \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} - \sum_{j=k+1}^{n} \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j}\right] dx \\
&= \int_0^1 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\, dx \text{ par simplification} \\
&= \binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\, dx
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall k \in [|1, n-1|], \quad \mathbf{E}(Y_{k+1}) - \mathbf{E}(Y_k) = \binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\, dx} \qquad (5)$$

(c) Pour tout entier naturel k compris entre 0 et $n-1$:

$$I_k(n) = \binom{n}{k}\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\,dx$$

Intégrons par parties en posant :

$$\begin{array}{lcl} u(x) = (1-x)^{n-k} & \Longrightarrow & u'(x) = -(n-k)(1-x)^{n-k-1} \\ v(x) = \dfrac{x^{k+1}}{k+1} & \Longleftarrow & v'(x) = x^k \end{array}$$

avec u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Ainsi :

$$\begin{aligned} I_k(n) &= \binom{n}{k}\left(\left[\left(\frac{x^{k+1}}{k+1}\right)(1-x)^{n-k}\right]_0^1 + \int_0^1 \left(\frac{x^{k+1}}{k+1}\right)(n-k)(1-x)^{n-k-1}\,dx\right) \\ &= \left(\frac{n-k}{k+1}\right)\binom{n}{k}\int_0^1 x^{k+1}(1-x)^{n-k-1}\,dx \\ &= \left(\frac{n-k}{k+1}\right)\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\int_0^1 x^{k+1}(1-x)^{n-k-1}\,dx \\ &= \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}\int_0^1 x^{k+1}(1-x)^{n-k-1}\,dx \\ &= \binom{n}{k+1}\int_0^1 x^{k+1}(1-x)^{n-k-1}\,dx \\ &= I_{k+1}(n) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\forall k \in [|0, n-1|]\,,\quad I_{k+1}(n) = I_k(n)$$

Ainsi la suite finie $(I_k(n))_{k\in[|0,n|]}$ est constante égale à $I_0(n) = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^n\,dx$ avec :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-x)^n\,dx &= \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall k \in [|0, n|]\,,\quad I_k(n) = \frac{1}{n+1}}$$

(d) Selon (5) :

$$\begin{aligned} \forall i \in [|1, k-1|]\,,\qquad \mathbf{E}(Y_{i+1}) - \mathbf{E}(Y_i) &= I_i(n) \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Alors par sommation membre à membre sur i allant de 1 à $k-1$, cela donne :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1}\left(\mathbf{E}(Y_{i+1}) - \mathbf{E}(Y_i)\right) &= \sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{n+1} \\ \text{soit } \mathbf{E}(Y_k) - \mathbf{E}(Y_1) &= \frac{k-1}{n+1} \text{ par télescopage} \\ \text{et } \mathbf{E}(Y_k) &= \frac{k-1}{n+1} + \mathbf{E}(Y_1) \\ &= \frac{k-1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \text{ selon } () \\ &= \frac{k}{n+1} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall k \in [|1, n|]\,,\quad \mathbf{E}(Y_k) = \frac{k}{n+1}}$$

Deuxième partie

1.

(a) Comme dans la première partie nous avons :

$$\forall x \geq 0, \quad [Y_n \leq x] = \bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leq x]$$

et par indépendance des variables X_k :

$$\begin{aligned}
\forall x \geq 0,\ \mathbf{P}([Y_n \leq x]) &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leq x]\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}([X_k \leq x]) \\
&= (\mathbf{P}([X_1 \leq x]))^n \text{ du fait que les variables } X_k \text{ suivent la même loi} \\
&= (F_{X_1}(x))^n \\
&= \boxed{(1 - e^{-x})^n}
\end{aligned}$$

(b) Comme $Y_n(\Omega) = \mathbb{R}_+$, puisque $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ avec $\forall k \in [|1, n|]$, $X_k(\Omega) = \mathbb{R}_+$, alors nous avons :

$$\boxed{F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ (1 - e^{-x})^n & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}}$$

A ce niveau nous constatons que :

- $\lim\limits_{-\infty} F_n = 0$,
- $\lim\limits_{+\infty} F_n = 1$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$,
- F_n est continue sur $\mathbb{R}$ car :
  - F_n est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ car elle y coïncide avec la fonction nulle ;
  - F_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ en fonction composée ;
  - $\lim\limits_{0^-} F_n = \lim\limits_{0^+} F_n = 0 = F_n(0)$.
- F_n est au moins de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^* - \{1\}$ (coïncidence avec la fonction nulle et une fonction composée)
- Sur $\mathbb{R}^* - \{1\}$, $F_n' \geq 0$ donc F_n est croissante car :
  - $\forall x < 0$, $F_n'(x) = 0 \geq 0$;
  - $\forall x \geq 0$, $F_n'(x) = ne^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1} > 0$.

