Centrale M 1990, Maths. I - Corrigé

Auteur du corrigé : Robert Cabane ©2006

Partie I : Développabilité de $F(z) = \exp(\frac{z}{z-1})$

1°) On peut procéder par récurrence. Pour $n = 1$ il s'agit d'un série géométrique (et donc $a_{1,k} = 1$ si $k > 0$). Supposons que $\big(\frac{z}{1-z}\big)^n$ soit développable en série entière avec des coefficients entiers et un rayon au moins 1. On passe de $\big(\frac{z}{1-z}\big)^n$ à $\big(\frac{z}{1-z}\big)^{n+1}$ en faisant le produit avec $\frac{z}{1-z}$ selon la méthode du produit (de Cauchy) des séries, ce qui ne diminue pas le rayon de convergence. Le calcul des coefficients du produit ne fait usage que de sommes et de produits, donc $\big(\frac{z}{1-z}\big)^{n+1}$ est développable en série entière avec des coefficients entiers et un rayon au moins 1.

2°) Quand x est une variable *réelle*, on connaît le développement en série entière suivant :

$$x \in]-1,1[\qquad \Rightarrow \qquad (1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!} x^k$$

qui donne

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \tbinom{n+k-1}{n-1} x^k \ .$$

L'unicité des coefficients des séries entières fait que deux telles séries qui coïncident sur $]-1,1[$ ont mêmes coefficients, donc coïncident sur leur disque de convergence. Finalement, on a prouvé que

$$z \in \mathbb{C},\ |z| < 1 \qquad \Rightarrow \qquad \big(\frac{z}{1-z}\big)^n = \sum_{k=n}^{\infty} \tbinom{k-1}{n-1} z^k$$

et donc $\boxed{a_{n,k} = \tbinom{k-1}{n-1} \text{ (nul si } k < n).}$

3°) a) On s'occupe ici de la convergence de la série de terme général $(-1)^n \frac{a_{n,k}}{n!} = (-1)^n \frac{1}{n!} \binom{k-1}{n-1}$. Pour k fixé, lorsque n est assez grand ($n > k$) ce terme est nul comme on l'a observé. Les b_k sont donc définis par des sommes finies.

b) On a $b_0 = a_{0,0} = 1$ parce que $\big(\frac{z}{z-1}\big)^0 = 1$; et ensuite $b_1 = -1$, $b_2 = -\frac{1}{2}$.

4°) Dans un langage plus actuel, cette question demande de montrer que la famille $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Le théorème de sommabilité des séries doubles, rappelé en préliminaire, indique qu'il suffit d'obtenir la convergence absolue des séries « par lignes » et des « sommes par lignes ». Pratiquement, la série $\sum_{k=0}^{\infty} |u_{n,k}| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{n,k}}{n!} |z|^k$ converge parce que c'est exactement la série entière de $\frac{1}{n!}\big(\frac{|z|}{1-|z|}\big)^n$. Ceci, grâce au fait que les $a_{n,k}$ sont positifs. On examine alors

$$s_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_{n,k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a_{n,k}}{n!} z^k = \frac{(-1)^n}{n!} \big(\frac{z}{1-z}\big)^n = \frac{1}{n!}\big(\frac{z}{z-1}\big)^n$$

dont la série converge absolument (c'est une exponentielle).

5°) Le théorème de d'interversion des sommations s'applique et montre que

$$\exp\big(\frac{z}{z-1}\big) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{n,k} = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a_{n,k}}{n!} \Big) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

et en particulier

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{la fonction } F(z) = \exp\big(\frac{z}{z-1}\big) \text{ est développable} \\ \text{en série entière avec un rayon de convergence au moins égal à 1.}\end{array}}$$

Partie II : Majoration des coefficients et rayon de convergence

1°) a) On connaît la formule fondamentale : $\boxed{|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}}$

Il en résulte que

$$\ln |F(z)| = \ln \exp \mathrm{Re}\big(\frac{z}{z-1}\big) = \mathrm{Re}\big(\frac{z}{z-1}\big) \ .$$

Posons $z = x + iy$. On a alors

$$\ln |F(z)| = \mathrm{Re}\big(\frac{z(\overline{z}-1)}{z\overline{z} - z - \overline{z} + 1}\big) = \frac{z\overline{z} - \mathrm{Re}(z)}{z\overline{z} - z - \overline{z} + 1} = \frac{x^2 + y^2 - x}{x^2 + y^2 - 2x + 1} \ .$$

b) Notons que C_0 est vide car F ne s'annule pas. Pour le reste, en posant $\mu = \ln\lambda$ on voit que C_λ est décrit par l'équation complexe

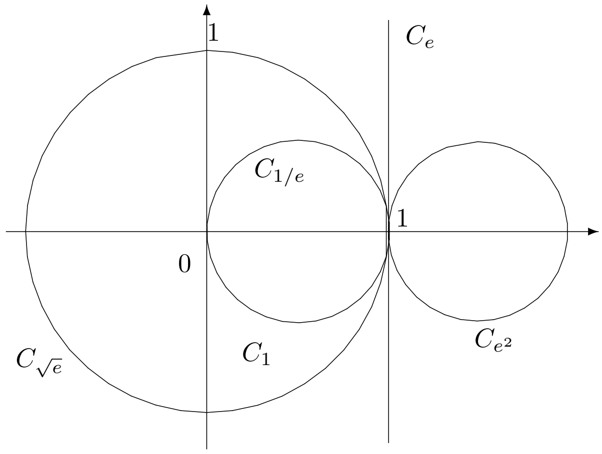
$$\frac{z\overline{z} - \mathrm{Re}(z)}{z\overline{z} - z - \overline{z} + 1} = \mu$$

