CONCOURS AGRO-VETO, SESSION 2011
Corrigé de l'épreuve A

I - Première partie

1.1 Le théorème de factorisation des polynômes donne :

$$ar^2 + br + c = a(r - \omega_1)(r - \omega_2).$$

En développant le second membre, on obtient alors

$$ar^2 + br + c = a(r^2 - (\omega_1 + \omega_2)r + \omega_1\omega_2).$$

On en déduit le résultat par identification des coefficients.

$$\boxed{a(\omega_1 + \omega_2) = -b \quad a\omega_1\omega_2 = c}$$

1.2 Si y est de classe C^2, alors z est clairement C^1, en tant que combinaison linéaire de fonctions C^1. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} z' - \omega_2 z &= y'' - (\omega_1 + \omega_2)y' + \omega_1\omega_2 y \\ &= \frac{1}{a}(ay'' + by' + cy) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\boxed{z \text{ est de classe } C^1\text{, de sorte que } z' - \omega_2 z = 0.}$$

On déduit alors une expression de z du fait que toute solution de l'équation $z' - \omega_2 z = 0$ est de la forme $x \mapsto \lambda e^{\omega_2 x}$, avec λ un réel.

$$\boxed{\text{Il existe un réel } \lambda \text{ tel que } z(x) = \lambda e^{\omega_2 x}.}$$

On vient de prouver que y est solution de l'équation différentielle

$$y' - \omega_1 y = \lambda e^{\omega_2 x} \quad (\star)$$

pour un réel λ donné. Or on sait déjà que la solution générale de l'équation homogène associée à $(\star)$ est $x \mapsto \mu e^{\omega_1 x}$, il ne reste donc plus qu'à déterminer une solution particulière de $(\star)$.

<u>Si $\omega_1 \neq \omega_2$.</u> Puisque ω_2 n'est pas racine de l'équation $r - \omega_1 = 0$, on sait que $(\star)$ admet une solution particulière de la forme $y_0(x) = \alpha e^{\omega_2 x}$. Cela assure que la solution générale de celle-ci est de la forme $x \mapsto \mu e^{\omega_1 x} + \alpha e^{\omega_2 x}$, ce qui donne le résultat.

$$\boxed{\text{Si } \omega_1 \neq \omega_2,\ y \text{ est de la forme } x \mapsto Ae^{\omega_1 x} + Be^{\omega_2 x}\text{, avec } A, B \text{ des réels.}}$$

<u>Si $\omega_1 = \omega_2$.</u> Puisque ω_2 est racine de l'équation $r - \omega_1 = 0$, on sait que $(\star)$ admet une solution particulière de la forme $y_0(x) = \alpha x e^{\omega_2 x}$. Cela assure que la solution générale de celle-ci est de la forme $x \mapsto \mu e^{\omega_1 x} + \alpha x e^{\omega_1 x}$, d'où le résultat.

$$\boxed{\text{Si } \omega_1 = \omega_2,\ y \text{ est de la forme } x \mapsto (Ax + B)\, e^{\omega_1 x}\text{, avec } A, B \text{ des réels.}}$$

1.3 Soient A, B deux réels, et u la fonction définie par $u(x) = (Ax + B)\, e^{\omega_1 x}$. Le calcul de ses dérivées donne :

$$u'(x) = Ae^{\omega_1 x} + \omega_1(Ax + B)e^{\omega_1 x}$$
$$u''(x) = 2\omega_1 Ae^{\omega_1 x} + \omega_1^2(Ax + B)e^{\omega_1 x}$$

On en déduit alors, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} au''(x) + bu'(x) + cu(x) &= e^{\omega_1 x}\left(Ax\left(a\omega_1^2 + b\omega_1 + c\right) + B\left(a\omega_1^2 + b\omega_1 + c\right) + A\left(2a\omega_1 + b\right)\right) \\ &= e^{\omega_1 x}\left(AxP(\omega_1) + BP(\omega_1) + AP'(\omega_1)\right) \end{aligned}$$

où on a posé $P(r) = ar^2 + br + c$. Mais lorsque $\omega_1 = \omega_2$, dire que ω_1 et ω_2 sont les racines de P c'est dire que ω_1 est une racine double de P. Cela donne $P(\omega_1) = P'(\omega_1) = 0$, ce qui donne le résultat recherché.

$$\boxed{\text{Pour tous réels } A \text{ et } B, \text{ les fonctions } x \mapsto (Ax + B)\, e^{\omega_1 x} \text{ sont solutions de } (\varepsilon_2') \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

On vient d'établir l'inclusion suivante :

$$Vect\left(x \mapsto xe^{\omega_1 x}, x \mapsto e^{\omega_1 x}\right) \subset S_2'.$$

