

Partie I

1°) Posons $u_n = h\varphi(nh)$, $v_n = \int_{(n-1)h}^{nh} \varphi(t) dt$, $U_n = u_1 + \dots + u_n$ et $V_n = v_1 + \dots + v_n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. On note aussi $S(h) = \sum_{n=1}^{+\infty} h\varphi(nh)$.

a) $V_n = \int_0^{nh} \varphi(t) dt$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$, la série $\sum v_n$ converge et a pour somme l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$. Comme φ est décroissante, $u_n \leq v_n$ d'où la convergence de la série à terme positifs $\sum u_n$ par domination.

b) Toujours grâce à la décroissance de φ , on a $v_{k-1} \leq u_k \leq v_k$ et, en sommant ces inégalités, on a

$$V_{n+1} - v_1 \leq U_n \leq V_n$$

et, par passage à la limite, quand $n \rightarrow +\infty$:

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt - \int_0^h \varphi(t) dt \leq S(h) \leq \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt.$$

Vu que $\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^h \varphi(t) dt = 0$, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} S(h) = \sum_{n=1}^{+\infty} h\varphi(nh)$$

2°) $s(x)$ s'écrit de la manière suivante : $s(x) = \sum_{k=1}^{E(x)} \varphi(k)$

a) C'est le théorème du cours ! On a

$$C = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \varphi(t) dt - \sum_{k=1}^n \varphi(k).$$

et $C \leq \int_0^1 \varphi(t) dt$.

b) Considérons tout d'abord le cas $x < 1$: on a

$$\psi(x) = - \int_0^x \varphi(t) dt + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\int_{k-1}^k \varphi(t) dt - \varphi(k) \right]$$

et donc, grâce à la question précédente, $\psi(x) \leq - \int_0^x \varphi(t) dt + \int_0^1 \varphi(t) dt$. Comme $\varphi(x) > 0$ on a

$$\psi(x) \leq \int_x^1 \varphi(t) dt \leq (1-x)\varphi(x) \leq \varphi(x)$$

Il nous faut maintenant l'inégalité $\psi(x) \geq -\varphi(x)$.

$$\begin{aligned} \psi(x) &= - \int_0^x \varphi(t) dt + \int_0^1 \varphi(t) dt - \varphi(1) + \sum_{k=2}^{+\infty} \left[\int_{k-1}^k \varphi(t) dt - \varphi(k) \right] \\ &\geq \int_x^1 \varphi(t) dt - \varphi(1) \geq -\varphi(1) \text{ car } \varphi \text{ est croissante} \\ &\geq -\varphi(x) \text{ car } -\varphi \text{ est décroissante} \end{aligned}$$

Pour traiter le cas $x \geq 1$, on écrit, après transformation,

$$\psi(x) = - \int_{E(x)}^x \varphi(t) dt + \sum_{k=E(x)+1}^{+\infty} \left[\int_{k-1}^k \varphi(t) dt - \varphi(k) \right]$$

puis on applique l'encadrement précédent aux fonctions $\varphi_1(t) = \varphi(t + E(x))$ et $\psi_1(t) = \psi(t + E(x))$, ce qui amène $-\varphi_1(t) \leq \psi_1(t) \leq \varphi_1(t)$, et on applique cette inégalité à $t = x - E(x)$. ♦

Partie II

3°) Par le critère de d'Alembert, le rayon de convergence vaut 1.

Comme $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$, on a

$$f(x) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

donc $\lim_{x \nearrow 1} f(x) = +\infty$.

4°) On écrit que $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-nh}$ et on utilise le I1° appliqué à la fonction $\varphi(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ qui est continue sur $]0, +\infty[$, décroissante, positive et intégrable sur $]0, +\infty[$. On a alors

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{n=1}^{+\infty} h \varphi(nh) \sim \frac{I}{\sqrt{h}}$$

où $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt = \Gamma(\frac{1}{2}) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$ (intégrale de Gauss).

a) En conclusion, comme $h = -\ln x \sim 1-x$ en 1, on a bien

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x}}.$$

5°) Là encore, on a $s(y) = \sum_{n=1}^{E(y)} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

a) Et, si $y \in [n, n+1[$ on aura

$$\begin{aligned} h \int_n^{n+1} s(y) e^{-hy} dy &= s(n)(e^{-nh} - e^{-(n+1)h}) \quad \text{d'où} \\ h \int_0^n s(y) e^{-hy} dy &= \sum_{k=0}^{n-1} s(k)(e^{-kh} - e^{-(k+1)h}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} s(k)e^{-kh} - \sum_{k=1}^n s(k-1)e^{-kh} \\ &= -s(n)e^{-nh} + \sum_{k=1}^n [s(k) - s(k-1)]e^{-kh} \\ &= -s(n)e^{-nh} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-kh}. \end{aligned}$$

