Centrale 1991, Maths I - Corrigé

Partie I : Polynômes de Newton

1°) Soit $\Gamma_k(X) = \dfrac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$; pour x compris entre 0 et $k-1$, $\Gamma_k(x)$ est nul et pour x entier supérieur ou égal à k on a : $\Gamma_k(x) = \binom{x}{k}$ entier. Pour $x = -t$ négatif on a :

$$\Gamma_k(x) = (-1)^k \frac{t(t+1)\dots(t+k-1)}{k!} = (-1)^k \binom{t+k-1}{k} \in \mathbb{Z}\,.$$

Note : $\binom{t+k-1}{k}$ est le nombre de combinaisons de t objets pris k à k avec répétition (tirage avec remise de k boules parmi t).
On a : $\Gamma_k(-1) = (-1)^k$.

2°) On a les égalités :

$$\begin{aligned} n\Gamma_n(X) &= \frac{1}{(n-1)!}\,(\,X\dots(X-n+1)\,) = (X-n+1)\Gamma_{n-1}(X) \\ \Gamma_n(X+1)-\Gamma_n(X) &= \frac{1}{n!}\big((X+1)\dots(X-n+2) - X(X-1)\dots(X-n+1)\big) \\ &= \frac{1}{n!}\big(X\dots(X-n+2)(X+1-X+n-1)\big) \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\big(X\dots(X-n+2)\big) = \Gamma_{n-1}(X) \end{aligned}$$

3°) Comme les Γ_k prennent des valeurs entières sur les entiers, les combinaisons linéaires des Γ_k à coefficients entiers font de même.
Inversement, considérons un polynome Q de degré n, prenant des valeurs entières sur $n+1$ entiers successifs $x_0, \dots, x_n$ (une progression arithmétique de raison 1). Montrons par récurrence sur n que Q est une combinaison linéaire des Γ_k à coefficients entiers. Pour $n = 0$ c'est clair. Supposons-le acquis pour tout polynôme de degré au plus $n-1$.
Soit Q de degré n ; comme le système (Γ_k) est à degrés échelonnés, c'est une base de $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$; on écrit : $Q = a_0 + a_1\Gamma_1 + \dots + a_n\Gamma_n$ et a_n n'est pas nul (degré). Soit $Q_1 = Q(X+1) - Q(X)$: c'est un polynôme ayant la même qualité, de degré inférieur à n (les X^n s'éliminent) et qui prend des valeurs entières sur n entiers successifs $x_0, \dots x_{n-1}$; donc par hypothèse de récurrence, on a :

$$Q(X+1) - Q(X) = a_1(\Gamma_1(X+1) - \Gamma_1(X)) + \dots + a_n(\Gamma_n(X+1) - \Gamma_n X)) = b_0 + \dots + b_{n-1}\Gamma_{n-1}$$

où les b_i sont des entiers. En utilisant le 2°, on obtient : $b_0 + \dots + b_{n-1}\Gamma_{n-1} = a_1\Gamma_0 + \dots + a_n\Gamma_{n-1}$ et le système des Γ_k est libre, donc on a : $a_k = b_{k-1}$ entier pour tout $k \geqslant 1$; a_0 est aussi entier par différence $Q - a_1\Gamma_1 - \dots a_n\Gamma_n$ évaluée sur l'un des x_i. Donc Q est bien une combinaison linéaire des Γ_i à coefficients entiers.