qui elle-même équivaut à

$$z\overline{z} - \frac{z+\overline{z}}{2} = \mu(z\overline{z} - z - \overline{z} + 1) \quad \text{et} \quad z \neq 1$$

ou encore

$$(x^2+y^2)(\mu-1) + \mu(1-2x) + x = 0 \quad \text{et} \quad x \neq 1\,.$$



Nous voyons là une combinaison linéaire de deux équations de cercles ; on a donc en général un cercle privé du point 1, et en particulier la droite $x = 1$ droite privée du point $1 = (1,0)$ si $\mu = 1$, soit $\lambda = e$; et le cercle associé à μ a pour centre le point de coordonnées $(\dfrac{2\mu-1}{2(\mu-1)}, 0)$ et pour rayon $\dfrac{1}{2|\mu-1|}$.

c) Cette famille de cercles s'appelle un *faisceau linéaire de cercles tangents (ou à point-limite).*

2°) Le domaine Δ' est l'intérieur du cercle $C_{\sqrt{e}}$, y compris la circonférence, sauf le point d'affixe 1. Le long de ce cercle on a évidemment $|F(z)| = \sqrt{e}$. A l'intérieur, tout point figure sur un cercle C_λ avec $\lambda < \sqrt{e}$; en effet, on se place ici dans le domaine où $x^2 + y^2 \leqslant 1$, donc on a

$$\frac{x^2+y^2-x}{x^2+y^2-2x+1} \leqslant \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2+2y^2-2x \leqslant x^2+y^2-2x+1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2 \leqslant 1\,.$$

Par conséquent, on a $|F(z)| = \lambda < \sqrt{e}$. En somme, on a

$$\boxed{\underset{z\in\Delta'}{\mathrm{Max}}\,|F(z)| = \sqrt{e} \text{ et ce maximum est atteint pour tous les points } z \text{ de } \Delta' \text{ tels que } |z| = 1.}$$

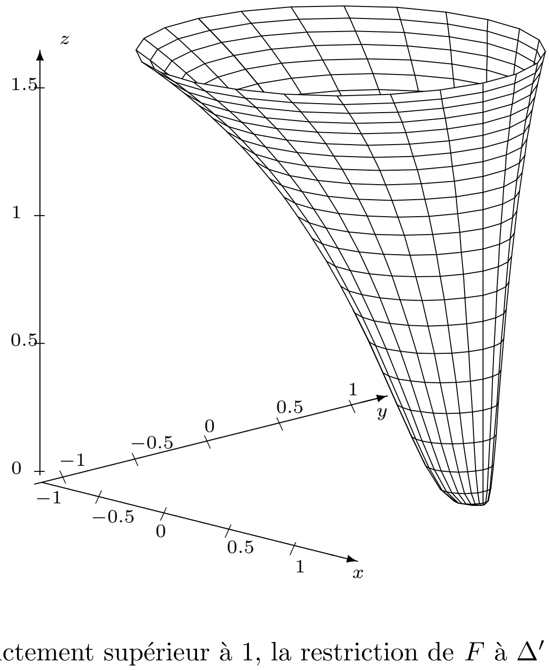
3°) a) La fonction rationnelle $z \mapsto \dfrac{z}{z-1}$ est continue sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$, l'exponentielle est continue, donc leur composée l'est aussi.

b) La question posée est stupide, car F n'est pas définie en 1. Il faut comprendre qu'on s'intéresse à une éventuelle limite de F. Si F avait une limite en 1, elle serait bornée au voisinage de ce point, ce qui est faux car si on prend x réel, supérieur à 1 et tendant vers 1, la fraction $\dfrac{x}{x-1}$ tend vers $+\infty$ et $F(x)$ fait de même.

c) L'affaire est différente si on se limite à Δ' car F y reste bornée. Cependant, si on « suit » un cercle C_λ en s'approchant de 1, la fonction F ne change pas. En particulier, si on pose $z = e^{i\theta}$ alors $|F(z)| = \sqrt{e}$. Mais si on prend z réel inférieur à 1, la fraction $\dfrac{z}{z-1}$ tend vers $-\infty$ et $F(x)$ tend vers 0. Si la limite de F en 1 relativement à Δ' existait, elle serait à la fois nulle et de module $\sqrt{e}$, ce qui est exclu. En somme,

$\boxed{\text{la restriction de } F \text{ à } \Delta' \text{ n'a pas de limite.}}$

La figure ci-contre, qui représente la surface d'équation $Z = |F(X,Y)|$, montre bien cette discontinuité (on a un « puits »).



4°) On sait déjà que le rayon de convergence vaut au moins 1. S'il était strictement supérieur à 1, la restriction de F à Δ' coïnciderait avec la restriction S de la série entière à Δ'. Or, par hypothèse, S serait continue sur Δ et donc posséderait une limite au point 1. La même chose surviendrait en ce qui concerne F (restreinte à Δ'), ce qui n'est pas. Donc $\boxed{R \text{ vaut } 1.}$

Si la série $\sum |b_n|$ était convergente, la série $\sum b_n z^n$ convergerait normalement sur Δ, et sa somme serait continue sur ce disque ; on vient de voir que ce n'est pas le cas.

