Corrigé possible pour HEC 07 (**option technologique**) [1]

Exercice 1

1) Simple vérification en multipliant par e^x au numérateur et au dénominateur.
2) a) Pour $g(x) = \ln(1+e^x)$, on a $g'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.
On a $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+e^{-x}} = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx = \Big[\ln(1+e^x)\Big]_0^1 = \ln(1+e) - \ln 2$.
b) $u_0 + u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = 1$ donc $u_1 = 1 - \ln(1+e) + \ln 2$.
3) $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x} - e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(e^{-x}-1)}{1+e^{-x}}dx \leq 0$ donc $(u_n)_n$ décroît.
Comme de plus elle est minorée par 0 ($u_n \geq 0$) on peut conclure qu'elle converge.
4) a) $u_n + u_{n-1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx} + e^{-(n-1)x}}{1+e^{-x}}dx = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(1+e^x)}{1+e^{-x}}dx = \int_0^1 e^{(1-n)x}dx = \Big[\frac{e^{(1-n)x}}{1-n}\Big]_0^1 = \frac{1-e^{-n+1}}{n-1}$
b) En faisant tendre n vers $+\infty$ dans 4)a), on a $2l = 0$ donc $l = 0$.
5) a) Simple récurrence.
b) La série proposée vaut alors u_1 car u_n tend vers 0.

Exercice 2

1) a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
b) $A^3 = 0$ donc $\forall k \geq 3,\ A^k = 0$.
c) On a alors $S_n = I + A + \dfrac{1}{2}A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
d) $S = S_n$.
2) a) $A^2 = 3A$.
b) Une récurrence immédiate donne $A^k = 3^{k-1}A$.
c) $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}A^k = I + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k}{k!}A = I + \frac{1}{3}\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{3^k}{k!} - 1\Big)A$.
d) Ainsi $S = I + \dfrac{1}{3}(e^3 - 1)A$.
3) a) On a $A^2 - 2A + I = 0$
b) Simple récurrence.
c) $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}A^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(kA - (k-1)I) = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k!}A - \sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{k!}I$.
d) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k-1}{k!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = -\frac{1}{n!}$.

[1] email : hedi.joulak@gmail.com

Donc $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} = 0$.

e) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$.

f) Ainsi $S = eA$.

Exercice 3

1) a) $P(A \cap C) = P(A \cap C/B)P(B) + P(A \cap C/\overline{B})P(\overline{B}) = P(A \cap C \cap B) + P(A \cap C \cap \overline{B})$ car $\{B, \overline{B}\}$ forme un système complet d'événements.

b) $P_C(A) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A \cap C \cap B)}{P(C)} + \frac{P(A \cap C \cap \overline{B})}{P(C)}$

$= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} \times \frac{P(B \cap C)}{P(C)} + \frac{P(A \cap C \cap \overline{B})}{P(\overline{B} \cap C)} \times \frac{P(\overline{B} \cap C)}{P(C)}$

$= P_{B \cap C}(A) + P_C(B) + P_{\overline{B} \cap C}(A)P_C(\overline{B})$.

2) a) $P_{F_1 \cap F_2}(E) = 1$ car c'est un événement certain.

b) Obtenir 2 faces consécutives avant l'apparition éventuelle de 2 piles consécutifs sachantqu'on a eu face-pile juste avant revient au même événement sachant qu'on a obtenur pile juste avant (car on veut l'apparition de 2 piles donc dans le face-pile le face est inutile).

c) On a $P_{F_1}(E) = P_{F_1 \cap F_2}(E)P_{F_1}(F_2) + P_{\overline{F_2} \cap F_1}(E)P_{F_1}(\overline{F_2}) = q + P_{\overline{F_1}}(E) \times p$

3) a) On a $P_{\overline{F_1} \cap \overline{F_2}}(E) = 0$

b) $P_{\overline{F_1} \cap F_2}(E) = P_{F_1}(E)$ par le même raisonnement qu'en 2)b).

c) On a $P_{\overline{F_1}}(E) = P_{\overline{F_1} \cap \overline{F_2}}(E)P_{\overline{F_1}}(\overline{F_2}) + P_{F_2 \cap \overline{F_1}}(E)P_{\overline{F_1}}(F_2) = P_{F_1}(E) \times q$

4) a) $P_{F_1}(E) = q + p \times P_{\overline{F_1}}(E) = q + pqP_{F_1}(E)$ donc $P_{F_1}(E) = \frac{q}{1-pq}$ et $P_{\overline{F_1}}(E) = \frac{q^2}{1-pq}$.

b) $P(E) = P_{F_1}(E)P(F_1) + P_{\overline{F_1}}(E)P(\overline{F_1}) = \frac{(1+p)q^2}{1-pq}$

5) a) De la même manière, no a $P(G) = \frac{(1+q)p^2}{1-pq}$.

b) $P(G) + P(E) = \frac{(1+q)p^2 + (1+p)q^2}{1-pq} = \frac{p^2 + q^2 + pq(q+p)}{1-pq} = \frac{p^2+q^2+pq}{1-pq} = \frac{(p+q)^2 - pq}{1-pq} = 1$

On est donc certain d'être dans la configuration E ou G.

Exercice 4

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f = 1$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) = \frac{3}{5} \iff \int_0^1 ax^2 + b = 1$ et $\int_0^1 ax^3 + bx = 3/5$

$\iff \begin{cases} a/3 + b = 1 \\ a/4 + b/2 = 3/5 \end{cases} \iff a = 6/5$ et $b = 3/5$.

2) $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_0^1 ax^4 + bx^2 dx - \frac{9}{25} = \frac{a}{5} + \frac{b}{3} - \frac{9}{25} = \frac{2}{25}$.

3) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, \text{ si } x < 0 \\ a\frac{x^3}{3} + bx, \text{ si } x \in [0,1] \\ 1, \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

4) a) Les variables aléatoires X_i étant indépendantes et ayant la même densité de probabilité, $F_n(x) = f(x)^n$.

b) S_n a pour support $[0,1]$ donc son espérance est $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_n(x)dx = \int_0^1 xf_n(x)dx$.

c) $E(S_n) = \int_0^1 xf_n(x)dx = [xF_n(x)]_0^1 - \int_0^1 F_n = 1 - \int_0^1 F_n$

d) On a simplement majoré x^3 par 1.

e) On a le résultat en vérifiant que $G'_n = g_n$.

f) $\int_0^1 F_n \leq \int_0^1 g_n = G_n(1) - G_n(0) = \frac{5}{3(n+1)}(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}) \to 0$ donc $E(S_n) \to 1$.