4°) Soit $F = P/Q$ une fraction rationelle réelle ($\mathbb{R}(X)$) prenant des valeurs entières sur les entiers. Soit : $d = \deg F = \deg P - \deg Q$. Si d est négatif, la limite de $F(x)$ en $+\infty$ est nulle ; donc $F(n)$ est nul pour n entier assez grand, ce qui implique $P(n) = 0$, d'où $P = 0$. Si $d = 0$, F a une limite finie ℓ ; alors $P - \ell Q$ sera nul sur les entiers assez grands (même raison), donc nul, ce qui entraîne : $F = \ell \in \mathbb{Z}$.
Supposons que les fractions de degré d prenant des valeurs entières sur les entiers sont les polynômes vus au 3°. Soit F une fraction de degré $d+1$, s'écrivant sous la forme $F(X) = Q(X) + H(X)$, où H est une fraction de degré négatif et Q la partie entière de F, de degré d. Alors la fraction $F_1 = F(X+1) - F(X) = Q(X+1) - Q(X) + H(X+1) - H(X)$ est somme d'un polynôme Q_1 de degré $d-1$ et d'une fraction H_1 de degré négatif, et prend des valeurs entières sur les entiers. Donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à F_1, de degré $d-1$, soit $H_1 = 0$ et Q_1 combinaison "entière" des Γ_k. Cela entraîne comme ci-dessus que Q est une combinaison entière des Γ_k à une constante près : $Q = Q_2(X) + a$ d'où $F = Q_2 + a + H; F - Q_2$ est une fraction de degré négatif ou nul, prenant des valeurs entières sur les entiers : on a vu que c'est une constante entière, d'où le résultat.

Partie II

1°) a) On étudie le système linéaire : $f(k) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i\Gamma_i(k)$ pour $i \leqslant k$. Compte tenu du I2°, ce système s'écrit : $f(k) = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i\binom{k}{i}$ et le vecteur $A = (a_i)$ s'exprime en fonction du vecteur $F = (f(i))$ par la relation matricielle : $F = M.A$ ou $A = M^{-1}F$, M étant la matrice triangulaire inférieure de coefficients : $m_{ij} = \binom{i}{j}$ (triangle de Pascal) ; ${}^tM$ est triangulaire supérieure : $m'_{ij} = \binom{j}{i}$ et est la matrice de l'application $P \to P(X+1)$ de $\mathbb{R}_k[X]$ dans lui-même ; donc ${}^tM^{-1}$ est la matrice de $P \to P(X-1)$ soit de coefficient général : $(-1)^{j-i}\binom{j}{i}$ (par développement binomial de $(X-1)^j$) ; soit : $M^{-1} = ((-1)^{i-j}\binom{i}{j})$. Il en résulte que on sait calculer les a_i sous la forme :

$$\boxed{(\mathcal{N}) \qquad a_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j}\binom{i}{j} f(j).}$$

En particulier, on trouve : $a_0 = f(0), a_1 = f(1) - f(0), a_2 = f(0) - 2f(1) + f(2)$ etc... On note aussi que les a_i ne dépendent aucunement de n ni de k, d'où l'unicité de la suite (a_k) CQFD.
Note : On vient de réaliser une *interpolation de Newton*, consistant à trouver un polynôme prenant des valeurs imposées (les $f(k)$) en des points fixés (ici, $0, \dots, n$). Le procédé semble plus indirect que celui de Lagrange ; en fait, il est pratiquement plus simple à calculer effectivement (les coefficients des Γ_k se calculent aisément de proche en proche).

b) La formule précédente et celle du binôme donnent immédiatement : $a_i = \sum\limits_{j=0}^{i} (-1)^{i-j}\binom{i}{j} b^j = (b-1)^i$

2°) a) Soit f de classe $\mathcal{C}^\infty$ et soit $\varphi(t) = f(t) - \sum\limits_{i=0}^{n} a_k\Gamma_k(t) - A\Gamma_{n+1}(t)$; cette fonction définie au moins sur $\mathbb{R}_+$ et est nulle par construction en $t = 0, \dots, t = n$. On peut choisir x et imposer $\varphi(x) = 0$ dès que $\Gamma_{n+1}(x)$ n'est pas nul ; si x vaut $0, 1, \dots$ ou n, la question posée est immédiate avec θ quelconque. Sinon, φ s'annule en $n+2$ points distincts ; le théorème de Rolle entraîne que φ' s'annule en $n+1$ points distincts, etc... jusqu'à $\varphi^{(n+1)}$ qui s'annule au moins une fois en un point θ compris entre $\mathrm{Min}(0, x)$ et $\mathrm{Max}(n, x)$; or par degré on a : $\varphi^{(n+1)} = f^{(n+1)} - A\Gamma_{n+1}^{(n+1)} = f^{(n+1)} - A$ car le coefficient dominant de Γ_{n+1} est précisément $\frac{1}{(n+1)!}$. Ainsi $A = f^{(n+1)}(\theta)$, soit bien :