5°) a) La fonction $g(\theta) = F(re^{i\theta})$ est 2π-périodique, et somme de la série trigonométrique $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n r^n e^{ni\theta}$. Cette série converge normalement pour $r < 1$ fixé parce qu'il s'agit d'une série entière en r, de rayon $R = 1$. La somme est donc continue et ses coefficients de Fourier sont exactement les coefficients de la série, soit la formule

$$b_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(re^{i\theta})\,d\theta\,.$$

On peut aussi bien intégrer de $-\pi$ à π. De plus, on a $F(e^{-i\theta}) = \overline{F(re^{i\theta})}$ car les b_n sont réels ; donc

$$\int_{-\pi}^{0} F(re^{i\theta})\,d\theta = \int_0^{\pi} F(re^{-i\theta})\,d\theta = \int_0^{\pi} \overline{F(re^{i\theta})}\,d\theta = \overline{\int_0^{\pi} F(re^{i\theta})\,d\theta}$$

donc

$$b_n r^n = \frac{1}{2\pi}\Big[\int_0^\pi F(re^{i\theta})\,d\theta + \overline{\int_0^\pi F(re^{i\theta})\,d\theta}\Big] = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \mathrm{Re}(F(re^{i\theta}))\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Re}\Big[\int_0^\pi F(re^{i\theta})\,d\theta\Big]\,.$$

b) Comme on intègre une fonction continue et bornée (en module, par $\sqrt{e}$) sur un intervalle ouvert borné, on a certainement la sommabilité. Il faut bien remarquer que $F(e^{i\theta})$ possède une discontinuité importante pour $\theta = 0$, car on a

$$F(e^{i\theta}) = \exp\big(\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-1}\big) = \exp\Big(\frac{e^{\frac{i\theta}{2}}}{2i\sin\frac{\theta}{2}}\Big) = \sqrt{e}\exp\big(-\frac{i}{2}\,\mathrm{cotan}\,\frac{\theta}{2}\big)$$

et la cotangente tend vers l'infini en 0, l'exponentielle n'a aucune limite.

Du reste, on peut interpréter cette intégrale au sens des intégrales impropres (limite d'intégrales), car selon le critère de Cauchy il suffit que $\big|\int_x^y F(e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta\big|$ puisse être rendu petit pour x et y assez proches de 0, ce qui est immédiat par majoration de $|F(e^{i\theta})|$.

c) *Première méthode :* on applique le théorème de convergence dominée. C'est justifié ici par majoration uniforme de $|F(e^{i\theta})|$. On prend une suite (r_p) de limite 1 par valeurs inférieures ; alors $|F(r_p e^{i\theta})|$ tend vers $F(e^{i\theta})|$ par continuité de F, pour $\theta \neq 0$. Par conséquent, $\int_0^{2\pi} F(r_p e^{i\theta})\,d\theta$ tend bien vers $\int_0^{2\pi} F(e^{i\theta})\,d\theta$.

Seconde méthode : on découpe l'intégrale. Sur un segment, le théorème de continuité d'une intégrale par rapport à un paramètre s'applique sans histoire, donc

$$\Big|\int_\delta^{2\pi-\delta} F(re^{i\theta})\,d\theta - \int_\delta^{2\pi-\delta} F(e^{i\theta})\,d\theta\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

est vrai pour $\delta > 0$ fixé et avec r assez proche de 1. Puis on majore le reste grâce à la majoration uniforme de F sur le disque-unité :

$$\Big|\int_{-\delta}^{\delta} F(re^{i\theta})\,d\theta - \int_{-\delta}^{\delta} F(e^{i\theta})\,d\theta\Big| \leqslant 4\sqrt{e}\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

par un choix évident de δ.

6°) On passe à la limite (avec $r \to 1$) dans la formule du 5°a, ce qui nous donne $b_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(e^{i\theta})\,d\theta$. A la suite, le raisonnement mené dans cette question à propos des conjugués montre de même que $b_n = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\Big(\int_0^\pi F(e^{i\theta})\,d\theta\Big)$. Nous avons noté que $F(e^{i\theta}) = \sqrt{e}\exp\big(-\frac{i}{2}\,\mathrm{cotan}\,\frac{\theta}{2}\big)$, donc

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\sqrt{e}}{\pi}\,\mathrm{Re}\Big(\int_0^\pi \exp\big(-in\theta - \frac{i}{2}\,\mathrm{cotan}\,\frac{\theta}{2}\big)\,d\theta\Big) = \frac{2\sqrt{e}}{\pi}\,\mathrm{Re}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\big(-2int - \frac{i}{2}\,\mathrm{cotan}\,t\big)\,dt\Big) \\ &= \frac{2\sqrt{e}}{\pi}\,\mathrm{Re}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\big(2int + \frac{i}{2}\,\mathrm{cotan}\,t\big)\,dt\Big) \end{aligned}$$

par conjugaison sous la partie réelle.

7°) Nous intégrons ici une fonction bornée, donc on majore la partie réelle par le module, le module de l'intégrale par l'intégrale du module, et en fin de compte on trouve

$$|b_n| \leqslant \frac{2\sqrt{e}}{\pi}\,\frac{\pi}{2} = \sqrt{e}\,.$$

8°) Soit $u_n(t) = 2nt + \frac{1}{2}\,\mathrm{cotan}\,t$. On a $u_n'(t) = 2n - \frac{1}{2\sin^2 t}$ qui sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ s'annule et change de signe au point T_n tel que $\sin^2 T_n = \frac{1}{4n}$; soit $\boxed{T_n = \mathrm{Arcsin}\,\frac{1}{2\sqrt{n}}.}$

Et $u_n''(t) = \frac{\cos t}{\sin^3 t} \geqslant 0$ conduit au tableau de variations suivant :

x	0		α_n		T_n		β_n		$\frac{\pi}{2}$
u_n'	$-\infty$	$\nearrow$	$-n^{\frac{3}{4}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$n^{\frac{3}{4}}$	$\nearrow$	$\frac{4n-1}{2}$
u_n	$+\infty$	$\searrow$					$\nearrow$		$n\pi$

