Paulette MAZET
Lycée Saint-Louis, Paris

ECOLE POLYTECHNIQUE - ESPCI 1999

Filière PC - Deuxième épreuve

Première Partie

1. $L(P)=\sum_{p=0}^{n}a_p\int_{-1}^{1}x^p dx = 2\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\frac{a_{2k}}{2k+1}.$

L est une forme linéaire non nulle sur E de dimension $n+1$ donc $\operatorname{Ker} L$ est de dimension n. Les fonctions monômes $x\to x^{2k+1},\ 0\leqslant 2k+1\leqslant n$ sont dans $\operatorname{Ker} L$ ainsi que les fonctions $x\to 1-(2k+1)x^{2k},\ 0<2k\leqslant n$ On a ainsi n polynômes indépendants dans $\operatorname{Ker} L$, c'est une base du noyau de L.

2. a. P_i est le polynôme interpolateur de Lagrange associé aux points $(x_0,x_1,\cdots,x_n)$ et aux valeurs $(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$. L'existence et l'unicité d'un tel polynôme sont dans le cours.

b. La famille des polynômes P_i est une base de E. (On démontre facilement que c'est une famille libre de $n+1$ polynômes). Un polynôme P de E se décompose sur cette base en $P=\sum_0^n P(x_i)P_i$ et par linéarité $L(P)=\sum_0^n L(P_i)P(x_i)$. La famille des coefficients $\lambda_i=L(P_i)$ convient. Réciproquement si des λ_i vérifient $\quad \forall P\in E,\ \ L(P)=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i P(x_i)\quad (\mathbf{1}),\quad$ on a $\quad \forall k\in\{0,\cdots,n\},\ L(P_k)=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i P_k(x_i)=\lambda_k$. On a ainsi existence et unicité des (λ_i).

3. Considérons $P\in E$ et $Q: x\mapsto P(-x)$. On calcule $L(Q)$ de deux façons:

$L(Q)=\int_{-1}^{1}P(-x)dx=-\int_{1}^{-1}P(u)du=\int_{-1}^{1}P(u)du=L(P)$ et

$L(Q)=\sum_0^n \lambda_i P(-x_i)=\sum_0^n\lambda_{n-i}P(x_i)$ puisque $\forall i\in\{0,\cdots,n\}\ x_{n-i}=-x_i$.

On a donc $\forall P\in E\ \sum_0^n\ \lambda_{n-i}P(x_i)=\sum_0^n\lambda_i P(x_i)$ et l'unicité des (λ_i) donne : $\forall i\in\{0,\cdots,n\}\lambda_{n-i}=\lambda_i$

On suppose n pair, on pose $n=2p$. On a $\int_{-1}^{1}x^{2p+1}dx=0$. D'autre part, les conditions sur les points x_i imposent $x_p=0$ et $\sum_0^{2p}\lambda_i x_i^{2p+1}=\sum_0^{p-1}(\lambda_i x_i^{2p+1}+\lambda_{2p-i}(-x_i)^{2p+1})$. En utilisant $\lambda_i=\lambda_{2p-i}$ on obtient $\sum_0^{2p}\lambda_i x_i^{2p+1}=0$. La relation $(\mathbf{1})$ est vérifiée par X^{2p+1} et par linéarité de L, $(\mathbf{1})$ est valable pour tout polynôme de degré inférieur à $n+1$.

4. a. f étant de classe C^{n+1} sur $[-1,1]$, l'inégalité de Taylor-Lagrange donne:

$$\forall x\in[-1,1]\quad \left|f(x)-\sum_0^n x^k\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right|\leqslant M_{n+1}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Notons Q le polynôme défini par $Q(x)=\sum_0^n x^k\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$. L'inégalité précédente conduit aux deux séries de relations

$$\left|\int_{-1}^{1}(f(x)-Q(x))dx\right|\leqslant\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\int_{-1}^{1}|x|^{n+1}dx=\frac{2M_{n+1}}{(n+2)!}$$

$$\left|\sum_0^n\lambda_i(f(x_i)-Q(x_i))\right|\leqslant\sum_0^n|\lambda_i|\ |f(x_i)-Q(x_i)|\leqslant\sum_0^n|\lambda_i|\frac{M_{n+1}|x_i|^{n+1}}{(n+1)!}\leqslant\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\sum_0^n|\lambda_i|$$

