Concours Communs Polytechniques - Session 2008

Corrigé de l'épreuve d'algèbre

Matrices réelles dont les valeurs propres sont sur la diagoanle.

Corrigé par Mohamed TARQI

I. Exemples

Remarque : Si A est à diagonale propre, alors $\chi_A(X)$ est le premier terme qui apparaît dans le développement de $\det(A - XI_n)$ par la règle de Sarrus.

1. (a) On appliquant la règle de Sarrus, on obtient facilement :

$$\chi_{M(\alpha)}(X) = (1-X)(2-X)(2-\alpha-X)+\alpha-\alpha(2-X)+\alpha(1-X) = (1-X)(2-X)(2-\alpha-X).$$

Donc $M(\alpha)$ est à diagonale propre.

(b) On a $\text{Sp}(M(\alpha)) = \{1, 2, 2-\alpha\}$.
• Si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$, alors $M(\alpha)$ aura trois valeurs propres distinctes, donc diagonlisable.
• Si $\alpha = 0$, alors $M(\alpha)$ est diagonalisable si et seulement si $\dim\ker(M(\alpha) - 2I_3) = 2$. Or $(x, y, z) \in \ker(M(\alpha) - 2I_3)$ si et seulement si $\begin{cases} x - y = 2x \\ 2y = 2y \\ x + y + 2z = 2z \end{cases} \iff x + y = 0$, donc $\dim\ker(M(\alpha) - 2I_3) = 2$, donc $M(\alpha)$ est diagonalisable.
• Si $\alpha = 1$, alors $M(\alpha)$ est diagonalisable si et seulement si $\dim\ker(M(\alpha) - I_3) = 2$. Or $(x, y, z) \in \ker(M(\alpha) - I_3)$ si et seulement si $\begin{cases} x - y + z = x \\ 2y - z = y \\ x + y + z = z \end{cases} \iff y = z = -x$, donc $\dim\ker(M(\alpha) - 2I_3) = 1 < 2$, donc $M(\alpha)$ n'est pas diagonalisable.
En conclusion, $M(\alpha)$ est diagonalisable si et seulement si $\alpha \neq 1$.

2. Si A est à diagonale propre, alors 0 sera l'unique valeur propre de A et par conséquent $A^3 = 0$ (théorème de Cayely-Hamilton), mais $A^3 \neq 0$ puisque $A^3 e_1 = -e_3$ ((e_1, e_2, e_3) étant la base canonique de $\mathbb{R}^3$), donc A n'est pas à diagonale propre.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice à diagonale propre, donc $\chi_A(X) = X^2-(a+d)X+ad$, d'autre part $\chi_A(X) = X^2 - (a+d)X + ad - bc$ et par identification, on obtient : $bc = 0$, donc A est triangulaire. Réciproquement, toute matrice triangulaire est à diagonale propre, donc l'ensemble de matrices, d'ordre 2, à diagonale propre se réduit à l'ensemble des matrices triangulaires.
Rappel : *l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est identifié à l'espace $\mathbb{R}^{n^2}$, et est muni, par exemple, de la norme*

$$\|(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}\|_\infty = \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|.$$

La convergence d'une suite de matrices est donc équivalente à la convergence " coefficient par coefficient ".
Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{E}_2$ de limite $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, montrons que $A \in \mathcal{E}_2$, en effet, posons $A_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ 0 & d_k \end{pmatrix}$ (resp. $A_k = \begin{pmatrix} a_k & 0 \\ b_k & d_k \end{pmatrix}$), alors puisque $\lim_{k\to\infty} A_k = A$, nécessairement $c = 0$ (resp. $b = 0$) et par suite $A \in \mathcal{E}_2$, donc $\mathcal{E}_2$ est fermé de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, comme reunion de deux fermés.

II. Test dans le cas $n = 3$

4. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ une matrice, d'ordre 3, à diagonale propre, donc

$$\chi_A(X) = (X - a_{11})(X - a_{22})(X - a_{33}),$$

ainsi A est inversible si et seulement si $\prod_{i=1}^{3} a_{ii} \neq 0$.