  Conclusion : selon ces cinq propriétés vérifiées par F_n, nous pouvons affirmer que :

  $$\boxed{Y_n \text{ est une variable à densité}}$$

  Par *dérivation* de F_n sur $\mathbb{R}^*$, nous obtenons f_n une densité de Y_n et nous poserons que $f_n(0) = 0$ pour compléter la définition de cette densité pour qu'elle soit bien définie sur $\mathbb{R}$. Ce qui nous donne :

  $$\boxed{f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ ne^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}}$$

(c) Comme dans la partie I, pour $x \in \mathbb{R}_+$, l'événement $[Y_1 > x]$ est réalisé si et seulement si pour tout i de $[|1,n|]$, les variables X_i sont strictement supérieures à x pour tout i de $[|1,n|]$. Ainsi:

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \mathbf{P}([Y_1 > x]) &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k > x]\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}([X_k > x]) \text{ par indépendance des variables } X_k \\
&= (\mathbf{P}([X_1 > x]))^n \text{ car toutes les variables suivent la mêma loi} \\
&= \left(e^{-x}\right)^n \\
&= e^{-nx}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-nx} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$$

Nous pourrions suivre les consignes de l'énoncé demandant de démontrer que Y_1 est une variable à densité (à partir des propriétés de F_1) puis de posséder par dérivation, mais nous pouvons aussi dire que que nous reconnaissant en F_1 la fonction de répartition d'une variable exponentielle de paramètre n ce qui répond aussi aux questions posées.

Conclusion :

$$\boxed{Y_1 \hookrightarrow \varepsilon(n)}$$

avec :

$$\boxed{\mathbf{E}(Y_1) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(Y_1) = \frac{1}{n^2}}$$

2.

(a) Comme la fonction $x \longmapsto xe^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme produit et composée de telles fonctions, l'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}\,dx$ présence une impropreté en $+\infty$. Comme

$$\begin{aligned}
xe^{-x}\left(1-e^{-x}\right)^{n-1} &= xe^{-x}\exp\left[(n-1)\ln\left(1-e^{-x}\right)\right] \\
&\underset{+\infty}{\sim} xe^{-x}
\end{aligned}$$

puisque :

$$(n-1)\ln\left(1-e^{-x}\right) \underset{+\infty}{\sim} -(n-1)e^{-x}$$

avec $\lim_{x\to+\infty} -(n-1)e^{-x} = 0$ donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \exp\left[(n-1)\ln\left(1-e^{-x}\right)\right] = 1 \neq 0$$

Enfin comme :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \times xe^{-x} = 0$$

alors :

$$xe^{-x} = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

avec $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ convergente en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre $2 > 1$. Le critère de négligeabilité appliqué aux fonctions positives, permet d'affirmer que $\int_1^{+\infty} xe^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}\,dx$ converge aussi. La continuité sur $[0,1]$ de l'intégrande assurant la convergence de $\int_0^1 xe^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}\,dx$, nous pouvons conclure que :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} xe^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}\,dx \text{ est convergente}}$$

Du fait de la définition de f_n, nulle en dehors de $\mathbb{R}_+$, la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\left(1-e^{-x}\right)^{n-1}dx$ assure l'existence de l'espérance de Y_n.

