Michel Carré, lycée Joffre, Montpellier

Mines-Ponts 97, filière MP, première épreuve

• Partie I

1. a) Un calcul très simple fournit $\psi(x) = \dfrac{6}{\sin^4 x} - \dfrac{4}{\sin^2 x} = R(\sin x)$, avec $R = \dfrac{6}{X^4} - \dfrac{4}{X^2}\cdot$

   b) En élevant au carré l'égalité (élémentaire !) admise par l'énoncé, on obtient :

   $\left(\dfrac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 = e^{-2i(n-1)x} \sum\limits_{0 \leqslant p,q \leqslant n-1} e^{2i(p+q)x} = \sum\limits_{0 \leqslant p,q \leqslant n-1} e^{2i(p+q-n+1)x}$. Posons $Q_n(t) = \sum\limits_{0 \leqslant p,q \leqslant n-1} e^{i(p+q-n+1)t}$;

   Q_n est bien un polynôme trigonométrique de degré $n-1$ tel que $\left(\dfrac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 = Q_n(2x)$ pour tout $x \in I$.

   c) Les deux questions précédentes donnent :

   $\psi(x)\, \sin^4 nx = (6 - 4\sin^2 x)\left(\dfrac{\sin nx}{\sin x}\right)^4 = (4 + 2\cos 2x)\, Q_n(2x)^2 = (4 + e^{2ix} + e^{-2ix})\, Q_n(2x)^2$.

   Posons $P_n(t) = (4 + e^{it} + e^{-it})\, Q_n(t)^2$; P_n est un polynôme trigonométrique de degré $2(n-1)+1 = 2n-1$ tel que $\psi(x)\, \sin^4 nx = P_n(2x)$ pour tout $x \in I$.

   La relation ci-dessus détermine entièrement $P_n(t)$ sur $]0, 2\pi[$, donc aussi sur $[0, 2\pi]$ par continuité, et finalement sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité. On en déduit l'unicité de P_n en tant que fonction, et aussi l'unicité des coefficients $a_{n,k}$, du fait de la liberté de la famille de fonctions $\big(t \longmapsto e^{ikt}\big)_{-2n+1 \leqslant k \leqslant 2n-1}\cdot$

2. $\pi_n^f(x) = \dfrac{1}{4n^3} \sum\limits_{k=-2n+1}^{2n-1} \left(a_{n,-k} \cdot \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t)\, \mathrm{d}t\right) e^{ikx} = \dfrac{1}{8\pi n^3} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-2n+1}^{2n-1} a_{n,-k}\, e^{ik(x-t)}\right) f(t)\, \mathrm{d}t.$

   D'où, en reconnaissant P_n et en utilisant la 2π-périodicité de la fonction intégrée :

   $\pi_n^f(x) = \dfrac{1}{8\pi n^3} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_n(t-x)\, f(t)\, \mathrm{d}t = \dfrac{1}{8\pi n^3} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} P_n(s)\, f(x+s)\, \mathrm{d}s = \dfrac{1}{8\pi n^3} \int_0^{2\pi} P_n(s)\, f(x+s)\, \mathrm{d}s.$

   Enfin, en posant $s = 2u$: $\pi_n^f(x) = \dfrac{1}{4\pi n^3} \displaystyle\int_0^{\pi} P_n(2u)\, f(x+2u)\, \mathrm{d}u = \dfrac{1}{4\pi n^3} \int_0^{\pi} \psi(u) \sin^4(nu)\, f(x+2u)\, \mathrm{d}u.$

3. a) La restriction à $[-\pi, \pi]$ de φ_u est continue sur $[-\pi, \pi[$ et admet e^{-iu} pour limite à gauche au point π ; elle est donc continue par morceaux. On en déduit que φ_u est aussi continue par morceaux.

   $c_n(\varphi_u) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n+u/\pi)x}\, \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2\pi} \left[-\dfrac{e^{-i(n+u/\pi)x}}{i(n+u/\pi)}\right]_{-\pi}^{\pi} = \dfrac{1}{2i(n\pi+u)} \Big((-1)^n e^{iu} - (-1)^n e^{-iu}\Big) = \dfrac{(-1)^n \sin u}{n\pi + u}\cdot$

   b) La formule de Parseval pour φ_u s'écrit : $1 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} |\varphi_u(x)|^2\, \mathrm{d}x = \lim_{p \to +\infty} \sum_{k=-p}^{p} |c_k(\varphi_u)|^2 = \lim_{p \to +\infty} \sum_{k=-p}^{p} \dfrac{\sin^2 u}{(u+k\pi)^2}\cdot$