$$\boxed{\forall x\ \exists\theta\ f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_k\Gamma_k(x) + \Gamma_{n+1}(x).f^{(n+1)}(\theta)}$$

b) En particulier, $f(n+1) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_k\Gamma_k(n+1) + 1.f^{(n+1)}(\theta) = \sum\limits_{i=0}^{n+1} a_k\Gamma_k(n+1)$ soit : $f^{(n+1)}(\theta) = a_{n+1}$ et on peut affirmer que θ est positif, parce que $x = n+1$ l'est (voir ci-dessus). Ainsi, chaque a_n est la valeur de $f^{(n)}$ en un point de $\mathbb{R}_+$.

3°) Supposons que n^r soit entier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que r ne soit pas entier. Comme 2^r ne peut être entier que pour $r \geqslant 1$, nous supposerons que $r > 1$. Soit $f_p(x) = (p+x)^r$ qui par hypothèse est définie sur $[-p, +\infty[$ et prend des valeurs entières sur les entiers ; le 2°b s'applique et donne $a_{n,p} = f_p^{(n)}(\lambda_{n,p})$. Or le mode de calcul des a_k fait que si f_p prend des valeurs entières sur les entiers, les a_k sont entiers (formule ($\mathcal{N}$) encadrée). Nous choisirons $n = E(r) + 1 > r > n-1$. Ainsi, $a_{n,p} = r(r-1)\dots(r-n+1)(p+\lambda_{n,p})^{r-n}$ est entier et n'est pas nul en tant que puissance négative $(r-n<0)$. Lorsque p tend vers $+\infty$, $p + \lambda_{n,p}$ fait de même car $\lambda_{n,p} > 0$ (voir 2°b) donc $a_{n,p}$ tend vers 0 car $r - n$ est négatif. Étant entier, il devrait être nul à partir d'un certain rang, exclu. Donc r est entier.

Partie III : Étude de séries de Newton

1°) Soient x réel non entier et ρ réel, et $\mu_n = n^\rho|\Gamma_n(x)|$, $u_n = \ln(\mu_{n+1}) - \ln(\mu_n)$

a) Soit la série de terme général $u_n = \ln\Big(\dfrac{n+1}{n}\Big)^\rho\left|\dfrac{\Gamma_{n+1}(x)}{\Gamma_n(x)}\right| = \ln\Big(\dfrac{n+1}{n}\Big)^\rho\left|\dfrac{n-x}{n+1}\right|$. Un DL (à l'ordre 1) fournit : $u_n = (\rho - x - 1).\frac{1}{n} + O\big(\frac{1}{n^2}\big)$; la série de terme général u_n sera donc divergente en général (par équivalence à un terme de série divergente et de signe constant), sauf si $\rho = x+1$ auquel cas le terme complémentaire reste seul, et la série converge.

b) Comme les termes s'éliminent lors de la sommation, on a : $\sum\limits_{i=0}^{n-1} u_i = \ln(\mu_n) - \ln(\mu_0)$; d'où le comportement de μ_n :

- Si $\rho > x+1$ alors μ_n tend vers $+\infty$
- Si $\rho = x+1$ alors μ_n tend vers $\ell \in]0, +\infty[$ et on peut introduire : $K(x) = \lim\limits_{n\to\infty} n^{x+1}|\Gamma_n(x)|$
- Si $\rho < x+1$ alors μ_n tend vers 0

2°) On considère $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+)$ telle que $n^{-1}f^{(n)}$ soit uniformément bornée (en $n \geqslant n_0$ et x) par M.

