Banque PT 2008 — épreuve A

Partie I — Partie A

Question I.1
(C'est une question de cours.)
$\mathcal{Q}_1$ est un ellipsoïde.
$\mathcal{Q}_2$ est un hyperboloïde à deux nappes.
Aucune de ces deux surfaces n'est de révolution.

Question I.2
La matrice A s'écrit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Question I.3
On évalue

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \begin{vmatrix} 3-X & 2 & 1 \\ 2 & -X & -2 \\ 1 & -2 & 3-X \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}{=} \begin{vmatrix} 4-X & 2 & 1 \\ 0 & -X & -2 \\ 4-X & -2 & 3-X \end{vmatrix} \\
&= (4-X) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -X & -2 \\ 1 & -2 & 3-X \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} (4-X) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -X & -2 \\ 0 & -4 & 2-X \end{vmatrix} \\
&= (4-X)(X^2 - 2X - 8) = -(X-4)^2(X+2).
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 4 > \lambda_3 = -2$.

Question I.4
$E_1 = E_2 = \mathrm{Ker}(A - 4I)$ est le plan d'équation $x = 2y + z$.

$E_3 = \mathrm{Ker}(A + 2I)$ est la droite orthogonale, dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On pose donc $\vec{u}_3 = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, on choisit un vecteur orthogonal, comme par exemple $\vec{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et finalement $\vec{u}_2 = \vec{u}_3 \wedge \vec{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Question I.5
Dans le repère $(O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, $\mathcal{Q}_3$ a pour équation $4X^2 + 4Y^2 - 2Z^2 = 1$, et on reconnaît un hyperboloïde à une nappe de révolution autour de l'axe des Z donc de la droite $(O; \vec{u}_3)$.

Partie II — Partie B

Question II.1

On vérifie que les coordonnées de $M(t)$ vérifient l'équation $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$, qui est équation d'une hyperbole. Mais on ne trouve qu'une des deux branches, car, quand t décrit $\mathbb{R}$, $x(t)$ décrit seulement $[0, +\infty[$ alors que $y(t)$ décrit $\mathbb{R}$ tout entier.

L'hyperbole admet comme distance focale $c = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ et comme excentricité $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

Question II.2

Les asymptotes de Γ sont les deux droites d'équations $3x = 2y$ et $3x = -2y$.
La figure 1 page 2 montre l'hyperbole (la branche qui ne nous intéresse pas est en pointillés) et les deux asymptotes.