   Par conséquent, $\lim\limits_{p \to +\infty} \sum\limits_{k=-p}^{p} \dfrac{1}{(u+k\pi)^2} = \dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot$

   c) Pour $k \geqslant 2$ et $u \in I$, posons $g_k(u) = \dfrac{1}{(u+k\pi)^2} + \dfrac{1}{(u-k\pi)^2}\cdot$ Le résultat du b) peut alors se réécrire :

   $$(*) \quad \forall u \in I,\ \frac{1}{\sin^2 u} = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{(u+\pi)^2} + \frac{1}{(u-\pi)^2} + \sum_{k=2}^{+\infty} g_k(u).$$

   Les fonctions g_k sont de classe C^2 sur I, avec $g_k'(u) = -\dfrac{2}{(u+k\pi)^3} - \dfrac{2}{(u-k\pi)^3}$ et $g_k''(u) = \dfrac{6}{(u+k\pi)^4} + \dfrac{6}{(u-k\pi)^4}\cdot$

   Pour tout $u \in I$, $|g_k'(u)| \leqslant \dfrac{4}{\pi^3(k-1)^3}$ et $|g_k''(u)| \leqslant \dfrac{12}{\pi^4(k-1)^4}\cdot$ On en déduit que les séries $\sum\limits_{k \geqslant 2} g_k'$ et $\sum\limits_{k \geqslant 2} g_k''$ sont normalement convergentes sur I, ce qui permet de dériver deux fois $(*)$ terme à terme ; il vient ainsi :

   $$\forall u \in I,\ \psi(u) = \frac{6}{u^4} + \frac{6}{(u+\pi)^4} + \frac{6}{(u-\pi)^4} + \sum_{k=2}^{+\infty} g_k''(u) = 6 \lim_{p \to +\infty} \sum_{k=-p}^{p} \frac{1}{(u+k\pi)^4}\cdot$$

4. a) f est continue par morceaux, donc elle est bornée sur le segment $[0,2\pi]$, et aussi sur $\mathbb{R}$ entier par 2π-périodicité.

   b) G est le produit de la fonction $t \longmapsto g(2t)$, qui est continue par morceaux et de la fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin^4 nt}{t^4}$ prolongée par continuité en 0, qui est continue ; G est donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
   Par ailleurs, g est bornée d'après a), donc $G(t) = \underset{t\to\pm\infty}{\mathrm{O}}\left(\dfrac{1}{t^4}\right)$, donc G est intégrable sur $\mathbb{R}$.

   c) p étant fixé, on peut écrire $\gamma_p(u) = \sum\limits_{k=-p}^{p} \lambda_k(u)$, avec $\lambda_k(u) = \dfrac{g(2u)\,\sin^4 nu}{(u+k\pi)^4}\cdot$

   . $\lambda_0(u) = \dfrac{g(2u)\,\sin^4 nu}{u^4} \xrightarrow[u\to 0]{} n^4 \lim\limits_{0^+} g$ et, pour $k \neq 0$, $\lambda_k(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0$.

   . $\lambda_{-1}(u) = \dfrac{g(2u)\,\sin^4 n(u-\pi)}{(u-\pi)^4} \xrightarrow[u\to \pi]{} n^4 \lim\limits_{(2\pi)^-} g$ et, pour $k \neq -1$, $\lambda_k(u) \xrightarrow[u\to \pi]{} 0$.

   Ainsi, chaque fonction λ_k se prolonge par continuité en 0 et en π ; il en est donc de même pour leur somme γ_p.

   d) γ_p est continue par morceaux sur I et, d'après c), elle est bornée sur I. Par conséquent, γ_p est intégrable sur I.
   En utilisant successivement la linéarité de l'intégrale, le changement de variable $t = u + k\pi$, la π-périodicité des fonctions $t \longrightarrow g(2t)$ et $t \longrightarrow \sin^4 nt$, et enfin la relation de Chasles, on obtient :

$$\int_0^\pi \gamma_p(u)\ \mathrm{d}u = \sum_{k=-p}^{p} \int_0^\pi \frac{g(2u)\,\sin^4 nu}{(u+k\pi)^4}\ \mathrm{d}u = \sum_{k=-p}^{p} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{g(2t)\,\sin^4 nt}{t^4}\ \mathrm{d}t = \int_{-p\pi}^{(p+1)\pi} G(t)\ \mathrm{d}t.$$

   e) . D'après 3.c), la suite (γ_p) converge simplement sur I vers la fonction $u \longmapsto \dfrac{1}{6}\, g(2u)\,\sin^4(nu)\,\psi(u)$, qui est continue par morceaux.