Étudions la matrice $A = M(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, A c'est une matrice à diagonale propre et inversible avec $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, son polynôme caractéristique, d'après la règle de sarrus, est $\chi_{A^{-1}}(X) = (1-X)\left(\frac{1}{2} - X\right)^2$, donc $A^{-1} \in \mathcal{E}_3$.

5. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ une matrice d'ordre 3. Par définition, on a :

$$\chi_A(X) = -X^3 + \operatorname{tr}(A)X - (a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21} - a_{13}a_{31} - a_{23}a_{32})X + \det A.$$

Donc A est à diagonale propre si et seulement si

$$\chi_A(X) = (a_{11} - X)(a_{22} - X)(a_{33} - X) = -X^3 + \operatorname{tr} AX^2 - (a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33})X + a_{11}a_{22}a_{33},$$

et par identification on obtient :

$$\det A = \prod_{i=1}^{3} a_{ii} \text{ et } a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} = 0.$$

6. *Utilisation de la calculatrice*

(a) Algorithme :

ENTRER A.
CALCULER $a = \det A - a_{11}a_{22}a_{33}$ ET $b = a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} = 0$.
SI $a = 0$ ET $b = 0$, SORTIR LE RÉSULTAT : A EST À DIAGONALE PROPRE.
SINON, SORTIR LE RÉSULTAT : A EST NON À DIAGONALE PROPRE.

(b) D'après la question 5., on vérifie facilement que les matrices A_1, $A_3 = M(4)$, A_4, A_5, A_6, A_8 sont des matrices à diagonale propres.

(c) L'étude des exemples précédents, "montre" qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice, d'ordre 3, $A = (a_{ij})_{(1\leq i,j\leq 3)}$ à diagonale propre soit telle que $A^{-1} \in \mathcal{E}_3$ est que $a_{12}a_{21} = a13a_{31} = a_{23}a_{32} = 0$.

III. EXEMPLES DE MATRICES PAR BLOCS

7. Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-r}$. Alors si $A = I_r$ ou $C = I_{n-r}$, en développant par rapport à la première colonne dans le premier cas, ou par rapport à la dernière linge dans le second, on a $\det M = \det A \det C$. Le cas général se découle de la décomposition :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_{r-p} \end{pmatrix}.$$

8. (a) A_5 étant à diagonale propre, donc la matrice $M = \begin{pmatrix} A_5 & 0 \\ B & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ répond à la question ; elle contient 13 éléments non nuls.

(b) Méthode directe : posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ (le choix de B n'intervient pas). Alors $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathcal{E}_4$ si et seulement si $\chi_M(X) = (a-X)(d-X)(e-X)(h-X)$. Mais $\chi_M(X) = \chi_A(X)\chi_C(X) = [(X^2 - (a+d)X + ad - bc][X^2 - (e+h)X + eh - gf]$ et par identification on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a + d = e + h \\ ad - bc = eh \\ ad = eh - gf \end{cases}$$

On choisit, par exemple, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

IV. Quelques propriétés

9. $A = (a_{ij})_{(1\leq i,j\leq n)}$ étant à diagonale propre, donc $\chi_A(X) = \prod\limits_{i=1}^{n}(a_{ii} - X)$. Si $a = 0$ le résultat est évident. Supposons $a \neq 0$ et posons $M = aA + bI_n$, donc

$$\chi_M(X) = \det(aA+bI_n-XI_n) = a^n \det\left[A - \left(\frac{X-b}{a}\right)\right] I_n = a^n \prod_{i=1}^{n}\left(a_{ii} - \frac{X-b}{a}\right) = \prod_{i=1}^{n}(aa_{ii}+b-X),$$

donc $aA + bI_n$ est à diagonale propre, de même pour $a^tA + bI_n$ puisque

$$\det(a^tA + bI_n - XI_n) = \det(aA + bI_n - XI_n).$$

10. Soit $A \in E_n$, montrons qu'il une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de G_n telle que $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$. En effet, $\mathrm{Sp}(A)$ étant fini, donc pour k assez grand la matrice de terme général $A_k = A - \dfrac{1}{k+1}I_n$ est inversible, dans $\mathcal{E}_n$ (question précédente) et $\lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} A_k = A$.