9°) **a**) Le tableau de variations, pour sa partie négative, montre clairement que u_n' va passer une et une seule fois par la valeur $-n^{\frac{3}{4}}$ (théorème des valeurs intermédiaires entre 0 et $-\infty$). De l'autre côté, on remarque que pour $n \geqslant 1$ l'on a $\frac{4n-1}{2} > n > n^{\frac{3}{4}}$, de sorte que le théorème des valeurs intermédiaires est encore applicable. D'où α_n et β_n comme indiqués sur le tableau de variations.

b) On a

$$u_n''(\beta_n)^2 = \frac{\cos^2\beta_n}{\sin^6\beta_n} = \frac{1}{\sin^4\beta_n}\Big(\frac{1}{\sin^2\beta_n} - 1\Big)$$

et ici $\frac{1}{\sin^2\beta_n} = 4n - 2u_n'(\beta_n) = 4n - 2n^{\frac{3}{4}} \geqslant 4n - 2n = 2n$ donc $(u_n''(\beta_n))^2 \geqslant (2n)^2(2n-1) \geqslant 4n^3$ et comme la dérivée seconde est positive on trouve bien $u_n''(\beta_n) \geqslant 2n^{\frac{3}{2}}$.

c) u_n'' est décroissante, donc sur $[0, \beta_n]$ on a encore l'inégalité $u_n''(x) \geqslant 2n^{\frac{3}{2}}$. On peut donc appliquer la formule des accroissements finis sur la fonction u_n' entre α_n et β_n :

$$2n^{\frac{3}{4}} = u_n'(\beta_n) - u_n'(\alpha_n) = (\beta_n - \alpha_n)u_n''(c) \geqslant 2n^{\frac{3}{2}}(\beta_n - \alpha_n)$$

d'où il résulte que $\beta_n - \alpha_n \leqslant \dfrac{1}{n^{\frac{3}{4}}}$.

10°) a) On a

$$|K_n| = \Big|\int_{\alpha_n}^{\beta_n} \exp\big(i(2nt + \frac{1}{2}\operatorname{cotan} t)\big)\,dt\Big| \leqslant \int_{\alpha_n}^{\beta_n} 1 = \beta_n - \alpha_n \leqslant \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}\ .$$

b) Entre β_n et $\frac{\pi}{2}$ le fonction u_n' ne s'annule pas, ce qui permet une intégration par parties comme suit :

$$L_n = \int_{\beta_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{iu_n(t)}}{iu_n'(t)} iu_n'(t)\,dt = \Big[\frac{e^{iu_n(t)}}{iu_n'(t)}\Big]_{\beta_n}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\beta_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{iu_n(t)}}{iu_n'(t)^2} u_n''(t)\,dt = \frac{e^{in\pi}}{i(2n-\frac{1}{2})} - \frac{e^{iu_n(\beta_n)}}{in^{\frac{3}{4}}} + \int_{\beta_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{iu_n(t)}}{iu_n'(t)^2} u_n''(t)\,dt$$

d'où en modules

$$|L_n| \leqslant \frac{1}{2n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}} + \int_{\beta_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{u_n''(t)}{u_n'(t)^2}\,dt = \frac{1}{2n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}} - \Big[\frac{1}{u_n'(t)}\Big]_{\beta_n}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{n^{\frac{3}{4}}}$$

ce qu'il fallait.

c) On effectue le même travail en ce qui concerne $\displaystyle\int_X^{\alpha_n}$ avec $0 < X < \alpha_n$. Il vient :

$$\Big|\int_X^{\alpha_n} e^{iu_n(t)}\,dt\Big| \leqslant \frac{1}{|u_n'(X)|} + \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}} + \int_X^{\alpha_n} \frac{u_n''(t)}{u_n'(t)^2}\,dt = \frac{2}{n^{\frac{3}{4}}}$$

et lorsqu'on fait tendre X vers 0 on obtient bien $|J_n| \leqslant \dfrac{2}{n^{\frac{3}{4}}}$.

d) Au total on en déduit que $|I_n| \leqslant \dfrac{5}{n^{\frac{3}{4}}}$. En majorant la valeur absolue de la partie réelle par le module, on obtient que $|b_n| \leqslant \dfrac{10\sqrt{e}}{\pi n^{\frac{3}{4}}}$ et pour simplifier on peut conclure que $\boxed{|b_n| \leqslant \dfrac{6}{n^{\frac{3}{4}}}.}$

En particulier, la suite (b_n) est de limite nulle.

Partie III : Signe des coefficients

1°) Prenant x réel dans $]-1,1[$, par composition la dérivabilité de F est assurée. On trouve donc que $F'(x) = \dfrac{-1}{(1-x)^2}F(x)$, soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$\boxed{(1-x)^2F'(x) + F(x) = 0.}$$

2°) a) Dans l'intervalle précédent la fonction F est développable en série entière, et on sait qu'alors sa dérivée est développable, avec un développement obtenu en dérivant terme à terme. On a ainsi $F'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nb_nx^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)b_{n+1}x^n$, soit encore

$$(1-x)^2F'(x) - F(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_{n+1}x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} nb_nx^n + \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)b_{n-1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n$$

et on peut mettre toutes ces sommes à partir de l'indice $n = 0$ en posant conventionnellement $b_{-1} = b_{-2} = 0$. Soit encore :

$$(1-x)^2F'(x) - F(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\big[(n+1)b_{n+1} - 2nb_n + (n-1)b_{n-1} + b_n\big]x^n\ .$$