a) D'après la question II2°a, $f(x) - \sum\limits_{i=0}^{n} a_i\Gamma_i(x) = \Gamma_{n+1}(x)f^{(n+1)}(\theta)$ et ce reste se majore par $Mn.K'n^{-x-1}$ où K' est une constante supérieure à K, et ceci pour n assez grand. Comme n^{-x} tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, le reste tend vers 0 et on a bien l'égalité (vraie encore pour $x = 0$ à cause du choix de a_0) :

$$\boxed{\forall x > 0\ f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\Gamma_i(x)}$$

b) Si f est nulle sur $\mathbb{N}$, la suite (a_n) est nulle (formule ($\mathcal{N}$)) et f est nulle sur $\mathbb{R}_+$. *Note :* la condition de cette question assure aussi que f est développable en série entière au voisinage de tout point de $\mathbb{R}_+$.

3°) Soient $x_0 < x$ deux réels non entiers, et tels que $\sum\limits_{i=0}^{\infty} |a_i\Gamma_i(x_0)|$ converge. Montrons que $\sum\limits_{i=0}^{\infty} |a_i\Gamma_i(x)|$ converge aussi. En effet, $|a_i\Gamma_i(x)| = |a_i\Gamma_i(x_0)|\left|\dfrac{\Gamma_i(x)}{\Gamma_i(x_0)}\right|$ et on pose : $w_n(x) = \dfrac{\Gamma_n(x)}{\Gamma_n(x_0)}$ (c'est possible puisque x_0 n'est pas entier) et $\Gamma_n(x_0) \neq 0$. Lorsque n tend vers l'infini, w_n est équivalent à $\dfrac{K(x).n^{x_0+1}}{n^{x+1}.K(x_0)} = A.n^{x_0-x}$ où A est une constante indépendante de n ; ainsi w_n tend vers 0 et on a : $|a_n\Gamma_n(x)| = o(|a_n\Gamma_n(x_0)|)$; d'où la convergence de la série. En somme, le domaine de convergence absolue de cette série est un intervalle du genre $]a, +\infty[$ ou $[a, +\infty[$.

4°) a) On a déjà montré que w_n a une limite nulle ; et on a : $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{n-x}{n-x_0}$ qui est entre 0 et 1 lorsque $n \geqslant b > x \geqslant x_0$; donc : si $w_b > 0$ alors (w_n) décroît pour $n \geqslant b$ et est positif ; sinon, (w_n) croît pour $n \geqslant b$ et est négatif.

b) Il en résulte que la suite $(|w_n(x)|)_{n\geqslant b}$ est majorée par $|w_b(x)|$; et la fonction w_b est continue sur $[x_0, b]$, donc bornée. Soit $K = \operatorname{Sup}\limits_{[x_0,b]} |w_b(x)|$. On a bien : $|\Gamma_n(x)| \leqslant K|\Gamma_n(x_0)|$ pour $b \geqslant x > x_0, n \geqslant b$, et aussi pour $x = x_0$ en passant à la limite.

c) On suppose encore que $\sum\limits_{i=0}^{\infty} |a_i\Gamma_i(x_0)|$ converge. En reprenant le 3°, on peut majorer le terme général pour $x \in [x_0, b]$ (b =entier assez grand pour que ce segment contienne un compact fixé à l'avance) par : $Ka_n|\Gamma_n(x_0)|$ (pour $n \geqslant b$) et ceci est le terme général d'une série convergente ; d'où la convergence normale. Il ne saurait être question de convergence normale sur $[x_0, +\infty[$ puisque les Γ_i ne sont pas bornés sur un tel intervalle.

5°) a) Le "théorème admis" est une version du procédé d'Abel. On suppose cette fois que $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i\Gamma_i(x_0)$ converge pour x_0 non entier. Posons $\lambda_n = \text{sgn}(w_b(x))a_n\Gamma_n(x_0)$ et $V_n(x) = |w_n(x)|$ (car $w_b(x)$ et $w_n(x)$ ont même signe) ; on vient de supposer la convergence de la série de terme général λ_n, et on a prouvé que si $x \in [x_0, b]$ V_n décroît à partir du rang b, et $V_n \leqslant K$; ainsi $\sum\limits_{i=b}^{\infty} a_i\Gamma_i(x)$ converge uniformément sur $[x_0, b]$, donc $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i\Gamma_i(x)$ fait de même. En particulier, la convergence (simple) de la série a lieu, et donc le domaine de convergence d'une telle série est un intervalle de la forme $]a, +\infty[$ ou $[a, +\infty[$. On en tire aussi la continuité de la fonction somme.