Comme $s(t)e^{-ht} \geq 0$ et $s(n)e^{-nh}$ a une limite nulle en $+\infty$ (car $s(n) \leq n$) alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n s(t)e^{-ht} dt$ existe. On peut donc prendre la limite dans l'égalité du dessus, et, on en déduit que

$$f(x) = h \int_0^{+\infty} s(y) e^{-hy} dy.$$

6°) a) Avec les notations du I.2. on sait que

$$|\psi(x)| = |s(x) - 2\sqrt{x} + C| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

donc

$$\left| \int_0^{+\infty} h \psi(t) e^{-ht} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{h}{\sqrt{t}} e^{-ht} dt = \sqrt{h} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\pi} \sqrt{h}$$

et, vu le résultat de la question précédente,

$$f(e^{-h}) = h \int_0^{+\infty} \psi(t) e^{-ht} dt + 2h \int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-ht} dt - Ch \int_0^{+\infty} e^{-ht} dt.$$

Cependant, on sait que $2h \int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-ht} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{h}$ et $h \int_0^{+\infty} e^{-ht} dt = 1$. Il vient ainsi :

$$\left| f(e^{-h}) - \frac{\sqrt{\pi}}{h} + C \right| \leq \sqrt{\pi h}.$$

Or, par un calcul simple, on prouve que $\frac{1}{\sqrt{h}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ tend vers 0 quand $x \nearrow 1$ et donc

$$\lim_{x \nearrow 1} f(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x}} = -C$$

où

$$C = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \frac{dt}{\sqrt{t}} - 1 - \dots - \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2\sqrt{n} - 1 - \dots - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

b) $f(-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est bien définie comme somme d'une série alternée. On pose alors :

$$A_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}, \quad B_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

On sépare dans chacune de ces deux sommes les termes pairs et impairs, ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} A_{2n} &= - \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) \\ B_{2n} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) \end{aligned}$$

et donc

$$A_{2n} + B_{2n} = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) = \sqrt{2} B_n.$$

Comme $B_n = 2\sqrt{n} - C + o(1)$ et $B_{2n} = 2\sqrt{2n} - C + o(1)$ on en déduit que

$$A_{2n} = \sqrt{2}B_n - B_{2n} = (1 - \sqrt{2})C + o(1)$$

i.e. $f(-1) = (1 - \sqrt{2})C$ soit encore

$$\boxed{-C = (\sqrt{2} + 1)f(-1).}$$

Partie III

7°) La fonction considérée est équivalente en $+\infty$ à e^{-u^2} donc, il n'y a pas de problème de convergence en $+\infty$.

a) Si x est un réel > 1 , soit $y = \ln x$, au voisinage de y on a

$$\frac{1}{e^{u^2} - x} \sim \frac{1}{(u - \ln x)2ye^{u^2}}$$

donc la fonction n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$.

Si $x = 1$ alors $\frac{1}{e^{u^2} - 1} \sim \frac{1}{u^2}$ et on a la même conclusion.

Si $x \in C \setminus [1, +\infty[$ la fonction $u \mapsto \frac{1}{e^{u^2} - x}$ est continue sur R_+ et, vu son comportement en $+\infty$, cette fonction est intégrable.

En conclusion, la fonction g est définie sur $C \setminus [1, +\infty[$.

8°) f et g sont bien définies sur le disque ouvert $|x| < 1$.

a) En utilisant le développement de $\frac{1}{1-z}$ appliqué à $z = xe^{-u^2}$ on a : $\frac{1}{1 - xe^{-u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n e^{-nu^2}$. Considérons d'abord le cas où $x \in]0, 1[$. Nous avons alors une série de fonctions positives, dont on sait que l'intégration terme à terme réussit toujours, quitte à se conclure par une réponse $+\infty$. On a ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} x^n e^{-(n+1)u^2} du &= \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x^n e^{-(n+1)u^2} du \\ &= g(x) < +\infty \end{aligned}$$

or $\frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} x^n e^{-(n+1)u^2} du = \frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$; il en résulte que l'on a déjà $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in [0, 1[$.

Dans le cas général ($|x| < 1$) on applique le théorème d'interversion série-intégrale, dont la seule hypothèse supplémentaire est la convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, ce qui s'écrit ici

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} |x|^n e^{-(n+1)u^2} du < +\infty;$$

mais cette série est très exactement celle qu'on vient de voir auparavant, elle coïncide avec $f(|x|)$ (qui converge bien ici).

On en tire aussitôt

$$\boxed{f(x) = g(x) \text{ sur le disque ouvert } |x| < 1.}$$

9°) Si on pose $x = -e^{-t^2}$, on a $g(x) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \Phi_t(u) du$.

a) Il suffit donc de prouver que $\int_0^{+\infty} \Phi_t(u) du = t + o(1)$.