Or, la théorie de l'unicité des séries entières, appuyée sur la série de Taylor, montre que si une somme de série entière est nulle sur un intervalle $[0, r[$ alors les coefficients de cette série sont tous nuls. On a donc $(n+1)b_{n+1} - (2n-1)b_n + (n-1)b_{n-1} = 0$ pour tout n, soit encore $\boxed{c_{n+1} - (2 - \frac{1}{n})c_n + c_{n-1} = 0 \text{ pour tout } n \geqslant 1.}$

b) On a d'abord $c_0 = 0b_0 = 0$ et $c_1 = b_1 = -1$ (vus plus haut). La relation de récurrence s'applique ensuite et donne :

$$c_2 = -1 \quad ; \quad c_3 = -\frac{1}{2} \quad ; \quad c_4 = \frac{1}{6} \quad ; \quad c_5 = \frac{19}{24} \quad ; \quad c_6 = \frac{151}{120}\ .$$

c) Si $c_n = 0$ alors c_{n+1} et c_{n-1} sont opposés ; si l'un des deux est nul, on peut appliquer la relation de récurrence et trouver $c_{n-2} = 0$; on remonte de proche en proche jusqu'à aboutir à $c_1 = 0$, absurde. Donc il n'y a pas deux coefficients nuls à la suite dans la suite (c_n).

3°) Soit $d_n = c_n - c_{n-1}$. La sommation des d_n étant télescopique, on a $\sum\limits_{k=1}^{h} d_{n+k} = c_{n+h} - c_n$. Puis on a $d_{n+1} - d_n = c_{n+1} - c_n - c_n + c_{n-1} = -\dfrac{c_n}{n}$ d'après la relation de récurrence. Il en résulte que la sommation des $\dfrac{c_n}{n}$ est également télescopique, donc

$$\sum_{k=0}^{h-1}\frac{c_{n+k}}{n+k} = \sum_{k=0}^{h-1} d_{n+k} - d_{n+k+1} = d_n - d_{n+h}\ .$$

4°) Supposons que la suite (c_n) soit positive à partir du rang n_0. Alors la suite (d_n) est décroissante, donc possède une limite. Si cette limite est finie, alors la troisième relation ci-dessus montre que la série de terme général $\frac{c_n}{n} = b_n$ converge. De plus, on a par hypothèse la positivité de ces nombres à partir du rang n_0. Il en résulterait la convergence absolue de la série des b_n, c'est-à-dire que $\sum |b_n|$ convergerait, et on a vu au II4° que c'est faux. Par conséquent, la suite (d_n) devrait tendre vers $-\infty$. Mais alors les d_n seront inférieurs à -1 à partir d'un certain rang n, et dans ces conditions la première relation de la question précédente montre que $c_{n+h} < c_n - nh$ pour tout $h > 0$, ce qui fait tendre (c_n) vers $-\infty$. Mais une telle conclusion doit être rejetée car on a supposé que les c_n sont positifs à partir d'un certain rang.

Un raisonnement identique montre que la suite (c_n) ne peut rester négative à partir d'un certain rang. Finalement, on vient de montrer que les c_n devront changer de signe indéfiniment.

Si on définit $\theta(1) = 0$, pour lequel on a bien $c_{\theta(1)} > 0$, il existe certainement un indice $\theta(2) > \theta(1)$ minimal tel que $c_{\theta(2)} \leqslant 0$; par conséquent, on a $c_k > 0$ pour $\theta(1) < k < \theta(2)$. Il peut arriver que $c_{\theta(2)}$ soit nul, mais alors le suivant est certainement strictement négatif d'après la question 2°c. Comme la suite ne peut rester négative, il existe de même $\theta(3) > \theta(2)$ minimal tel que $c_{\theta(3)} \geqslant 0$, et ainsi de suite. En d'autres termes, on a une suite extraite « minimale » $(c_{\theta(n)})$ telle que $c_{\theta(n)}$ ait pour signe $(-1)^n$.

5°) a) On suppose que n est pair, ce qui fait que $c_{\theta(n)}$ est positif ou nul et que les suivants (jusqu'à $c_{\theta(n+1)-1}$) sont strictement positifs. Comme n est pair, on a $n \geqslant 2$ et $\theta(n) \geqslant 4$. On a aussi $M_n = \underset{k \in U_n}{\operatorname{Max}}\, c_k > 0$. Nous savons enfin que $c_{\theta(n)-1}$ est strictement négatif.

En fait, on a $2 - \dfrac{1}{\theta(n)} > 1$, donc $c_{\theta(n)+1} > c_{\theta(n)} - c_{\theta(n-1)} > c_{\theta(n)}$. Pareillement, on a

$$c_{\theta(n+1)-2} = \big(2 - \frac{1}{\theta(n+1)-1}\big)c_{\theta(n+1)-1} - c_{\theta(n+1)} \geqslant \big(2 - \frac{1}{\theta(n+1)-1}\big)c_{\theta(n+1)-1} > c_{\theta(n+1)-1} > 0$$

ce qu'il fallait. De tout ceci il résulte que $\theta(n+1) - 2$ est au moins égal à $\theta(n)$; et si $\theta(n+1) - 2 = \theta(n)$ alors les deux inégalités précédentes sont en sens inverse, ce qui est exclu. Par conséquent, on a $\theta(n+1) \geqslant \theta(n) + 3$, de sorte que

$$\boxed{\text{la longueur de } U_n \text{ est au moins égale à 3.}}$$

b) $d_{p+1} - d_p = -\dfrac{c_p}{p}$ est négatif sur U_n, donc la suite d_p décroît quand p varie de $\theta(n)$ à $\theta(n+1)$.