   . La suite croissante $\left(\sum\limits_{k=-p}^{p} \dfrac{1}{(u+k\pi)^4}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est majorée par sa limite $\dfrac{1}{6}\,\psi(u)$, donc, en utilisant de nouveau 1.a) :

$$|\gamma_p(u)| \leqslant \frac{1}{6}\,|g(2u)|\,\sin^4(nu)\,\psi(u) \leqslant \frac{1}{6}\,\|g\|_\infty \sin^4(nu)\cdot\frac{6}{\sin^4 u} = \|g\|_\infty \frac{\sin^4 nu}{\sin^4 u}\cdot$$

   La fonction $u \longmapsto \dfrac{\sin^4 nu}{\sin^4 u}$ se prolonge en une fonction continue sur $[0,\pi]$, donc elle est intégrable sur $]0,\pi[$.

   . Le théorème de convergence dominée s'applique et donne : $\displaystyle\int_0^\pi \gamma_p(u)\ \mathrm{d}u \xrightarrow[p\to+\infty]{} \int_0^\pi \frac{1}{6}\,g(2u)\,\sin^4(nu)\,\psi(u)\ \mathrm{d}u.$

   Compte tenu du b), on obtient alors en faisant tendre p vers $+\infty$ dans l'égalité du d) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{6}\int_0^\pi g(2u)\,\sin^4(nu)\,\psi(u)\ \mathrm{d}u.$$

5. a) La fonction $t \longmapsto f\left(x + \dfrac{2t}{n}\right)\dfrac{\sin^4 t}{t^4}$ est le produit de $t \longmapsto f\left(x+\dfrac{2t}{n}\right)$, qui est continue par morceaux, et de $t \longmapsto \dfrac{\sin^4 t}{t^4}$, qui se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$; elle est donc continue par morceaux. D'autre part, f étant bornée, cette même fonction est dominée par $t \longmapsto 1/t^4$ en $+\infty$ et en $-\infty$; elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$.

   b) x étant fixé, on reprend l'expression de $\pi_n^f(x)$ obtenue au 2. et on applique 4.e) à la fonction $f_x\ :\ u \longmapsto f(x+u)$:

$$\pi_n^f(x) = \frac{1}{4\pi n^3}\int_0^\pi \psi(u)\sin^4(nu)\,f_x(2u)\ \mathrm{d}u = \frac{3}{2\pi n^3}\int_{\mathbb{R}} f_x(2t)\,\frac{\sin^4 nt}{t^4}\ \mathrm{d}t = \frac{3}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f\left(x+\frac{2s}{n}\right)\frac{\sin^4 s}{s^4}\ \mathrm{d}s \quad (s = nt).$$

   c) Avec l'expression du 2., il vient : $\pi_1^f(x) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^\pi \psi(u)\,\sin^4(u)\ \mathrm{d}u = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi (6-4\sin^2 u)\ \mathrm{d}u = \frac{1}{4\pi}\left(6\pi-4\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

   En reportant dans l'expression du b), on obtient $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^4 t}{t^4}\ \mathrm{d}t = \frac{2\pi}{3}\cdot$

   Enfin, cette même expression du b) montre que $\pi_n^f(x) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

• **Partie II**

1. a) $|F(x,h)| \leqslant |f(x+h)| + |f(x)| \leqslant 2\,\|f\|_\infty$, d'où, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'existence de $\omega_f(t)$ comme borne supérieure d'une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

   b) $\omega_f(0) = 0$ de façon évidente. Si $t \leqslant t'$, on a $|F(x,h)| \leqslant \omega_f(t')$ pour tout $(x,h) \in \mathbb{R}\times[0,t']$, et *a fortiori* pour tout $(x,h) \in \mathbb{R}\times[0,t]$, donc $\omega_f(t) \leqslant \omega_f(t')$ par définition de la borne supérieure ; ω_f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque

. Le choix des propriétés admises par l'énoncé semble peu judicieux. Il aurait été bien plus utile pour la question 2. d'admettre la *sous-additivité* de ω_f :

$$\text{iv/} \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2,\ \omega_f(a+b) \leqslant \omega_f(a) + \omega_f(b).$$

. La propriété i/ est alors immédiate par récurrence sur n. La propriété ii/ se déduit de i/ en prenant $n = \lfloor t \rfloor$, compte tenu de la croissance de ω_f. Quant à la propriété iii/, qui se démontre aisément, la question est surtout de savoir à quoi elle sert… (*cf* 3.a)).

. Établissons donc iv/. Soit $(x,h) \in \mathbb{R} \times [0,\, a+b]$; deux cas se présentent :

- si $h \leqslant a$, alors $|F(x,h)| \leqslant \omega_f(a) \leqslant \omega_f(a) + \omega_f(b)$.
- si $a < h \leqslant a+b$, on écrit $h = a + h'$, avec $0 < h' \leqslant b$, et il vient :
  $|F(x,h)| = |f(x+a+h') - f(x)| \leqslant |f(x+a) - f(x)| + |f(x+a+h') - f(x+a)| \leqslant \omega_f(a) + \omega_f(b)$.

En passant à la borne supérieure, on conclut que $\omega_f(a+b) \leqslant \omega_f(a) + \omega_f(b)$.