Soit $\varepsilon = \sqrt{t}$ (comme $t > 1$, on a bien $0 < \varepsilon < t$) alors

$$\int_0^{+\infty} \Phi_t(u) du \geq \int_0^{t-\varepsilon} \Phi_t(u) du \geq \frac{t-\varepsilon}{1+e^{-2\varepsilon t+\varepsilon^2}}$$

car $e^{u^2-t^2} + 1 \leq e^{(t-\varepsilon)^2-t^2} + 1 = e^{-2\varepsilon t+\varepsilon^2} + 1$. Or,

$$\left| \frac{t-\varepsilon}{1+e^{-2\varepsilon t+\varepsilon^2}} - t \right| \leq \frac{\varepsilon+te^{-2\varepsilon t+\varepsilon^2}}{1+e^{-2\varepsilon t+\varepsilon^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} + te^{-2\sqrt{t}+1/t} = o(1).$$

On écrit ensuite $\int_0^{+\infty} \Phi_t(u) du = \int_0^t \Phi_t(u) du + \int_t^{+\infty} \Phi_t(u) du$ et on utilise les inégalités $e^{u^2-t^2} + 1 \geq 1 + e^{-t^2}$ dans la première intégrale, $e^{u^2-t^2} + 1 \geq e^{u^2-t^2}$ dans la deuxième. On a donc

$$\int_0^{+\infty} \Phi_t(u) du \geq \frac{t}{1+e^{-t^2}} + e^{t^2} \int_t^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

Mais $\frac{t}{1+e^{-t^2}} - t \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ et vu que $\int_t^{+\infty} e^{-u^2} du \sim \frac{e^{-t^2}}{2t}$ on peut encadrer $g(x) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\ln|x|}$ par deux quantités qui tendent vers 0, ce qu'il fallait.

Partie IV

10°) Nous supposons, dans cette question, que $\theta \in]0, 2\pi[$ (sinon $C(\theta)$ diverge). Considérons $E_N(\theta) = \sum_{n=1}^N \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}}$ ainsi que

$$s_n = \sum_{p=0}^n e^{ip\theta} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = e^{i(n+1)\theta/2} \frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

dans l'optique d'une transformation d'Abel :

$$\begin{aligned} E_N(\theta) &= \sum_1^N \frac{s_n - s_{n-1}}{\sqrt{n}} = \sum_1^N \frac{s_n}{\sqrt{n}} - \sum_0^{N-1} \frac{s_n}{\sqrt{n+1}} \\ &= \sum_1^N s_n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) + \frac{s_N}{\sqrt{N}} - 1. \end{aligned}$$

La suite (s_n) est bornée (par $\frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}}$ qui existe vu que $\frac{\theta}{2} \in]0, \pi[$), ce qui entraîne la convergence de $\frac{s_N}{\sqrt{N}}$ vers 0, alors que la série nouvellement apparue converge absolument, car son terme général se laisse majorer par $w_n = \frac{1}{|\sin \frac{\theta}{2}|} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$, qui est terme général d'une série convergente (par télescopes). Finalement, $E_N(\theta)$ admet une limite, et ses parties réelle et imaginaire font de même, ce qui assure l'existence de $C(\theta)$ et $S(\theta)$.

11°) a) Pour $n+1 \leq k \leq 2n$ on a $\frac{\pi}{4} \leq \frac{k\pi}{4n} \leq \frac{\pi}{2}$ donc en minorant le sinus par sa plus petite valeur et la somme par le nombre de termes fois la plus petite il vient :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin \frac{k\pi}{4n} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{2k}} \geq n \times \frac{1}{\sqrt{2.2n}} = \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

b) Si la convergence de la série qui définit $S(\theta)$ était uniforme, le critère de Cauchy uniforme serait vérifié, ce qui, en particulier, donnerait, pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, un entier n_0 tel que $\left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin k\theta}{\sqrt{k}} \right| \leq \frac{1}{2}$ ait lieu pour tout θ ; mais avec $\theta = \frac{\pi}{4n}$ on a vu à la question précédente que n'est pas possible.