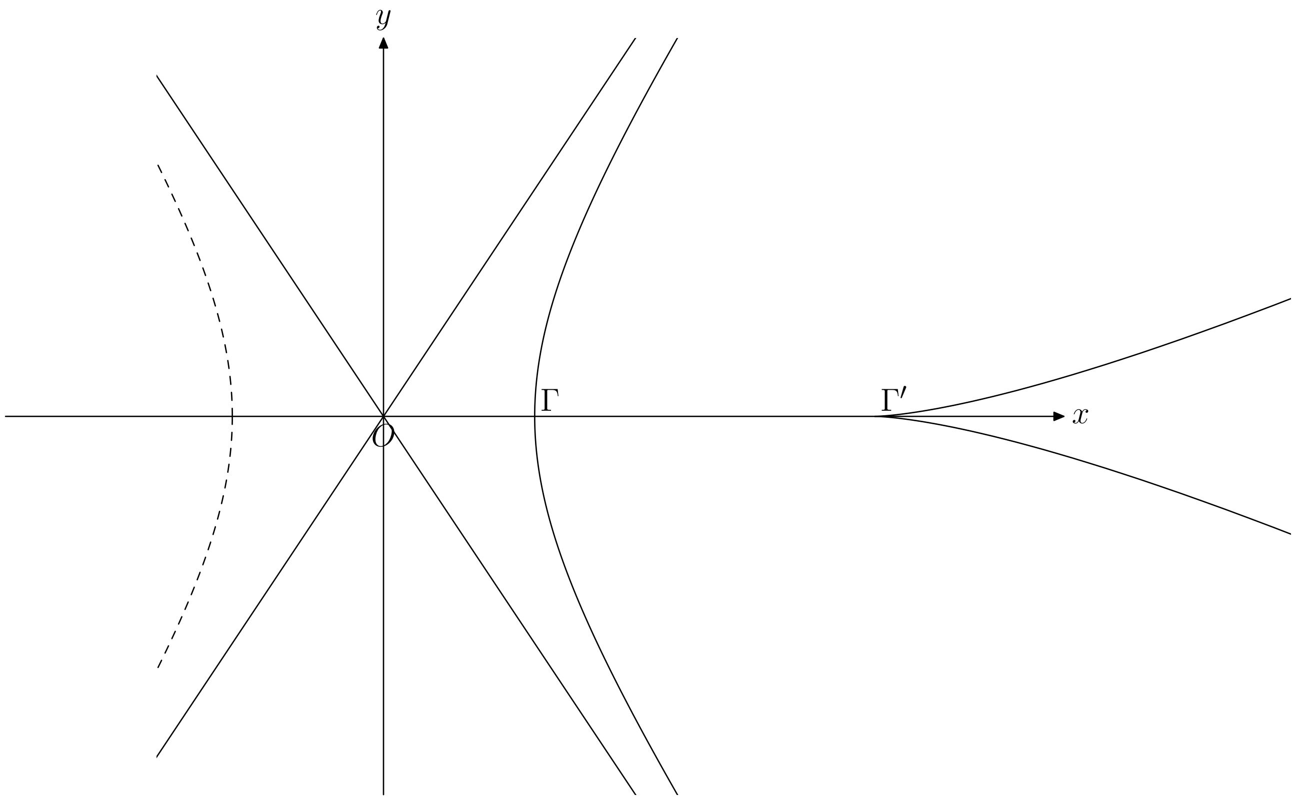

Figure 1 la courbe Γ, ses asymptotes et sa développée Γ'

Question II.3

On évalue $\overrightarrow{M'(t)} \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{sh}\,t \\ 3\,\mathrm{ch}\,t \end{pmatrix}$ donc $\dfrac{ds}{dt} = \|\overrightarrow{M'(t)}\| = \sqrt{4\,\mathrm{sh}^2\,t + 9\,\mathrm{ch}^2\,t}$, et on en déduit les vecteurs du repère de Frénet :

$$\overrightarrow{T(t)} = \frac{1}{\sqrt{4\,\mathrm{sh}^2\,t + 9\,\mathrm{ch}^2\,t}} \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{sh}\,t \\ 3\,\mathrm{ch}\,t \end{pmatrix} \qquad \text{et donc} \qquad \overrightarrow{N(t)} = \frac{1}{\sqrt{4\,\mathrm{sh}^2\,t + 9\,\mathrm{ch}^2\,t}} \begin{pmatrix} -3\,\mathrm{ch}\,t \\ 2\,\mathrm{sh}\,t \end{pmatrix}.$$

Question II.4

On utilise la formule de Frénet : $\dfrac{d}{ds}\overrightarrow{T(t)} = \dfrac{1}{R}\overrightarrow{N(t)}$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\overrightarrow{T(t)} = \frac{1}{\sqrt{4\,\mathrm{sh}^2\,t + 9\,\mathrm{ch}^2\,t}} \frac{d}{dt}\overrightarrow{T(t)} &= \begin{pmatrix} -\dfrac{26\,\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{sh}^2\,t}{(4\,\mathrm{sh}^2\,t + 9\,\mathrm{ch}^2\,t)^2} + \dfrac{2\,\mathrm{ch}\,t}{4\,\mathrm{sh}^2\,t + 9\,\mathrm{ch}^2\,t} \\ -\dfrac{39\,\mathrm{ch}^2\,t\,\mathrm{sh}\,t}{(4\,\mathrm{sh}^2\,t + 9\,\mathrm{ch}^2\,t)^2} + \dfrac{3\,\mathrm{sh}\,t}{4\,\mathrm{sh}^2\,t + 9\,\mathrm{ch}^2\,t} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(4\,\mathrm{sh}^2\,t + 9\,\mathrm{ch}^2\,t)^2} \begin{pmatrix} 72\,\mathrm{ch}\,t \\ -48\,\mathrm{sh}\,t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On en déduit que $R = -\dfrac{(4\operatorname{sh}^2 t + 9\operatorname{ch}^2 t)^{3/2}}{24}$.

