*Michel Carré, lycée Joffre, Montpellier*

# Centrale 1996, filières M et P', première épreuve

## • Partie I

L'égalité (2) se prouve immédiatement à partir de (1), par récurrence sur $n$ .

En remplaçant $x$ par $x-na$ dans (2), il vient $F(x-na) = \lambda^n F(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f\big(x-(n-k)a\big) = \lambda^n F(x) + \sum_{j=1}^{n} \lambda^{n-j} f(x-ja)$.
En multipliant les deux membres par $\lambda^{-n}$, on obtient (3).

## • Partie II

1) $\mathscr{L}$ n'est évidemment pas vide. Pour $(f,g) \in \mathscr{L}^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, l'inégalité triangulaire montre que $\alpha f + \beta g$ est $(|\alpha| K_f + |\beta| K_g)$-lipschitzienne, donc appartient à $\mathscr{L}$.

2) Si $|f'|$ est majorée par $M$, l'inégalité des accroissements finis montre que $f$ est $M$-lipschitzienne.

   Réciproquement, si $f$ est $M$-lipschitzienne, on a $\left| \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \right| \leqslant M$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq y$.

   $x$ étant fixé, le passage à la limite lorsque $y$ tend vers $x$ donne $|f'(x)| \leqslant M$ ; $f'$ est donc bornée.

3) Notons $M_f$ et $M_g$ des majorants de $|f|$ et $|g|$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :
$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| = \Big| \big(f(x)-f(y)\big) g(x) + f(y)\big(g(x)-g(y)\big) \Big| \leqslant (K_f M_g + M_f K_g)\,|x-y|.$$
   On en déduit que $fg$ appartient à $\mathscr{L}$.
   Le résultat tombe en défaut si $f$ ou $g$ n'est pas bornée. Par exemple, avec $f(x) = x$ et $g(x) = \sin x$, on a $(f,g) \in \mathscr{L}^2$ d'après 2), mais $fg \notin \mathscr{L}$, car sa dérivée $x \longmapsto \sin x + x\cos x$ n'est pas bornée.

4) $|f(x)| \leqslant |f(x) - f(0)| + |f(0)| \leqslant K_f\,|x| + |f(0)|$.

5) Soient $x$ et $y$ deux réels tels que $x - y \geqslant 0$. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant x-y$ et posons $h = \dfrac{x-y}{n} \in [0,1]$. Il vient :
$$|f(x)-f(y)| = |f(y+nh) - f(y)| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \Big( f\big(y+(i+1)h\big) - f(y+ih) \Big) \right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \Big| f\big(y+(i+1)h\big) - f(y+ih) \Big|.$$
   L'hypothèse sur $f$ donne $|f(x)-f(y)| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} Mh = M\,nh = M(x-y)$.

   Pour $x$ et $y$ quelconques, on aura encore $|f(x)-f(y)| \leqslant M\,|x-y|$. $f$ appartient donc à $\mathscr{L}$.

## • Partie III

A1) a) Avec les notations du II.4), $|\lambda^n f(x+na)| \leqslant |\lambda|^n \big(A|x+na| + B\big) \leqslant A|a|\,n|\lambda|^n + (A|x|+B)|\lambda|^n$.
Comme $|\lambda| < 1$, on sait que $|\lambda|^n = \mathrm{o}(1/n^3)$, d'où $|\lambda^n f(x+na)| = \mathrm{o}(1/n^2)$.
Par comparaison avec une série de Riemann, on en déduit que $\sum \lambda^n f(x+na)$ converge absolument.

b) Supposons d'abord qu'il existe $F \in \mathscr{L}$ qui vérifie (1). En faisant tendre $n$ vers $+\infty$ dans (2), on déduit du a) que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x+na)$. En effet, le a) est aussi applicable à $F$, ce qui montre en particulier que la suite $\big(\lambda^n F(x+na)\big)$ converge vers 0.

Réciproquement, la fonction $F\ :\ x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x+na)$ est bien définie d'après le a) et un calcul immédiat montre qu'elle vérifie (1). Il reste à prouver que $F$ appartient à $\mathscr{L}$ ; pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :
$$|F(x)-F(y)| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \Big| \lambda^n \big(f(x+na) - f(y+na)\big) \Big| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \big(|\lambda|^n K_f |x-y|\big) = \frac{K_f}{1-|\lambda|}\,|x-y|,$$ d'où le résultat.

A2) a) $f_1$ est 0-lipschitzienne et appartient donc à $\mathscr{L}$. On a directement $F_1(x) = \dfrac{1}{1-\lambda}$.

b) $f_2$ appartient à $\mathscr{L}$ car elle est dérivable à dérivée bornée. $F_2(x)$ est la partie réelle de $Z(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n e^{i(x+na)}$.
$$Z(x) = e^{ix} \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda e^{ia})^n = \frac{e^{ix}}{1-\lambda e^{ia}} = \frac{e^{ix}(1-\lambda e^{-ia})}{1-2\lambda\cos a + \lambda^2},\ \text{ donc }\ F_2(x) = \frac{\cos x - \lambda\cos(x-a)}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2}.$$

c) $f_3$ appartient à $\mathscr{L}$ car elle est dérivable à dérivée bornée. $F_3(x) = \mathrm{Im}\big(Z(x)\big) = \dfrac{\sin x - \lambda\sin(x-a)}{1-2\lambda\cos a+\lambda^2}$.