(b) Par la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(Y_n\right) &= \int_0^{+\infty} nxe^{-x}\left(1-e^{-x}\right)^{n-1}dx \\
&= \int_0^{+\infty} nxe^{-x}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(-e^{-x}\right)^k dx \\
&= \lim_{a\to+\infty}\int_0^a nxe^{-x}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(-e^{-x}\right)^k dx \text{ par convergence de l'intégrale} \\
&= \lim_{a\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k}\int_0^a xe^{-x}\left(-e^{-x}\right)^k dx \\
&= \lim_{a\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k}\int_0^a (-1)^k xe^{-x}\left(e^{-x}\right)^k dx \\
&= \lim_{a\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k n\binom{n-1}{k}\int_0^a xe^{-(k+1)x}dx \\
&= \lim_{a\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k n\binom{n-1}{k}\left(\left[-\frac{xe^{-(k+1)x}}{k+1}\right]_0^a+\int_0^a\frac{e^{-(k+1)x}}{k+1}dx\right) \\
&\quad \text{en intégrant par parties} \\
&= \lim_{a\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k n\binom{n-1}{k}\left(-\frac{ae^{-(k+1)a}}{k+1}+\left[-\frac{e^{-(k+1)x}}{(k+1)^2}\right]_0^a\right) \\
&= \lim_{a\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k n\binom{n-1}{k}\left(-\frac{ae^{-(k+1)a}}{k+1}-\frac{e^{-(k+1)a}}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\lim_{a\to+\infty} (-1)^k n\binom{n-1}{k}\left(-\frac{ae^{-(k+1)a}}{k+1}-\frac{e^{-(k+1)a}}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\right) \\
&\quad \text{selon l'algèbre des limites} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k n\binom{n-1}{k}\frac{1}{(k+1)^2} \qquad (6) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k+1}\frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

car par propriétés :

$$\forall k\in[|0,n-1|],\quad \frac{1}{k+1}\binom{n}{k+1}=\frac{1}{k+1}\frac{n}{k+1}\binom{n-1}{k}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}\left(Y_n\right)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k+1}\frac{1}{k+1}}$$

(c) Pour tout couple d'entiers naturels (j,k) de $([|1,n-1|])^2$ tels que $j \leq k-1$:

$$\begin{aligned} j\binom{k}{j} + k\binom{k-1}{j} &= j\frac{k!}{j!\,(k-j)!} + k\frac{(k-1)!}{j!\,(k-j-1)!} \\ &= j\frac{k!}{j!\,(k-j)!} + \frac{k!}{j!\,(k-j-1)!} \\ &= \frac{k!\,(j+k-j)}{j!\,(k-j)!} \\ &= k\frac{k!}{j!\,(k-j)!} \\ &= k\binom{k}{j} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall\,(j,k) \in ([|1,n-1|])^2 \mid \quad j \leq k-1, \quad j\binom{k}{j} + k\binom{k-1}{j} = k\binom{k}{j}}$$

(d) Soit la suite $u = (u_k)_{k\geq 1}$ définie par $\forall k \geq 1,\ u_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k}{j+1}\frac{1}{j+1}$ alors :

$$\begin{aligned} \forall k \geq 2, \qquad u_k - u_{k-1} &= \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k}{j+1}\frac{1}{j+1} - \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^j \binom{k-1}{j+1}\frac{1}{j+1} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \frac{1}{j+1}\left(\binom{k}{j+1} - \binom{k-1}{j+1}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \frac{1}{j+1}\frac{j+1}{k}\binom{k}{j+1} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \frac{1}{k}\binom{k}{j+1} \\ &= \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k}{j+1} \\ &= -\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \\ &= \frac{1}{k}\left(\underbrace{-\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j}}_{=0} + \binom{k}{0}\right) \\ &= \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall k \geq 2, \quad u_k - u_{k-1} = \frac{1}{k}}$$

Enfin, par définition, $\mathbf{E}\,(Y_n) = u_n$ en sommant sur k, k variant de 2 à n, les deux membres de l'égalité précédente, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n}(u_k-u_{k-1}) &= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\\
\text{soit } u_n-u_1 &= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \text{ par télescopage}\\
\text{ou encore } u_n &= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}+u_1\\
&= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{j=0}^{0}(-1)^j\binom{0}{j+1}\frac{1}{j+1}\\
&= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}+1\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}(Y_n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$$

3.