b) Montrons alors la convergence absolue sur $]x_0 + 1, +\infty[$. On a vu que $w_{n+1}/w_n = \frac{n-x}{n-x_0}$ soit : $w_{n+1}/w_n = 1 + \frac{x_0-x}{n} + O(n^{-2})$ donc : $\ln(w_{n+1}) - \ln(w_n) = \frac{x_0-x}{n} + O(n^{-2})$, et on peut sommer, ce qui donne : $\ln(w_n) = (x_0 - x).H_n + S + o(1)$ avec H_n=somme partielle de la série harmonique et $S + o(1)$=une série convergente. Soit : $\ln(w_n) = (x_0 - x).\ln(n) + S + o(1)$ et en passant à l'exponentielle il viendra : $w_n \sim Bn^{x_0-x}$. Lorsque $x_0 > x + 1$, la série de terme général w_n converge (absolument). Comme $a_n\Gamma_n(x_0)$ tend vers 0, la convergence absolue de : $a_n\Gamma_n(x) = a_n\Gamma_n(x_0)w_n$ a lieu et la série est bien absolument convergente sur $]x_0 + 1, +\infty[$.

Note : Il n'y a pas de raison que la série converge absolument en $x = x_0 + 1$. Par exemple, en prenant $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(n).\Gamma_n(x_0)}$ on a : $a_n\Gamma_n(x_0) = \dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}$ qui est le terme général d'une série alternée, tandis que $|a_n\Gamma_n(x_0 + 1)| = \dfrac{|w_n(x_0 + 1)|}{\ln(n)} \sim \dfrac{1}{nln(n)}$ qui est terme général d'une série de Bertrand divergente.

6°) a) Etudions la série $\sum\limits_{i=0}^{\infty} h^i\Gamma_i(x)$ pour $|h| < 1$; la convergence ne fait ici aucun doute (critère de d'Alembert : $\dfrac{h^{i+1}\Gamma_{i+1}(x)}{h^i\Gamma_i(x)}| = |h|\dfrac{|x - i|}{i + 1}$ tend vers $|h| < 1$). D'autre part, on a vu au II1°b que LA suite associée à la fonction $\varphi_x(h) = (1+h)^x$ (h fixé, x variable) est (h^n). On ne peut pas appliquer le III2° parce que cette fonction n'est pas bornée lorsque x varie. Il s'agit donc de montrer que φ_x (h variable, x fixé) a pour développement en série entière $\sum\limits_{i=0}^{\infty} h^i\Gamma_i(x)$. Ce fait est bien connu, et en voici une preuve : Ecrivons (cela re-servira) la formule de Taylor à reste intégral pour φ_x entre 0 et h, x fixé (voir IV2 que on traite maintenant) : $(1+h)^x = 1+\sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{\varphi^{(i)}(0)}{i!}h^i + \displaystyle\int_0^h \dfrac{(h - u)^n}{n!}\varphi^{(n+1)}(u)\, du$ et $\varphi^{(i)}(u) = x(x-1)\dots(x-i+1).(1+u)^{x-i}$ d'où : $(1 + h)^x = 1 + \sum\limits_{i=0}^{n} \Gamma_i(x)h^i + R_n(h, x)$ avec $R_n(h, x) = (n + 1)\Gamma_{n+1}(x) \displaystyle\int_0^h (h - u)^n(1 + u)^{x-n-1}(u)\, du$. Si h est positif, l'intégrale aussi et se majore par $\displaystyle\int_0^h \left(\dfrac{h - u}{1 + u}\right)^n \text{Max}(1, 2^{x-1})\, du$ puis par : $\text{Max}(1, 2^{x-1}) \displaystyle\int_0^h (h - u)^n\, du = C\dfrac{h^{n+1}}{n + 1}$ et donc on peut majorer $|R_n|$ par $C'h^{n+1}n^{-x-1}$ à cause de l'équivalent de Γ_{n+1}. Ce majorant tend bien vers 0. Si h est négatif, on majore plutôt par : $\displaystyle\int_h^0 \left(\dfrac{u - h}{1 + u}\right)^n \text{Max}(1, (1 + h)^{x-1})\, du$ où on note que $\left(\dfrac{u - h}{1 + u}\right)^n$ varie entre 0 et h^n ; cette fois on peut majorer $|R_n|$ par $C'h^{n+1}n^{-x}$ et la conclusion vaut encore.