B1) a) Il suffit d'appliquer le A1)a) à $-a$ et à $1/\lambda$, qui vérifie $|1/\lambda| < 1$.

b) En remplaçant $x$ par $x-a$ et en divisant par $-\lambda$, (1) se réécrit : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) - \frac{1}{\lambda} F(x-a) = -\frac{1}{\lambda} f(x-a)$.

En posant $b=-a$, $\mu = \frac{1}{\lambda}$ et $g(x) = -\frac{1}{\lambda} f(x-a)$, cela devient : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) - \mu F(x+b) = g(x)$.

La fonction $g$ appartient évidemment à $\mathscr{L}$. Comme $|\mu| < 1$, on peut appliquer A1)b) : (1) admet donc une unique solution $F$ dans $\mathscr{L}$ et elle est donnée par :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^n g(x+nb) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-n-1} f\big(x-(n+1)a\big) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x-na).$$

B2) Les calculs sont très semblables à ceux du A2). On trouve pour $F_1, F_2$ et $F_3$ les mêmes expressions qu'en A2).

• **Partie IV**

A1) Si $F$ vérifie (1) et appartient à $\mathscr{L}$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $|f(x)| = |F(x) - F(x+a)| \leqslant K_F|a|$.

A2) a) Toute fonction constante non nulle convient.

b) Il n'y a pas unicité, car si $F$ est une solution de (1) dans $\mathscr{L}$, $F+c$ en est une autre, pour tout réel non nul $c$.

A3) a) $F_{2,\lambda}(x) \xrightarrow[\lambda\to 1]{} \dfrac{\cos x - \cos(x-a)}{2\,(1-\cos a)}$ ; notons $F(x)$ cette limite. $F$ est lipschitzienne car $\mathscr{L}$ est un sous-e.v. de $\mathscr{F}$.

En passant à la limite quand $\lambda$ tend vers 1 dans l'égalité (1) vérifiée par $F_{2,\lambda}$, on obtient $F(x) - F(x+a) = \cos x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, $F$ vérifie bien (1) avec $\lambda = 1$.

b) Par l'absurde, supposons qu'une fonction $F$ de $\mathscr{L}$ vérifie $F(x) - F(x+2\pi) = \cos x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

L'égalité (2) s'écrit ici $F(x) - F(x+2n\pi) = n\cos x$.

En prenant $x=0$ et $x=\pi$, on obtient $F(0) - F(2n\pi) = n$ et $F(\pi) - F\big((2n+1)\pi\big) = -n$, puis, par différence, $F\big((2n+1)\pi\big) - F(2n\pi) = 2n + F(\pi) - F(0)$, ce qui est absurde car $\big|F\big((2n+1)\pi\big) - F(2n\pi)\big| \leqslant K_F\,\pi$.

B1) a) On peut par exemple prendre la fonction $x \longmapsto \sin\frac{\pi x}{a}$, qui est bien lipchitzienne, puisque sa dérivée est bornée.

b) Comme au A2)b), si $F$ est une solution de (1) dans $\mathscr{L}$, $x \longmapsto F(x) + \sin\frac{\pi x}{a}$ en est une autre.

B2) a) $F_{2,\lambda}(x) \xrightarrow[\lambda\to -1]{} \dfrac{\cos x + \cos(x-a)}{2\,(1+\cos a)}$ ; notons $F(x)$ cette limite. Les mêmes arguments qu'au A3)a) montrent que $F \in \mathscr{L}$ et que $F$ vérifie (1) avec $\lambda = -1$.

b) Par l'absurde, supposons qu'une fonction $F$ de $\mathscr{L}$ vérifie $F(x) + F(x+\pi) = \cos x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On aurait aussi $F(x+\pi) + F(x+2\pi) = -\cos x$ et, par différence, $F(x) - F(x+2\pi) = 2\cos x$.

$F/2$ serait donc un élément de $\mathscr{L}$ vérifiant (1) avec $\lambda = 1$ et $a = 2\pi$ ; on a vu en A3)b) que c'est impossible.

B3) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $\big(f(x+n)\big)$ est décroissante et tend vers 0 ; elle est donc aussi positive et la série $\sum(-1)^n f(x+n)$ converge d'après le théorème des séries alternées.

b) Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f(x+n)$. On a $F(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n f(x+n+1) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} f(x+n)$, d'où $F(x) + F(x+1) = f(x)$ ; $F$ est donc une solution de (1).

Par le théorème des séries alternées, $0 \leqslant F(x) \leqslant f(x)$, donc $F$ tend vers 0 en $+\infty$.

Soient $x$ et $y$ deux réels tels que $0 \leqslant x-y \leqslant 1$. $F(x) - F(y) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \big(f(x+n) - f(y+n)\big)$.

L'inégalité des accroissements finis, la décroissance de $f$ et la croissance de $f'$ donnent, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$f(x+n) - f(y+n) \leqslant (x-y)\, f'(x+n) \leqslant (x-y)\, f'(y+n+1) \leqslant f(x+n+1) - f(y+n+1) \leqslant 0.$$

$F(x) - F(y)$ apparaît donc comme la somme d'une série qui satisfait aux hypothèses du théorème des séries alternées. On en déduit que $|F(x) - F(y)| \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant K_f\,(x-y)$.

D'après II.5), on peut en déduire que $F$ appartient à $\mathscr{L}$.

Soit enfin $G$ une fonction de $\mathscr{L}$, tendant vers 0 en $+\infty$ et vérifiant (1). La fonction $G-F$ est 1-antipériodique et tend vers 0 en $+\infty$, donc est nulle. $F$ est bien la seule solution de (1) dans $\mathscr{L}$ qui tend vers 0 en $+\infty$.

---