(a) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on définit la proposition

$$\mathcal{P}_n : \text{"}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2 = 2\sum_{1\le i\le j\le n}a_ia_j-\sum_{i=1}^{n}a_i^2\text{"}$$

- L'initialisation est bien vérifiée car :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{1}a_i\right)^2 &= a_1^2\\
\text{et } 2\sum_{1\le i\le j\le 1}a_ia_j-\sum_{i=1}^{1}a_i^2 &= 2a_1^2-a_1^2\\
&= a_1^2
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- Supposons que pour n fixé dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ soit vraie.
- Nous avons :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n+1}a_i\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n}a_i+a_{n+1}\right)^2\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2+2a_{n+1}\sum_{i=1}^{n}a_i+a_{n+1}^2\\
&= 2\sum_{1\le i\le j\le n}a_ia_j-\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2a_{n+1}\sum_{i=1}^{n}a_i+a_{n+1}^2\\
&= 2\sum_{1\le i\le j\le n}a_ia_j-\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2a_{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}a_i-a_{n+1}^2\\
&= 2\sum_{1\le i\le j\le n+1}a_ia_j-\sum_{i=1}^{n+1}a_i^2
\end{aligned}$$

et donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Conclusion : ce raisonnement prouve par récurrence que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier n non nul. Ainsi :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = 2 \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_i a_j - \sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

(b) Soit la suite $v = (v_k)_{k \geq 1}$ définie par $\forall k \geq 1,\ v_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k}{j+1} \frac{1}{(j+1)^2}$. alors :

$$\begin{aligned}
\forall k \geq 2,\ v_k - v_{k-1} &= \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k}{j+1} \frac{1}{(j+1)^2} - \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^j \binom{k-1}{j+1} \frac{1}{(j+1)^2} \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \frac{1}{(j+1)^2} \left(\binom{k}{j+1} - \binom{k-1}{j+1}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \frac{1}{(j+1)^2} \frac{j+1}{k} \binom{k}{j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \frac{1}{k(j+1)} \binom{k}{j+1} \\
&= \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \frac{1}{j+1} \binom{k}{j+1} \\
&= \frac{1}{k} u_k
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall k \geq 2, \quad v_k - v_{k-1} = \frac{1}{k} u_k}$$

(c) Y_n admet un moment d'ordre deux si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} (1 - e^{-x})^{n-1}\, dx$ est convergente par définition de f_n nulle en dehors de $\mathbb{R}_+$. Comme la fonction $x \longmapsto x^2 e^{-x} (1 - e^{-x})^{n-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme produit et composée de telles fonctions, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} (1 - e^{-x})^{n-1}\, dx$ présence une impropreté en $+\infty$. Comme

$$\begin{aligned}
x^2 e^{-x} \left(1 - e^{-x}\right)^{n-1} &= x^2 e^{-x} \exp\left[(n-1) \ln\left(1 - e^{-x}\right)\right] \\
&\underset{+\infty}{\sim} x^2 e^{-x}
\end{aligned}$$

puisque $(n-1) \ln(1 - e^{-x}) \underset{+\infty}{\sim} -(n-1) e^{-x}$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} -(n-1) e^{-x} = 0$ donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \exp\left[(n-1) \ln\left(1 - e^{-x}\right)\right] = 1 \neq 0$$

Enfin comme :

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \times x^2 e^{-x} = 0$$

alors :

$$x^2 e^{-x} = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

avec $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ convergente en tant qu'intégrale de Riemann de paramètre $2 > 1$. Alors le critère de négligeabilité appliqué aux fonctions positives, permet d'affirmer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2 e^{-x} (1 - e^{-x})^{n-1}\, dx$

converge aussi. La continuité sur $[0,1]$ de l'intégrande assurant la convergence de $\displaystyle\int_0^1 x^2e^{-x}\left(1-e^{-x}\right)^{n-1}dx$, nous pouvons conclure que :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}\left(1-e^{-x}\right)^{n-1}dx \text{ est convergente}}$$