b) Pour $|h| > 1$ et x non entier naturel il y a divergence puisque $h^n|\Gamma_n(x)|$ est équivalent à Kh^nn^{-x-1} de limite infinie.

c) Soit $h = 1$. *Méthode 1 :* On reprend le calcul ci-dessus (Taylor reste intégral). Le majorant du reste peut être pris de la forme $C'n^{-x-1}$ qui tend vers 0 pour $x > -1$. Soit :

$$\boxed{2^x = \sum_{i=0}^{\infty} \Gamma_i(x) \text{ pour } x > -1}$$

Méthode 2 : Pour $x \leqslant -1$ il y a divergence (comme la série de terme général n^{-x-1}). Sinon, la série est alternée à partir d'un certain rang ; en effet, $\dfrac{\Gamma_{n+1}(x)}{\Gamma_n(x)} = -\dfrac{n - x}{n + 1}$ qui tend vers -1 par valeurs supérieures, donc négatif pour n assez grand ; ainsi $\left|\dfrac{\Gamma_{n+1}(x)}{\Gamma_n(x)}\right|$ est inférieur à 1 pour n assez grand, et $\Gamma_n(x)$ tend vers 0. Donc la convergence a lieu pour tout $x > -1$. On a déjà noté que (h^n) est la suite associée à $(1 + h)^x$; on applique II2°a à $f(x) = 2^x$: $2^x = \sum\limits_{i=0}^{n} \Gamma_i(x) + \Gamma_{n+1}(x)f^{(n+1)}(\theta)$; les dérivées successives de f sont positives (c'est une exponentielle) tandis que $\Gamma_{n+1}(x)$ change de signe pour n assez grand ; donc les sommes partielles de la série encadrent 2^x et leur limite à partir d'un certain rang ; donc 2^x est la limite de la série.

d) On prend $h = -1$. D'après l'étude antérieure, la série de terme général $|\Gamma_n(x)|$ ne converge que si $x \geqslant 0$. Pour $-1 < x < 0$ la série est à termes positifs à partir d'un certain rang (voir ci-dessus : avec $h = 1$ elle était alternée) et donc diverge. Pour $x \geqslant 0$, soit $\sigma(x)$ la somme : $\sigma(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{N}$ puisque $(-1)^n$ est la suite associée à la fonction nulle : $(1 - 1)^x$.

e) D'après le III6°a, pour $x > 0$ et $t \in [0, 1[$ on a : $\sum\limits_{i=0}^{\infty} (-1)^it^i\Gamma_i(x) = (1 - t)^x$. Montrons la convergence normale sur $[0, 1]$: cela revient à la convergence de la série de terme général $|\Gamma_n(x)|$ pour $x > 0$, qui est assurée (équivalent en n^{-x-1}). Alors la somme est continue sur $[0, 1]$, coïncide avec $(1 - t)^x$ sur $[0, 1[$, donc aussi en 1. Ce qui confirme que σ est nulle. Finalement :

On a : $(1+h)^x = \sum\limits_{i=0}^{\infty} h^i \Gamma_i(x)$ dans les conditions suivantes : $\begin{cases} x \in \mathbb{R} & \text{si } \lvert h\rvert < 1 \\ x > -1 & \text{si } h = 1 \\ x \geqslant 0 & \text{si } h = -1 \\ x \in \mathbb{N} & \text{si } \lvert h\rvert > 1 \end{cases}$