11. *Matrices trigonalisables*
    (a) La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est trigonalisable (même diagonalisable car elle est symétrique), mais elle n'est pas à diagonale propre puisque $\chi_A(X) = X(X-2)$.
    (b) Le polynôme caractéristique d'une matrice à diagonale propre est scindé, donc toute matrice à diagonale propre est trigonalisable.
    (c) On sait qu'une matrice A est semblable à une matrice triangualaire si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et que toute matrice triangulaire est à diagonale propre, donc une matrice A est semblable à une matrice à diagonale propre si et seulement si χ_A est scindé.

12. Si $A = (a_{ij})_{(1\leq i,j\leq n)}$, on a, par exemple,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix},$$

c'est la somme de deux matrices triangualaires, donc à diagonale propre.
La somme des matrices à diagonale propre $A = \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas à diagonale propre, donc $\mathcal{E}_n$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

V. Matrices symétriques et matrices antisymétriques

13. *Question préliminaire*
Si $A = (a_{ij})_{(1\leq i,j\leq n)}$, alors $\mathrm{tr}({}^tAA) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2$.

14. *Matrices symétriques à diagonale propre*
    (a) Si A est symétrique de spectre $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$, alors $\mathrm{Sp}(A^2) = \{\lambda_1^2, ..., \lambda_n^2\}$, alors

$$\mathrm{tr}({}^tAA) = \mathrm{tr}(A^2) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$$

(b) Si A est symétrique à diagonale propre, alors $Sp(A) = \{a_{11}, ..., a_{nn}\}$ et donc

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2$$

d'où $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$. On en déduit que A est une matrice diagonale et réciproquement. En conclusion, l'ensemble des matrices symétriques à diagonale propre se réduit à l'ensemble les matrices diagonales.

15. *Matrices antisymétriques à diagonale propre*

(a) A étant antsymétrique, donc $a_{ii} = 0$ pour tout i, comme elle est à diagonale propre, alors Sp$(A) = \{0\}$, ainsi $A^n = 0$ (d'après le théorème Cayly Hamilton).
On a $({}^tAA)^n = (-AA)^n = (-1)^n A^{2n} = 0$.

(b) ${}^tAA$ est symétrique, donc diagonalisble et puisque $({}^tAA)^n = 0$, alors 0 est la seule valeur propre et donc son polynôme minimal vaut X et par conséquent ${}^tAA = 0$.

(c) Comme ${}^tAA = 0$ alors $\mathrm{tr}({}^tAA) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0$, donc $a_{ij} = 0$ pour tout couple (i, j) et par suite $A = 0$.

VI. Dimension maximale d'un espace vectoriel inclus dans $\mathcal{E}_n$

16. *Question préliminaire*

D'après le cours $\dim \mathcal{A}_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

17. On a $\dim(F + \mathcal{A}_n) = \dim F + \dim \mathcal{A}_n - \dim F \cap \mathcal{A}_n$, mais d'après la question 15., $\dim(F \cap \mathcal{A}_n) = 0$, donc $\dim F \leq n^2 - \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$. ($n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)
La réponse à cette partie de question se trouve dans la question 18., l'ensemble des matrices triagulaires supérieures, par exemple, est un sous-espace vectoriel de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et inclus dans $\mathcal{E}_n$. Donc la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$ est $\dfrac{n(n+1)}{2}$

18. L'ensemble des matrices par blocs $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & T \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$ et T une matrice triangulaire inférieure d'ordre $n-1$, est un sous-espace vectoriel de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et inclus dans $\mathcal{E}_n$.

• • • • • • • • • • • • •

M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc
E-mail : medtarqi@yahoo.fr