Du fait de la définition de f_n, nulle en dehors de $\mathbb{R}_+$, la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}\left(1-e^{-x}\right)^{n-1}dx$ assure l'existence de l'espérance de Y_n^2.
Par la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(Y_n^2\right) &= \int_0^{+\infty} nx^2e^{-x}\left(1-e^{-x}\right)^{n-1}dx \\
&= \int_0^{+\infty} nx^2e^{-x}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(-e^{-x}\right)^k dx \\
&= \lim_{a\to+\infty}\int_0^a nx^2e^{-x}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(-e^{-x}\right)^k dx \\
&= \lim_{a\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k}\int_0^a x^2e^{-x}\left(-e^{-x}\right)^k dx \\
&= \lim_{a\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k}\int_0^a (-1)^k x^2e^{-x}\left(e^{-x}\right)^k dx \\
&= \lim_{a\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k n\binom{n-1}{k}\int_0^a x^2e^{-(k+1)x}dx \\
&= \lim_{a\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k n\binom{n-1}{k}\left(\left[-\frac{x^2e^{-(k+1)x}}{k+1}\right]_0^a+\int_0^a\frac{2xe^{-(k+1)x}}{k+1}dx\right) \text{ en intégrant par parties} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\lim_{a\to+\infty} (-1)^k n\binom{n-1}{k}\left(-\frac{a^2e^{-(k+1)a}}{k+1}+2\int_0^a\frac{xe^{-(k+1)x}}{k+1}dx\right) \text{ selon l'algèbre des limites} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k n\binom{n-1}{k}\frac{2}{(k+1)^3} \text{ selon (6)} \\
&= 2\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k+1}\frac{1}{(k+1)^2} \\
&= 2v_n
\end{aligned}$$

car par propriétés :

$$\forall k\in[|0,n-1|],\quad \frac{1}{(k+1)^2}\binom{n}{k+1}=\frac{1}{(k+1)^2}\frac{n}{k+1}\binom{n-1}{k}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}\left(Y_n^2\right)=2v_n}$$

Y_n admet une variance du fait que Y_n^2 admet une espérance avec selon le théorème de Huygens-Koenig :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(Y_n) &= \mathbf{E}\left(Y_n^2\right)-\left(\mathbf{E}(Y_n)\right)^2 \\
&= 2v_n-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)^2 \qquad (7)
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\forall n \geq 2, \quad \sum_{k=2}^{n} \frac{u_k}{k} = \sum_{k=2}^{n} (v_k - v_{k-1}) = v_n - v_1$$

d'où :

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=2}^{n} \frac{u_k}{k} + v_1 \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{u_k}{k} + 1 \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} \text{ car } u_1 = 1 \end{aligned} \tag{8}$$

Arrêtons-nous quelques instants sur le calcul de u_k pour $k \in [|1,n|]$. Selon la question **2.d** savons que pour tout $i \in [|2,k|]$, $u_i = u_{i-1} + \dfrac{1}{i}$. Alors par sommation sur i allant de 2 à k nous obtenons :

$$u_k = u_1 + \sum_{i=2}^{k} \frac{1}{i}$$

soit comme $u_1 = \sum_{j=0}^{0} (-1)^j \binom{1}{j+1} \frac{1}{j+1} = 1$:

$$u_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \tag{9}$$

par conséquent selon (7), (8) et (9) :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(Y_n) &= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)^2 \\ &= 2 \sum_{1 \leq i \leq k \leq n} \frac{1}{ik} - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)^2 \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)^2 \text{ selon la question } \mathbf{3.a} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad \mathbf{V}(Y_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}$$

Troisième partie

1.

(a) L'événement $[Y_k \leq x]$ est réalisé si et seulement si au moins k variables X_i, qu'il faut choisir, ont une réalisation inférieure ou égale à x. Si on introduit N la variable aléatoire comptant le nombre de variables X_i ayant une réalisation inférieure ou égale à x, il est clair que N suit la loi binomiale de paramètres n et $\mathbf{P}([X_i \leq x]) = F(x)$ et

$$\forall k \in [|1,n|], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad [Y_k \leq x] = \biguplus_{j=k}^{n} [N = j]$$

Alors :

$$\forall k \in [|1,n|]\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathbf{P}\left([Y_k \leq x]\right) = \mathbf{P}\left(\biguplus_{j=k}^{n} [N=j]\right) = \sum_{j=k}^{n} \mathbf{P}\left([N=j]\right)$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall k \in [|1,n|]\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{P}\left([Y_k \leq x]\right) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \left(F(x)\right)^j \left(1-F(x)\right)^{n-j}}$$

(b) Par définition pour tout $k \in [|1,n|]$, F_k est définie sur $\mathbb{R}$ par $F_k(x) = \mathbf{P}([Y_k \leq x])$, ainsi :

$$\boxed{\forall k \in [|1,n|]\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_k(x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \left(F(x)\right)^j \left(1-F(x)\right)^{n-j}}$$