Question II.5
Les coordonnées du centre de courbure sont alors

$$\begin{cases} x_C = 2\operatorname{ch} t + \dfrac{(4\operatorname{sh}^2 t + 9\operatorname{ch}^2 t)^2 \operatorname{ch} t}{8} = \dfrac{13}{2}\operatorname{ch}^3 t \\ y_C = 3\operatorname{sh} t - \dfrac{(4\operatorname{sh}^2 t + 9\operatorname{ch}^2 t)^2 \operatorname{sh} t}{12} = -\dfrac{13}{3}\operatorname{sh}^3 t \end{cases}$$

On a montré que Γ' est la développée de Γ.

Question II.6
On observe que $C(-t)$ et $C(t)$ sont symétriques par rapport à l'axe $x'x$.

Question II.7
Au voisinage de $t = 0$, on a $x_C(t) = \dfrac{13}{2}(1 + \dfrac{t^2}{2} + o(t^3))^3 = \dfrac{13}{2}(1 + \dfrac{3t^2}{2} + o(t^3))$ et $y_C(t) = -\dfrac{13}{3}t^3 + o(t^3)$, ce qui se réécrit $\overrightarrow{OC(t)} = \begin{pmatrix} 13/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 39/4 \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ -13/3 \end{pmatrix} + \overrightarrow{o(t^3)}$.

La courbe Γ' présente donc un point de rebroussement de première espèce de coordonnées $(13/2, 0)$ avec une demi tangente horizontale.

Question II.8
Quand $t \to +\infty$, $x_C \sim \dfrac{13}{2}\dfrac{e^{6t}}{8} = \dfrac{13}{16}e^{6t}$ et $y_C \sim -\dfrac{13}{3}\dfrac{e^{6t}}{8} = -\dfrac{13}{24}e^{6t}$.
On évalue donc $2x_C + 3y_C = 13(\operatorname{ch}^3 t - \operatorname{sh}^3 t) = 13(\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t)(\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{ch} t \operatorname{sh} t + \operatorname{sh}^2 t)$.
Ainsi $2x_C + 3y_C \sim 13e^t(3\dfrac{e^{2t}}{4} = \dfrac{39}{4}e^{3t} \to +\infty$ ce qui montre qu'il n'y a pas asymptote mais seulement une direction asymptotique, dont la direction est la droite d'équation $2x + 3y$, qui est perpendiculaire à l'asymptote de Γ.
Par symétrie autour de l'axe des abscisses, on obtient le même résultat quand $t \to -\infty$.

Question II.9
II.9.a Les égalités $\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t = 2\operatorname{ch}^2 t - 1 = 2\operatorname{sh}^2 t + 1$ découlent de $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$.
En outre $\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t = (\dfrac{e^t + e^{-t}}{2})^2 + (\dfrac{e^t - e^{-t}}{2})^2 = 2\dfrac{e^{2t} + e^-2t}{4} = \operatorname{ch} 2t$.
Puis $\operatorname{sh} 2t = e^{2t} - \operatorname{ch} 2t = (\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t)^2 - (\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t) = 2\operatorname{ch} t \operatorname{sh} t$.
II.9.b On calcule alors $\overrightarrow{OC'(t)} = 13\begin{pmatrix} \dfrac{3}{2}\operatorname{ch}^2 t \operatorname{sh} t \\ -\operatorname{sh}^2 t \operatorname{ch} t \end{pmatrix} = \dfrac{13}{2}\operatorname{ch} t \operatorname{sh} t \begin{pmatrix} 3\operatorname{ch} t \\ -2\operatorname{sh} t \end{pmatrix}$, et sa norme vaut $\dfrac{13}{2}\operatorname{ch} t \operatorname{sh} t\sqrt{9\operatorname{ch}^2 t + 4\operatorname{sh}^2 t} = \dfrac{13}{4}\operatorname{sh} 2t\sqrt{\dfrac{13\operatorname{ch} 2t + 5}{2}}$.
La longueur demandée s'écrit alors :

$$\ell = \int_0^1 \frac{13}{4\sqrt{2}}\operatorname{sh} 2t\sqrt{13\operatorname{ch} 2t + 5}\,dt = \frac{1}{8\sqrt{2}}\int_{18}^{13\operatorname{ch} 2+5} \sqrt{u}\,du,$$

en posant $u = 13\operatorname{ch} 2t + 5$.
Finalement

$$\ell = \frac{1}{12\sqrt{2}}\left[u^{3/2}\right]_{18}^{13\operatorname{ch} 2+5} = \frac{(13\operatorname{ch} 2 + 5)^{3/2}}{12\sqrt{2}} - \frac{9}{2}.$$