Partie IV

1°) On pose : $f(x) = \int_{-1}^{0} (1+t)^x h(t)\,\mathrm{d}t$. On sait que pour $x > 0$ on a : $(1+t)^x = \sum\limits_{i=0}^{\infty} t^i \Gamma_i(x)$ et que cette convergence est normale *en* t (pas en x !) sur $[-1, 0]$ (III6°e). On peut donc intervertir série et intégrale, d'où :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \Gamma_i(x) \int_{-1}^{0} t^i h(t)\,\mathrm{d}t$$

2°) Cette question a été traitée lors du III6°a.

3°) a) Vu l'origine de R_n qui vaut $(1+t)^x$ moins un polynôme en t, l'intégrale de hR_n existe comme celle de $(1+t)^x h$. A ce propos, la fonction $(1+t)^x$ (variable t) peut être non bornée en -1 pour $x > -1$, mais donne une intégrale généralisée qui existe par comparaison avec une fonction puissance (Riemann). La question d'existence aurait donc dû être posée avant...

b) calcul facile.

c) On écrit : $R_n(t,x).h(t) = K(1+t)^x h(t) r_n(t) = KH'(t) r_n(t)$ avec $K = (n+1)\Gamma_{n+1}(x)$ d'où :

$$\int_{-1}^{0} R_n(t,x)h(t)\,\mathrm{d}t = K\Big[Hr_n\Big]_{-1}^{0} - K\int_{-1}^{0} (t+1)^{-x-1} t^n H(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Formule de la moyenne : $H(t) = h(\gamma)\int_{-1}^{0} (1+s)^x ds = \frac{h(\gamma)}{x+1}(1+t)^{x+1}$ borné pour $x > -1$. Alors :

$$\int_{-1}^{0} (1+t)^x h(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} \int_{-1}^{0} t^i \Gamma_i(x) h(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{0} R_n(t,x)h(t)\,\mathrm{d}t$$

et il suffit de montrer que la dernière intégrale tend vers 0 ; H étant bornée, on majore via $\int_{-1}^{0} t^n\,\mathrm{d}t$ par $C''\lvert\Gamma_{n+1}(x)\rvert$ qui tend vers 0 puisque $x > -1$ et $\lvert\Gamma_{n+1}(x)\rvert \sim n^{-x-1}$.

4°) a) Avec $h(t) = (1+t)^\lambda$ on calcule aisément $f(x) = \int_{-1}^{0} (1+t)^{\lambda+x}\,\mathrm{d}t = 1/(\lambda+x+1)$ si $x > -\lambda$.

b) $a_n = \int_{-1}^{0} t^n (1+t)^\lambda\,\mathrm{d}t = -\frac{n}{\lambda+1}\int_{-1}^{0} t^{n-1}(1+t)^{\lambda+1}\,\mathrm{d}t = \ldots = \frac{n!}{(-\lambda-1)\ldots(-\lambda-n-1)} = \frac{1}{(n+1)\Gamma_{n+1}(-\lambda-1)}$

c) immédiat : $-h$ est bien continue et on applique IV3°.

d) Soit : $f(x) = \frac{1}{x+\lambda+1} = \sum \frac{\Gamma_n(x)}{(n+1)\Gamma_n+1(-\lambda-1)}$ et cette égalité a lieu au moins si $\lambda \geqslant 0, x > -1$, donc aussi pour les entiers. Alors a_n est la suite associée à f ; $f(x) - \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \Gamma_i(x)$ est une fraction rationnelle de seul pôle $-\lambda-1$; il ne peut y avoir convergence en $x < -\lambda-1$ car ce serait le cas au pôle (III5°). On suppose la convergence en $x_0 \in]-\lambda-1, -1]$ et on applique II2 : la convergence en x supposerait que $\Gamma_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\theta)$ converge ; on s'aperçoit que cela tend vers l'infini quel que soit θ (ici, θ est supérieur à x_0 et $\lambda+\theta+1 \geqslant x_0+\lambda+1 > 0$). Exclu !