c) Nous savons que la suite (d_p) décroît ; de plus, ici, $d_{\theta(n)+1} > 0 > d_{\theta(n+1)-1}$. Il en résulte que les d_p concernés vont être d'abord positifs, puis peut-être nuls, puis négatifs ; ce qui revient à dire que quand p décrit U_n la suite (c_p) est croissante puis décroissante. On peut même préciser qu'il n'y a pas plus de deux termes consécutifs égaux car si c_n, c_{n-1} et c_{n+1} sont égaux alors $\frac{c_n}{n} = 0$ par la relation de récurrence, donc ces trois termes sont nuls, ce qui n'est pas possible.

d) Considérons des entiers p, q, r tels que $\theta(n) \leqslant p < q < r < \theta(n+1)$. C'est possible puisqu'on a montré que la longueur de U_n est au moins 3. On a alors, en utilisant les formules antérieures :

$$c_p - c_q = d_{p+1} + \cdots + d_q \geqslant (q-p)d_q > (q-p)d_{q+1}$$

par décroissance stricte de la suite (d_i) dans U_n. On en tire que $\dfrac{c_q - c_p}{q-p} > d_{p+1}$. On trouverait de même que $\dfrac{c_r - c_q}{r-q} \leqslant d_{q-1}$, d'où

$$\frac{c_q - c_p}{q-p} > \frac{c_r - c_q}{r-q}$$

Ainsi, la « pente » de deux segments consécutifs dans le « graphe » de (c_i) pour i dans U_n a tendance à décroître strictement. La signification est évidemment que la suite (c_p) pour $p \in U_n$ est strictement « concave », au sens où chaque terme est supérieur à ce qu'une interpolation linéaire basée sur des termes encadrants pourrait donner ; et le graphe de la fonction affine par morceaux qui se base sur les points de coodonnées (p, c_p) est concave.

e) Dans le cas où n est impair, il suffit d'inverser les inégalités, avec quand même $n \geqslant 3$ à cause de $\theta(n-1)$. On parvient à la croissance de la suite (d_p) qui donne la convexité de la suite (c_p) lorsque $p \in U_n$. En conclusion, la suite (c_n) présente une alternance de concavités et convexités entre ses chagements de signe, ainsi qu'une alternance de monotonies.

6°)

7°) Le principe de l'algorithme est très simple : il suffit de calculer les c_n les uns après les autres et de noter les changements de signe. On trouve

$$\theta(1) = 1; \theta(2) = 4; \theta(3) = 13; \theta(4) = 26; \theta(5) = 45; \theta(6) = 68; \theta(7) = 97; \theta(8) = 130; \theta(9) = 168; \theta(10) = 212$$

Partie IV : Licence de documentation publique (version 1.1)

Section A : Définitions

1°) « Utilisation Commerciale » signifie la distribution ou tout autre moyen de mise à disposition d'un tiers de la documentation.
2°) « Contributeur » signifie une personne ou une entité qui crée ou contribue à la création de modifications.
3°) « Documentation » signifie la documentation originale ou les modifications ou des combinaisons de la documentation originale et les modifications, dans chaque cas, incluant des parties de celles-ci.
4°) « Mécanisme de distribution électronique » signifie un mécanisme communément accepté pour le transfert électronique de données.
5°) « Auteur initial » signifie l'individu ou l'entité qui a été identifié(e) comme étant l'Auteur initial dans la notice obligatoire requise par l'Annexe.
6°) « Œuvre plus importante » signifie une œuvre qui combine de la documentation ou des parties de celle-ci avec de la documentation ou d'autres écrits qui ne sont pas couverts par les conditions de cette licence.
7°) « Licence » signifie ce document.
8°) « Modifications » signifie toute addition, ou suppression, de substance ou de structure d'une documentation originale ou autres modifications précédentes, telles que traduction, abstraction, résumé, ou toute autre forme dans laquelle la documentation originale ou modifications précédentes peut être resaisie, transformée ou adaptée. Une œuvre consistant en des révisions éditoriales, annotations, élaborations, et autres modifications qui, en tant qu'œuvre entière représente une œuvre de l'esprit original, est considérée comme étant une modification. Par exemple, lorsque la documentation est distribuée sous forme d'une série de documents, une modification est comprise comme étant :
A. Toute addition à, ou suppression de, contenu de la documentation originale ou des modifications précédentes.
B. Toute nouvelle documentation qui comporte toute partie de la documentation originale ou modifications précédentes.
9°) « Documentation originale » signifie de la documentation décrite comme étant la documentation originale dans la notice obligatoire requise par l'Annexe, et qui, au moment de sa distribution selon les conditions de cette licence ne constitue pas encore de la documentation couverte par cette licence.
10°) « Forme éditable » signifie la forme préférée de la documentation pour y effectuer des modifications. La documentation peut être sous forme électronique, compressée, ou sous forme d'archive, à condition que le logiciel de décompression ou de désarchivage soit largement disponible de manière gratuite.
11°) « Vous » (ou « Votre ») signifie un individu ou une entité juridique qui exerce des droits conformément à, et en respectant, toutes les conditions de cette Licence ou une version future de cette licence telle que publiée selon la Section D1 (« Versions de la Licence »). Pour des entités juridiques, « vous » couvre également toute entité qui contrôle, ou est contrôlée par, ou qui est sous contrôle commun avec vous. Pour les besoins de la présente définition, « contrôle » signifie
(a) le pouvoir, direct ou indirect, de diriger ou gérer une telle entité, que ce soit de manière contractuelle ou par tout autre moyen, ou
(b) la propriété de plus de cinquante pour cent (50%) des actions libérées ou de la propriété réelle d'une telle entité.