Partie III — Partie C

Question III.1
En développant $(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)(X-\alpha_3) = X^3-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)X^2+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1)X-\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ on trouve que $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-a$, $\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1=b$ et $\alpha_1\alpha_2\alpha_3=-c$.

Question III.2
Les asymptotes de $\mathcal{H}$ sont les axes de coordonnées. Pour trouver une équation réduite de $\mathcal{H}$, on fait tourner le repère de $\dfrac{\pi}{4}$, et si les nouvelles coordonnées sont (X,Y), on dispose de $x=\dfrac{X-Y}{\sqrt{2}}$ et $y=\dfrac{X+Y}{\sqrt{2}}$, de sorte que l'équation réduite de $\mathcal{H}$ s'écrit $\dfrac{X^2-Y^2}{2}=6$ ou encore $\dfrac{X^2}{12}-\dfrac{Y^2}{12}=1$.
Avec les notations habituelles, $a=b=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ donc $c=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ et l'excentricité de l'hyperbole est $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{2}$.

Question III.3
$P(2,3)$, donc $Q(-2,-3)$. O étant centre de symétrie de $\mathcal{H}$, si P est sur l'hyperbole, Q aussi.

Question III.4
La longueur PQ est le rayon du cercle demandée, elle vaut $\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$.
Une équation du cercle $\mathcal{C}$ est donc : $(x-2)^2+(y-3)^2=52 \iff x^2+y^2-4x-6y=39$.

Question III.5
Il suffit de remplacer y par $6/x$ dans l'équation du cercle $\mathcal{C}$ pour obtenir l'équation aux abscisses demandée : $x^4-4x^3-39x^2-36x+36=0$.

Question III.6
On sait que Q est à la fois sur $\mathcal{H}$ et sur $\mathcal{C}$: c'est dire que son abscisse, -2, est racine du polynôme $x^4-4x^3-39x^2-36x+36$, ou encore que celui-ci peut s'écrire sous la forme

$$x^4-4x^3-39x^2-36x+36=(x+2)U(x).$$

En posant la division, on trouve que $U(x)=x^3-6x^2-27x+18$.

Question III.7
On trouve $U(-2)=40>0$ et $U(1)=-14<0$. En outre on a bien sûr $\lim\limits_{x\to-\infty}U(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}U(x)=+\infty$.
On en déduit que le polynôme admet une racine au moins dans $]-\infty,-2[$, une au moins dans $]-2,1[$ et une encore au moins dans $]1,+\infty[$.
Mais U est de degré 3 et a donc au plus 3 racines. Finalement, U a 3 racines réelles deux à deux distinctes vérifiant $r_1<-2<r_2<1<r_3$.

Question III.8
Finalement notre équation aux abscisses possède 4 racines : -2 (qui correspond au point Q), et r_1, r_2, r_3, qui correspondent à trois points supplémentaires, deux à deux distincts, et distincts de Q.
Le point M_i a pour coordonnées $(r_i,6/r_i)$ puisqu'il est sur l'hyperbole.

Question III.9
Les coordonnées du centre de gravité G du triangle $M_1M_2M_3$ sont $x_G=\dfrac{r_1+r_2+r_3}{3}$ et $y_G=\dfrac{2}{r_1}+\dfrac{2}{r_2}+\dfrac{2}{r_3}$.
On peut écrire $y_G=\dfrac{2}{r_1r_2r_3}(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)$, donc, en appliquant au polynôme U les résultats de la question III.1, il vient $x_G=\dfrac{6}{3}=2$ et $y_G=\dfrac{2}{-18}\times(-27)=3$. On constate que $G=P$.
Or P est le centre du cercle $\mathcal{C}$ qui contient M_1, M_2 et M_3 : c'est donc aussi le point d'intersection des médiatrices du triangle.
Puisqu'il est en même temps centre de gravité de ce triangle, c'est que le triangle est équilatéral.
On a représenté la figure correspondante dans la page suivante.