12°) Tentons une interversion de série et intégrale; notre but est de justifier le calcul formel suivant.

$$\begin{aligned} g(e^{i\theta}) &= \int_0^\infty \frac{du}{e^{u^2} - e^{i\theta}} = \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty e^{ik\theta - (k+1)u^2} du \\ &= \sum_{k=0}^\infty e^{ik\theta} \int_0^\infty e^{-(k+1)u^2} du = \sum_{k=0}^\infty e^{ik\theta} \int_0^\infty e^{-(k+1)u^2} du \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{e^{ik\theta}}{\sqrt{k+1}} = f(e^{i\theta}) \end{aligned}$$

Le seul point litigieux est l'interversion; le théorème du programme relatif à ce point ne s'applique pas ici parce que la série des intégrales des modules diverge. On considère donc la suite des sommes partielles :

$$\begin{aligned} T_N(u) &= \sum_{k=0}^N e^{ik\theta - (k+1)u^2} = e^{-u^2} \frac{1 - e^{i(N+1)(\theta - u^2)}}{1 - e^{i(\theta - u^2)}} \\ \Rightarrow |T_N(u)| &\leq \frac{2}{|e^{u^2} - e^{i\theta}|} = \varphi(u) \end{aligned}$$

fonction majorante qui est continue sur $\mathbb{R}$ parce que $x = e^{i\theta}$ n'est pas égal à 1 (question 10°), et intégrable puisqu'équivalente à l'infini à e^{-u^2} . Le théorème de convergence dominée est, ainsi, applicable à la suite (T_N) et amène le résultat espéré :

pour tout nombre complexe x tel que $f(x)$ existe on a $f(x) = g(x)$.

En particulier, si on prend les parties réelles il vient

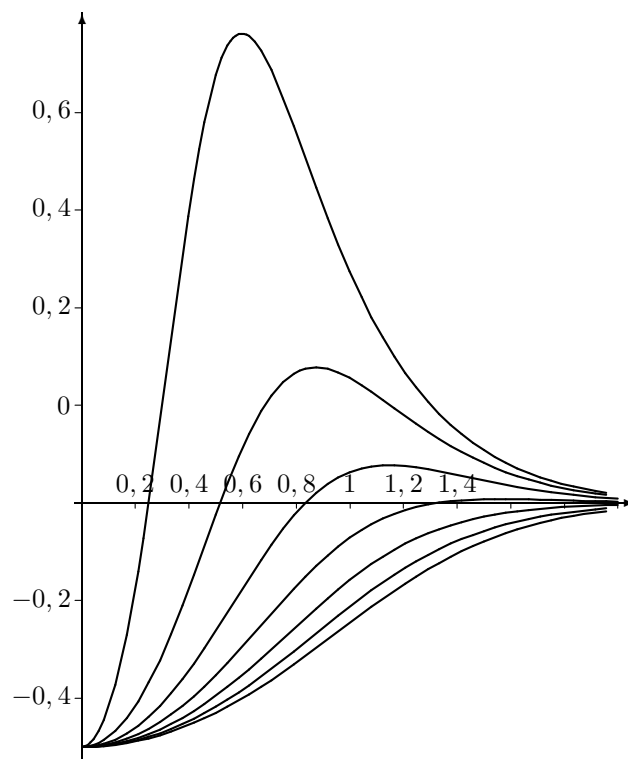
$$\begin{aligned} C(\theta) &= \operatorname{Re}(f(e^{i\theta})) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\theta}}{e^{u^2} - e^{i\theta}}\right) du \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\theta} e^{u^2} - 1}{e^{2u^2} - 2\cos\theta e^{u^2} + 1}\right) du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty W_\theta(u) du \end{aligned}$$

avec $W_\theta(u) = \frac{e^{u^2} \cos\theta - 1}{e^{2u^2} - 2\cos\theta e^{u^2} + 1}.$

13°) W_θ s'annule pour $e^{u^2} = \frac{1}{\cos\theta}$ soit $\theta = \pm\sqrt{-\ln\cos\theta}$; elle est aussi paire et vérifie $W(0) = -\frac{1}{2}$; elle tend vers 0 à l'infini. Concernant W' , il est commode de poser $X = e^{u^2} \geq 1$ ce qui conduit à étudier la fraction rationnelle $F(X) = \frac{X\cos\theta - 1}{X^2 - 2X\cos\theta + 1}$; on a $F'(X) = \frac{-X^2\cos\theta + 2X - \cos\theta}{D^2}$ qui change de signe pour $X = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$. Ici on a

$$\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) > 1 > \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$

de sorte que, par composition, W' ne s'annule qu'en $\pm\sqrt{\ln\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$ ainsi qu'en 0 évidemment.



14°) On pose $v = u^2$. Il vient, tenant compte du fait que pour θ assez petit $e^v \cos \theta \geq 1$ pour tout $v \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 C(\theta) &\geq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{e^v \cos \theta - 1}{e^{2v} - 2e^v \cos \theta + 1} dv \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} [\ln(1 - 2e^{-v} \cos \theta + e^{-2v})]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \ln \frac{1 - 2e^{-1} \cos \theta + e^{-2}}{2(1 - \cos \theta)}
 \end{aligned}$$

Quand θ tend vers zéro, le numérateur tend vers une limite non nulle et le dénominateur tend vers 0. On trouve ainsi que

$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} C(\theta) = +\infty.$