Pour tout $k \in [|1,n|]$, F_k est continue partout et de classe $\mathcal{C}^1$ presque partout, donc pour tout $k \in [|1,n|]$, Y_k est à densité de densité f_k obtenue par dérivation de F_k là où celle-ci est dérivable et en complétant la définition de f_k, le cas échéant, en donnant aux points x_i posant des problèmes de dérivabilité une valeur $f(x_i)$ arbitraire et positive. Pour tout $k \in [|1,n|]$ et en tout point x où F est dérivable :

$$\begin{aligned}
f_k(x) &= F_k'(x) \\
&= \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \Big(j \left(F(x)\right)^{j-1} F'(x) \left(1-F(x)\right)^{n-j} - (n-j) \left(F(x)\right)^j \left(1-F(x)\right)^{n-j-1} F'(x) \Big) \\
&= \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \Big(j \left(F(x)\right)^{j-1} \left(1-F(x)\right)^{n-j} f(x) - (n-j) \left(F(x)\right)^j \left(1-F(x)\right)^{n-j-1} f(x) \Big) \\
&= f(x) \left(\sum_{j=k}^{n} j \binom{n}{j} \left(F(x)\right)^{j-1} \left(1-F(x)\right)^{n-j} - \sum_{j=k}^{n} (n-j) \binom{n}{j} \left(F(x)\right)^j \left(1-F(x)\right)^{n-j-1} \right) \\
&= f(x) \sum_{j=k}^{n} n \binom{n-1}{j-1} \left(F(x)\right)^{j-1} \left(1-F(x)\right)^{n-j} \\
&\qquad - f(x) \sum_{j=k}^{n} (n-j) \binom{n}{n-j} \left(F(x)\right)^j \left(1-F(x)\right)^{n-j-1} \\
&= f(x) \sum_{j=k}^{n} n \binom{n-1}{j-1} \left(F(x)\right)^{j-1} \left(1-F(x)\right)^{n-j} \\
&\qquad - f(x) \sum_{j=k}^{n} n \binom{n-1}{n-j-1} \left(F(x)\right)^j \left(1-F(x)\right)^{n-j-1} \\
&= nf(x) \left(\sum_{j=k}^{n} \binom{n-1}{j-1} \left(F(x)\right)^{j-1} \left(1-F(x)\right)^{n-j} - \sum_{j=k}^{n} \binom{n-1}{j} \left(F(x)\right)^j \left(1-F(x)\right)^{n-(j+1)} \right) \\
&= nf(x) \left(\binom{n-1}{k-1} \left(F(x)\right)^{k-1} \left(1-F(x)\right)^{n-k} - \binom{n-1}{n} \left(F(x)\right)^n \left(1-F(x)\right)^{n-(n+1)} \right) \\
&= nf(x) \left(\binom{n-1}{k-1} \left(F(x)\right)^{k-1} \left(1-F(x)\right)^{n-k} - 0 \right)
\end{aligned}$$

Conclusion : par exemple nous prendrons f_k définie par

$$\boxed{\forall k \in [|1,n|]\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = n\binom{n-1}{k-1} f(x) \left(F(x)\right)^{k-1} \left(1-F(x)\right)^{n-k}}$$

2.

(a) Pour tout couple (x,y) dans $\mathbb{R}^2$ l'événement $[Y_1 > y] \cap [Y_n \leq x]$ est réalisé si et seulement si toutes les variables X_i sont comprises entre y et x soit donc :

$$\begin{aligned}
\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad y \leq x, \quad \mathbf{P}([Y_1 > y] \cap [Y_n \leq x]) &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [y < X_i \leq x]\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}([y < X_i \leq x]) \\
&\quad \text{par indépendance des variables } X_i \\
&= (F(x) - F(y))^n \\
&\quad \text{car les variables } X_i \text{ suivent la même loi}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{P}([Y_1 > y] \cap [Y_n \leq x]) = \begin{cases} (F(x) - F(y))^n & \text{si} \quad y \leq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad y \leq x, \quad \mathbf{P}([Y_1 \leq y] \cap [Y_n \leq x]) &= \mathbf{P}([Y_n \leq x]) - \mathbf{P}([Y_1 > y] \cap [Y_n \leq x]) \\
&= \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leq x]\right) - \mathbf{P}([Y_1 > y] \cap [Y_n \leq x]) \\
&= F^n(x) - (F(x) - F(y))^n
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \Phi(x,y) = \begin{cases} F^n(x) - (F(x) - F(y))^n & \text{si} \quad y \leq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