Q étant de degré au plus n on a $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q(x)dx = \sum_0^n \lambda_i Q(x_i)$; par inégalité triangulaire on obtient

$$\Big|\int_{-1}^{1} f(x)dx - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)\Big| \leqslant M_{n+1}\big(\frac{2}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+1)!}\sum_0^n |\lambda_i|\big)$$

b. Compte tenu des hypothèses faites sur f et les (x_i), on a, en développant f à l'ordre $n+1$,

$$\forall x \in [-1,1] \quad |f(x) - Q_1(x)| \leqslant M_{n+2}\frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}$$

où Q_1, partie polynomiale du développement de Taylor de f, est de degré inférieur à $n+1$ et vérifie donc, d'après 3. $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q_1(x)dx = \sum_0^n \lambda_i Q_1(x_i)$.

Comme à la question 4.a., on en déduit

$$\Big|\int_{-1}^{1} f(x)dx - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)\Big| \leqslant M_{n+2}\big(\frac{2}{(n+3)!} + \frac{1}{(n+2)!}\sum_0^n |\lambda_i|\big)$$

5. a. Le choix des points x_i assure $\lambda_0 = \lambda_4$ et $\lambda_1 = \lambda_3$. Les polynômes interpolateurs de Lagrange sont, dans cet exemple,

$$P_0 = \frac{2}{3}(X^2 - X)(X^2 - \frac{1}{4}), \quad P_1 = -\frac{8}{3}(X^2-1)(X^2 - \frac{1}{2}X), \quad P_2 = 4(X^2-1)(X^2-\frac{1}{4}), \cdots$$

et le calcul des $\lambda_i = L(P_i)$ donne:

$$\lambda_0 = \lambda_4 = \frac{7}{45}, \quad \lambda_1 = \lambda_3 = \frac{32}{45}, \quad \lambda_2 = \frac{4}{15}$$

b. La majoration du 4.b. suppose le calcul de $f^{(6)}$ qui donne: $f^{(6)}(x) = \left(\frac{x^6}{8^6} + \frac{15x^4}{8^5} + \frac{45x^2}{8^4} + \frac{15}{8^3}\right)e^{\frac{x^2}{16}}$.

On obtient alors $M_6 = f^{(6)}(1) = \dfrac{10681}{8^6}e^{\frac{1}{16}}$ puis la majoration

$$\Big|\int_{-1}^{1} f(x)dx - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)\Big| \leqslant \frac{21362}{8^5 7!}e^{\frac{1}{16}} \approx 1,4.10^{-4}$$

Deuxième Partie

6. a. L est une forme linéaire définie sur un espace vectoriel de dimension finie donc L est continue; $S = \{P \in E, N(P) = 1\}$ sphère unité de (E,N) est compacte et non vide donc $|L|$ est bornée sur S et ses bornes sont atteintes. La borne supérieure de $|L|$ sur S est aussi sa borne supérieure sur la boule unité fermée (par homogénéité) ce qui assure la définition de $\mathcal{N}(L)$ et l'existence de Q dans S tel que $\mathcal{N}(L) = |L(Q)|$.

b. Si, pour tout P de E, on a $|L(P)| \leqslant K\,N(P)$ en particulier pour P de S, on a $|L(P)| \leqslant K$ et par définition de $\mathcal{N}(L)$, $\mathcal{N}(L) \leqslant K$. Si, de plus, il existe Q dans S tel que $|L(Q)| = K$, on a $\mathcal{N}(L) \geqslant K$ et donc l'égalité $\mathcal{N}(L) = K$.

7. Avec les notations de l'énoncé, on a $\forall p \in \{0, \cdots, n\}, |a_p|^2 \leqslant \displaystyle\sum_{p=0}^{n}(a_p)^2$ et par suite $N_\infty(P) \leqslant N_2(P)$.

Si p_0 est tel que $N_\infty(P) = a_{p_0}$, on a $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}(a_p)^2 \leqslant \sum_{p=0}^{n}(a_{p_0})^2 = (n+1)a_{p_0}^2$ et donc $N_2(P) \leqslant \sqrt{n+1}N_\infty(P)$.