2. Soient deux réels t et t' tels que $0 \leqslant t \leqslant t'$. La croissance de ω_f et la propriété iv/ établie dans la remarque ci-dessus montrent que :

$$0 \leqslant \omega_f(t') - \omega_f(t) \leqslant \omega_f(t'-t).$$

Fixons $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Étant continue et périodique, f est uniformément continue, ce qui assure par définition même l'existence d'un $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|F(x,h| \leqslant \varepsilon$ pour tout $(x,h) \in \mathbb{R} \times [0,\alpha]$, c'est-à-dire tel que $\omega_f(\alpha) \leqslant \varepsilon$.
Par conséquent, si $0 \leqslant t'-t \leqslant \alpha$, on aura $0 \leqslant \omega_f(t') - \omega_f(t) \leqslant \omega_f(t'-t) \leqslant \omega_f(\alpha) \leqslant \varepsilon$. Cela montre que ω_f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

3. a) *Remarque* : l'hypothése selon laquelle f n'est pas constante ne sera pas utilisée, et est donc inutile.

On a établi au **I**-5. les égalités $\pi_n^f(x) = \dfrac{3}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f\left(x + \frac{2t}{n}\right) \frac{\sin^4 t}{t^4}\, \mathrm{d}t$ et $1 = \dfrac{3}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^4 t}{t^4}\, \mathrm{d}t$.

On peut donc écrire $\pi_n^f(x) - f(x) = \dfrac{3}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(f\left(x + \frac{2t}{n}\right) - f(x) \right) \frac{\sin^4 t}{t^4}\, \mathrm{d}t$, puis :

$$\left|\pi_n^f(x) - f(x)\right| \leqslant \frac{3}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left| f\left(x + \frac{2t}{n}\right) - f(x) \right| \frac{\sin^4 t}{t^4}\, \mathrm{d}t \leqslant \frac{3}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \omega_f\Big(\frac{2|t|}{n}\Big) \frac{\sin^4 t}{t^4}\, \mathrm{d}t = \frac{3}{\pi} \int_{\mathbb{R}_+} \omega_f\Big(\frac{2t}{n}\Big) \frac{\sin^4 t}{t^4}\, \mathrm{d}t.$$

Le majorant obtenu ne dépend pas de x, par conséquent $\|\pi_n^f - f\|_\infty \leqslant \dfrac{3}{\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \omega_f\Big(\frac{2t}{n}\Big) \frac{\sin^4 t}{t^4}\, \mathrm{d}t$.

b) D'après la propriété admise ii/, $\omega_f\left(\dfrac{2t}{n}\right) \leqslant (1+2t)\,\omega_f\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$. En reportant cette majoration dans l'inégalité du a), et compte tenu de l'évidente intégrabilité sur $]0,\, +\infty[$ de la fonction $t \longmapsto \dfrac{(1+2t)\, \sin^4 t}{t^4}$, on obtient :

$$\|\pi_n^f - f\|_\infty \leqslant A\, \omega_f\Big(\frac{1}{n}\Big), \text{ où } A = \frac{3}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{(1+2t)\, \sin^4 t}{t^4}\, \mathrm{d}t.$$

c) f étant continue, ω_f l'est aussi d'après 2., donc $\omega_f\Big(\dfrac{1}{n}\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \omega_f(0) = 0$. On déduit donc du b) que la suite (π_n^f) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$; cela démontre le théorème de Weierstrass trigonométrique.

4. a) La continuité de f n'a été utilisée qu'en 3.c). L'inégalité (3) est donc également valable pour $f \in C_{2\pi}^m$.

b) . L'implication iii/ $\Longrightarrow$ ii/ a été prouvée au 2.
. L'implication ii/ $\Longrightarrow$ i/ est évidente.
. Supposons i/. L'inégalité (3) montre alors que la suite (π_n^f) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
Chaque fonction π_n^f est continue, donc f est continue par théorème. Ainsi, i/ $\Longrightarrow$ iii/.

5. Si f est de classe C^1, f' est continue et 2π-périodique, donc bornée ; l'inégalité des accroissements finis donne $|F(x,h)| \leqslant h\,\|f'\|_\infty$, d'où on déduit que $\omega_f(t) \leqslant t\,\|f'\|_\infty$.

En appliquant cette inégalité à $\dfrac{2t}{n}$ au lieu de t, le 3.a) donne $\|\pi_n^f - f\|_\infty \leqslant \dfrac{6\,\|f'\|_\infty}{\pi n} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 t}{t^3}\, \mathrm{d}t$.

Mais $\dfrac{6}{\pi} < 2$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 t}{t^3}\, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t\, \mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Finalement, $\|\pi_n^f - f\|_\infty \leqslant \dfrac{2\|f'\|_\infty}{n}$.