(b) Par dérivation successives de F par rapport à x puis par rapport à y, Φ étant de classe $\mathcal{C}^2$ presque partout sur $\mathbb{R}^2$ (le théorème de Schwarz s'applique) :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad y \leq x, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) = nF^{n-1}(x) f(x) - n(F(x) - F(y))^{n-1} f(x)$$

et :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad y \leq x, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}(x,y) = 0 + n(n-1)(F(x) - F(y))^{n-2} f(x) f(y)$$

Conclusion : nous pourrons prendre comme densité ϕ

$$\boxed{\begin{array}{llll} \phi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} n(n-1)(F(x) - F(y))^{n-2} f(x) f(y) & \text{si} \quad y \leq x \\ 0 & \text{si} \quad x < y \end{cases} \end{array}}$$

3.

(a) Tout d'abord nous pouvons écrire que :

$$\begin{array}{llll} \phi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} n(n-1)(x-y)^{n-2} & \text{si} \quad 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x < y \end{cases} \end{array}$$

Par le théorème de transfert, et par définition de la densité du couple non nulle sur un compact de $\mathbb{R}^2$ (ce qui entraîne la convergence de l'intégrale double), nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left((Y_n - Y_1)^2\right) &= \int_0^1 \int_0^x (x-y)^2 \, n(n-1)(x-y)^{n-2} \, dxdy \\
&= n(n-1)\int_0^1 \left(\int_0^x (x-y)^n \, dy\right) dx \\
&= n(n-1)\int_0^1 \left(\left[-\frac{(x-y)^{n+1}}{n+1}\right]_0^x\right) dx \\
&= n(n-1)\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} dx \\
&= \frac{n(n-1)}{n+1}\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 \\
&= \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

Conclusion : nous pourrons prendre comme densité ϕ

$$\boxed{\mathbf{E}\left((Y_n - Y_1)^2\right) = \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}}$$

(b) En développant $(Y_n - Y_1)^2$ nous obtenons que :

$$(Y_n - Y_1)^2 = Y_1^2 - 2Y_1Y_n + Y_n^2$$

Puisque les variables $(Y_n - Y_1)^2$, Y_1^2 et Y_n^2 en jeu admettent une espérance d'après la première partie et la question précédente, nous pouvons écrire que Y_1Y_n admet une espérance égale, par linéarité de l'espérance à :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y_1Y_n) &= \frac{1}{2}\left(-\mathbf{E}\left((Y_n - Y_1)^2\right) + \mathbf{E}\left(Y_1^2\right) + \mathbf{E}\left(Y_n^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} + \mathbf{V}(Y_1) + (\mathbf{E}(Y_1))^2 + \mathbf{V}(Y_n) + (\mathbf{E}(Y_n))^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} + \frac{n}{(n+1)^2(n+2)} + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 + \frac{n}{(n+1)^2(n+2)} + \left(\frac{n}{n+1}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} + \frac{2n}{(n+1)^2(n+2)} + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{n}{n+1}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbf{E}(Y_1Y_n) = \frac{1}{n+2}}$$

(c) Comme les deux variables Y_1 et Y_n admettent chacune une moment d'ordre deux, la covariance du couple (Y_1, Y_n) existe et vaut par théorème :

$$\begin{aligned}
Cov(Y_1, Y_n) &= \mathbf{E}(Y_1Y_n) - \mathbf{E}(Y_1)\,\mathbf{E}(Y_n) \\
&= \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\frac{n}{n+1} \\
&= \frac{1}{(n+1)^2(n+2)}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{Cov(Y_1, Y_n) = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)}}$$

Enfin par définition, comme les deux variables possèdent une variance non nulle, le coefficient de corrélation du couple existe et vaut :

$$\begin{aligned}\rho(Y_1, Y_n) &= \frac{Cov(Y_1, Y_n)}{\sqrt{\mathbf{V}(Y_1)\,\mathbf{V}(Y_n)}} \\ &= \frac{Cov(Y_1, Y_n)}{\mathbf{V}(Y_n)} \\ &= \frac{\dfrac{1}{(n+1)^2(n+2)}}{\dfrac{n}{(n+1)^2(n+2)}}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\rho(Y_1, Y_n) = \frac{1}{n}}$$

✠✠✠✠✠