8. a. En reprenant l'expression de $L(P)$ donnée en 1. on a la majoration:

$$|L(P)| = 2\Big|\sum_{2k\leqslant n}\frac{a_{2k}}{2k+1}\Big| \leqslant 2N_\infty(P)\sum_{2k\leqslant n}\frac{1}{2k+1}$$

et par exemple $Q_\infty = \sum_0^n X^k$ vérifie $N_\infty(Q_\infty) = 1$ et $L(Q_\infty) = 2\sum_{2k\leqslant n} \frac{1}{2k+1}$. D'après la question 6.b. on peut conclure $\mathcal{N}_\infty(L) = 2\sum_{2k\leqslant n} \frac{1}{2k+1}$.

b. Grâce à l'inégalité de Schwarz on a les majorations:

$$|L(P)| = 2\left|\sum_{2k\leqslant n} \frac{a_{2k}}{2k+1}\right| \leqslant 2\Bigg(\sum_{2k\leqslant n} \frac{1}{(2k+1)^2}\Bigg)^{1/2}\Bigg(\sum_{2k\leqslant n} (a_{2k})^2\Bigg)^{1/2} \leqslant 2\Bigg(\sum_{2k\leqslant n} \frac{1}{(2k+1)^2}\Bigg)^{1/2} N_2(P)$$

et pour $Q_2 = \left(\sum_{2k\leqslant n} \frac{X^{2k}}{2k+1}\right)\frac{1}{\left(\sum_{2k\leqslant n} \frac{1}{(2k+1)^2}\right)^{1/2}}$ on a $N_2(Q) = 1$ et $L(Q_2) = 2\left(\sum_{2k\leqslant n} \frac{1}{(2k+1)^2}\right)^{1/2}$. On conclut alors

$$\mathcal{N}_2(L) = 2\left(\sum_{2k\leqslant n} \frac{1}{(2k+1)^2}\right)^{1/2}$$

Troisième Partie

9. a. Pour k dans $\mathbb{N}$, notons P_k le polynôme $\sum_0^k X^i$. Comme on l'a vu en 8.a. $N_\infty(P_k) = 1$ et $L(P_k) = 2\sum_{2i\leqslant k} \frac{1}{2i+1}$. La série $\sum \frac{1}{2n+1}$ étant divergente à termes positifs, la suite $L(P_k)$ tend vers $+\infty$.

b. On suppose ici $F = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme N_∞. (L'énoncé aurait du le préciser). L est continue si et seulement si elle est bornée sur la sphère unité de (F, N_∞). La suite (P_k) est une suite de cette sphère mais $(L(P_k))$ n'est pas bornée , donc L n'est pas continue pour N_∞.

10. a. D'après les majorations de 8.b. on a, pour tout P de F, $|L(P)| \leqslant 2\Bigg(\sum_{2k\leqslant degP} \frac{1}{(2k+1)^2}\Bigg)^{1/2} N_2(P)$. La série $\sum \frac{1}{(2k+1)^2}$ étant convergente on a $\forall P \in F,\quad |L(P)| \leqslant 2\Bigg(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\Bigg)^{1/2} N_2(P)$ donc L est bornée sur la sphère unité de (F, N_2), L est continue pour N_2, $|||L|||$ est défini et $|||L||| \leqslant 2\Bigg(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\Bigg)^{1/2}$.

b. Considérons les polynômes Q_n définis par $Q_n = \left(\sum_{2k\leqslant n} \frac{X^{2k}}{2k+1}\right)\frac{1}{\left(\sum_{2k\leqslant n} \frac{1}{(2k+1)^2}\right)^{1/2}}$.

Ces polynômes sont dans la sphère unité de (F, N_2) et $L(Q_n)$ tend vers $2\Bigg(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\Bigg)^{1/2}$ ce qui prouve $|||L||| = 2\Bigg(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\Bigg)^{1/2}$

On remarque par ailleurs que l'inégalité $|L(P)| \leqslant 2\Bigg(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\Bigg)^{1/2} N_2(P)$ est stricte dès que P est non nul, donc $|||L|||$ n'est pas une valeur prise par L sur la sphère unité de (F, N_2).