Section B : CONCESSIONS DE LICENCES

1°) Concession de Licence de l'Auteur Initial.
L'Auteur Initial vous concède, par la présente, une licence non-exclusive mondiale, sans redevances, d'utiliser, reproduire, préparer des modifications, compiler, représenter publiquement, afficher publiquement, faire démonstration, commercialiser, divulguer et distribuer la documentation sous toutes formes, sur tous supports ou via tout Mécanisme de Distribution Electronique ou autres méthodes connues aujourd'hui ou à découvrir à l'avenir, ainsi que le droit de concéder des sous-licences les droits énumérés précédemment à des tiers, à travers des systèmes multiples de sous-licences, selon les conditions de cette Licence.
Les droits de licence concédés dans la Section B1 (« Concession de Licence de l'Auteur Initial ») deviennent effectifs à la première date de distribution, par l'Auteur Initial de la documentation originale selon les conditions de cette Licence.
2°) Concession de Licence du Contributeur.
Chaque Contributeur vous concéde, par la présente, une licence non-exclusive mondiale, sans redevances, d'utiliser, reproduire, préparer des modifications, compiler, représenter publiquement, afficher publiquement, faire démonstration, commercialiser, divulguer et distribuer la documentation sous toutes formes, sur tous supports ou via tout Mécanisme de Distribution Electronique ou autres méthodes connues aujourd'hui ou à découvrir à l'avenir, ainsi que le droit de concéder des sous-licences les droits énumérés précédemment à des tiers, à travers des systèmes multiples de sous-licences, selon les conditions de cette Licence.
Les droits de licence concédés dans cette Section B2 (« Concession de Licence du Contributeur ») deviennent effectifs à la première date que le Contributeur fait, pour la première fois, une Utilisation Commerciale la documentation.

Section C : OBLIGATIONS DE DISTRIBUTION

1°) Application de la licence.
Les modifications que vous créez ou auxquelles vous contribuez sont couvertes par cette licence, y compris sans limitation la Section B2 (« Concession de licence du Contributeur »). La documentation peut être distribuée seulement selon les conditions de cette licence ou toute version future publiée selon la Section D1 (« Versions de la licence »), et Vous devez intégrer une copie de cette licence dans chaque copie de la documentation que Vous distribuez. Vous ne pouvez offrir ou imposer des conditions qui modifient ou restreignent la version applicable de cette licence ou des droits concédés selon celle-ci. Toutefois, vous pouvez inclure un document additionnel qui offre les droits additionnels décrits à la Section C5 (« Notices nécessaires »).
2°) Disponibilité de la documentation.
Toute modification que Vous créez ou à laquelle Vous contribuez doit être disponible publiquement dans une Forme Éditable selon les conditions de cette Licence à travers un support tangible ou un Mécanisme de Distribution Électronique accepté.
3°) Description des modifications.
Toute documentation à laquelle vous contribuez doit identifier les modifications que vous avez effectuées dans la création du Document, ainsi que la date de telles modifications. Vous devez inclure une déclaration facilement visible indiquant que la modification est dérivée, directement ou indirectement de la documentation originale fournie par l'Auteur Initial et inclure le nom de l'Auteur Initial dans la documentation ou via un lien électronique qui décrit l'origine ou la propriété de la documentation. La documentation modifiée peut être créée par un programme électronique qui suit automatiquement les changements dans la documentation, et de tels changements doivent pouvoir être disponibles pour le public pendant au moins 5 ans après la première distribution de la documentation .
4°) Propriété Intellectuelle.
Le Contributeur garantit que celui-ci croit que ses modifications sont des créations originales du Contributeur, et/ou que le Contributeur détient des droits suffisants lui permettant de concéder les droits indiqués dans cette Licence.
5°) Notices nécessaires.
Vous devez reproduire la notice figurant dans l'Annexe dans chaque fichier de documentation. S'il n'est pas possible d'inclure une telle notice dans un fichier de documentation particulier, du fait de la structure du fichier, vous devez alors inclure une telle notice dans un endroit (tel qu'un répertoire) où un lecteur serait capable de chercher une telle notice, par exemple, via un hyperlien dans chaque fichier de la documentation qui renverra le lecteur vers une page qui décrit l'origine et la propriété de l'œuvre. Si vous avez créé une ou plusieurs modification(s) vous pouvez ajouter votre propre nom, en tant que Contributeur, à la notice décrite en Annexe.
Vous devez également reproduire cette licence dans tout fichier de documentation (ou mettre un hyperlien dans chaque fichier de la documentation) à l'endroit où vous expliquez les droits d'utilisateur ou de propriété.
Vous pouvez offrir à la vente, et faire payer, des services de garantie, soutien, indemnité ou responsabilité civile vis-à-vis d'un ou de plusieurs récipiendaires de la documentation. Toutefois, vous ne pouvez faire ceci que sous votre propre responsabilité, et non pas sous la responsabilité de l'Auteur Initial ni un quelconque Contributeur. Vous devez faire clairement apparaitre que toute garantie, soutien, indemnité ou responsabilité que vous offrez, est faite uniquement par vos soins, et vous marquez par la présente votre accord de dédommager l'Auteur Initial ainsi que chaque Contributeur par rapport à toute demande en garantie envers laquelle l'Auteur Initial ou tout Contributeur pourrait être appelé du fait des services de garantie, soutien, indemnité ou de responsabilité civile que vous offrez.

6°) Œuvre plus importante.
Vous pouvez créer une œuvre plus importante en combinant la documentation avec d'autres documents non couverts par la présente Licence et ainsi distribuer l'œuvre plus importante sous la forme d'un seul produit. Dans ce cas, vous devez vous assurer que les conditions de cette licence soient respectées pour la documentation.