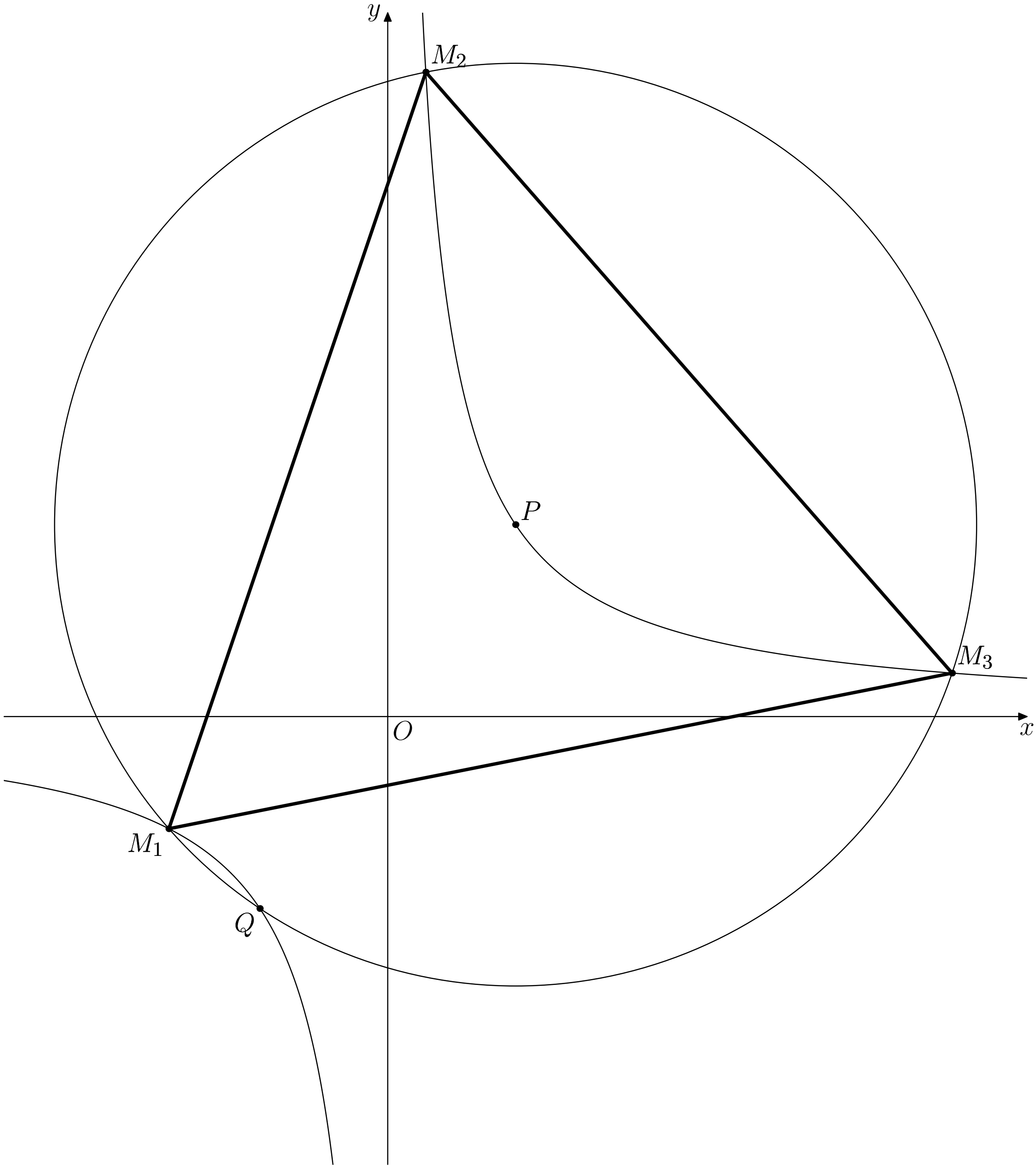

Figure 2 le cercle $\mathcal{C}$, l'hyperbole $\mathcal{H}$ et le triangle $M_1M_2M_3$