Section D : Champ d'application de la licence

Cette Licence s'applique à la documentation à laquelle l'Auteur Initial a joint cette Licence et la notice qui apparait en Annexe.

Section E : VERSIONS DE LA LICENCE

1°) Nouvelles Versions.
L'Auteur Initial peut publier des versions révisées et/ou nouvelles de la Licence de temps à autre.
2°) Effets des nouvelles versions.
Si la documentation a été publiée selon les conditions d'une version particulière de la licence, vous pouvez continuer à l'utiliser selon les conditions de cette version. Vous pouvez également décider d'utiliser une telle documentation selon les conditions de toute version ultérieure de la licence publiée par Robert Cabane. Personne d'autre que Robert Cabane n'a le droit de modifier les conditions de cette licence. Le fait de fournir le nom de l'auteur initial, la documentation originale ou le contributeur dans la notice décrite dans l'Annexe ne sera pas considéré comme une modification de cette Licence.

Section F : DÉCHARGE DE GARANTIE

LA DOCUMENTATION EST FOURNIE SELON LES CONDITIONS DE CETTE LICENCE « TEL QUEL », SANS GARANTIE AUCUNE, QU'ELLE SOIT EXPRESSE OU IMPLICITE, Y COMPRIS, SANS LIMITATION AUCUNE, SANS GARANTIE QUE LA DOCUMENTATION NE COMPORTE AUCUN DÉFAUT, NE SOIT COMMERCIALISABLE, NE CONVIENNE A UNE UTILISATION QUELCONQUE, NI NE SOIT CONSIDÉRÉE COMME UNE CONTREFRAÇON. LA TOTALITÉ DES RISQUES RELATIFS A LA QUALITÉ, PRECISION, ET EXECUTION DE LA DOCUMENTATION DEMEURE CHEZ VOUS. SI LA DOCUMENTATION S'AVÉRERAIT ÊTRE DÉFECTUEUSE PAR QUELQUE BIAIS QUE CE SOIT, VOUS (ET NON PAS L'AUTEUR INITIAL OU TOUT AUTRE CONTRIBUTEUR) DEVEZ ASSUMER LES FRAIS DE TOUTE MAINTENANCE, REPARATION OU CORRECTION. CETTE DÉCHARGE DE GARANTIE CONSTITUE UNE PARTIE ESSENTIELLE DE CETTE LICENCE. AUCUNE UTILISATION DE LA DOCUMENTATION N'EST AUTORISÉE SANS L'APPLICATION DE CETTE DÉCHARGE.

Section G : RÉSILIATION

Cette licence, ainsi que les droits qui y sont concédés, sera résiliée de plein droit et de manière automatique si Vous ne respectez pas les conditions de celle-ci et si vous ne corrigez pas votre manquement à ses obligations dans un délai de 30 jours à partir du moment où vous avez connaissance d'un tel manquement. Toutes sous-licences de la Documentation qui ont été concédées en respect des obligations resteront en vigueur malgré la résiliation de cette licence. Toute clause qui, de par sa nature nécessite qu'elle survive à la résiliation, demeurera en vigueur.

Section H : LIMITATION DE RESPONSABILITÉ

DANS AUCUNE CIRCONSTANCE, OU SELON AUCUNE THÉORIE DE DROIT, QU'ELLE SOIT DELICTUELLE (Y COMPRIS NÉGLIGENCE), CONTRACTUELLE, OU DE QUELQU'AUTRE MANIÈRE QUE CE SOIT, L'AUTEUR INITIAL, TOUT AUTRE CONTRIBUTEUR, OU DISTRIBUTEUR DE LA DOCUMENTATION, OU TOUT FOURNISSEUR DE L'UNE QUELCONQUE DES PARTIES PRÉCÉDEMMENT NOMMÉES, NE POURRONT ÊTRE TENUS RESPONSABLE ENVERS QUICONQUE POUR TOUT DOMMAGE DIRECT, INDIRECT, PARTICULIER, INCIDENT, OU CONSÉQUENT DE QUELQUE NATURE QUE CE SOIT, COMPRENANT, SANS LIMITATION, DES DOMMAGES IMPUTABLES A LA PERTE D'UN FONDS DE COMMERCE, ARRÊT DE TRAVAIL, PANNE OU DYSFONCTIONNEMENT D'ORDINATEUR, OU TOUS AUTRES DOMMAGES OU PERTES PROVOQUÉS PAR OU LIÉS À L'UTILISATION DE LA DOCUMENTATION, MÊME SI UNE TELLE PARTIE A ÉTÉ PRÉVENUE DE LA POSSIBILITÉ DE TELS DOMMAGES.

Section I : DISPOSITIONS FINALES

Cette Licence représente l'accord complet relatif à l'objet de celle-ci. Si une quelconque clause de cette Licence devrait être considérée comme nulle ou inapplicable, une telle clause ne sera modifiable que dans la mesure où elle puisse devenir applicable et valable. Dans tout différend ou litige dans l'application ou l'interprétation de cette licence, la partie perdante prendra en charges tous frais, y compris sans limitation, tous frais de procédure et des frais et dépenses d'avocats raisonnables. L'application de la Convention des Nations Unies régissant des Contrats pour la Vente Internationale de Marchandises est expressément exclue.

Section J : Annexe

La documentation originale s'intitule « Centrale M 1990, Maths. I - Corrigé ». L'Auteur initial de la documentation originale est Robert Cabane. (Coordonnées de l'auteur initial : rcab AT free.fr).