Réciproquement, il faudrait prouver que tout élément de S_2' est de la forme $x \mapsto Axe^{\omega_1 x} + Be^{\omega_1 x}$, mais on remarque que cela a été fait à la question précédente. D'où le résultat.

$$\boxed{\text{Si } \omega_1 = \omega_2,\ S_2' = Vect\left(x \mapsto xe^{\omega_1 x}, x \mapsto e^{\omega_1 x}\right)}$$

On déduit du résultat ci-dessus que S_2' est le sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par $f_1 : x \mapsto xe^{\omega_1 x}$ et $f_2 : x \mapsto e^{\omega_1 x}$. Pour démontrer que celui-ci est de dimension 2, il suffit de prouver que la famille (f_1, f_2) est libre. Considérons pour cela deux réels λ_1, λ_2 tels que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0.$$

Pour tout réel x on a alors

$$\lambda_1 xe^{\omega_1 x} + \lambda_2 e^{\omega_1 x} = 0.$$

En multipliant cette égalité par $e^{-\omega_1 x}$ on obtient

$$\lambda_1 x + \lambda_2 = 0,$$

ce qui donne ensuite $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ par identification des coefficients. D'où le résultat.

$$\boxed{S_2' \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel de dimension 2.}}$$

1.4 Soient A, B deux réels, et u la fonction définie par $u(x) = Ae^{\omega_1 x} + Be^{\omega_2 x}$. Le calcul de ses dérivées donne :

$$u'(x) = \omega_1 Ae^{\omega_1 x} + \omega_2 Be^{\omega_2 x}$$
$$u''(x) = \omega_1^2 Ae^{\omega_1 x} + \omega_2^2 Be^{\omega_2 x}$$

On en déduit alors, pour tout réel x :

$$au''(x) + bu'(x) + cu(x) = Ae^{\omega_1 x}\left(a\omega_1^2 + b\omega_1 + c\right) + Be^{\omega_2 x}\left(a\omega_2^2 + b\omega_2 + c\right) = 0.$$

D'où le résultat recherché.

$$\boxed{\text{Pour tous réels } A \text{ et } B\text{, les fonctions } x \mapsto Ae^{\omega_1 x} + Be^{\omega_2 x} \text{ sont solutions de } (\varepsilon_2') \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

On vient d'établir l'inclusion suivante :

$$Vect\,(x \mapsto e^{\omega_1 x}, x \mapsto e^{\omega_2 x}) \subset S_2'.$$

Réciproquement, il faudrait prouver que tout élément de S_2' est de la forme $x \mapsto Ae^{\omega_1 x} + Be^{\omega_2 x}$, mais on remarque que cela a été fait à la question 1.2. D'où le résultat.

$$\boxed{\text{Si } \omega_1 \neq \omega_2,\ S_2' = Vect\,(x \mapsto e^{\omega_1 x}, x \mapsto e^{\omega_2 x})}$$

On déduit du résultat ci-dessus que S_2' est le sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par $x \mapsto e^{\omega_1 x}, x \mapsto e^{\omega_2 x}$. Pour démontrer que celui-ci est de dimension 2, il suffit de prouver que la famille $(x \mapsto e^{\omega_1 x}, x \mapsto e^{\omega_2 x})$ est libre. Considérons pour cela l'application linéaire :

$$\begin{array}{cccc} \Psi : & C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \to & C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & f' \end{array}$$

Puisque $x \mapsto e^{\omega_1 x}, x \mapsto e^{\omega_2 x}$ sont des vecteurs propres de Ψ associés à deux valeurs propres distinctes (ω_1 et ω_2), on en déduit qu'ils forment une famille libre, ce qui termine la démonstration.

$$\boxed{S_2' \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel de dimension 2.}}$$

Remarque. Pour établir la liberté de la famille $(u : x \mapsto e^{\omega_1 x}, v : x \mapsto e^{\omega_2 x})$, on aurait également pu revenir à la définition d'une famille libre, et ainsi démontrer que pour λ et μ réels on a : $\lambda u + \mu v = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 0$. Pour ce faire on peut, par exemple, choisir deux valeurs différentes de x, ou bien dériver la relation considérée et choisir une valeur de x.

1.5 Il suffit d'utiliser la méthode qui vient d'être établie, en remarquant que l'équation caractéristique associée admet 1 et -1 comme racines.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } y'' - y = 0 \text{ est } Vect\left(x \mapsto e^x, x \mapsto e^{-x}\right).}$$

2.1.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que f vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) - f(x) = xe^x.$$

Puisque f et $x \mapsto xe^x$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, on obtient en dérivant n fois cette égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n+2)}(x) - f^{(n)}(x) = \frac{d^n\left(xe^x\right)}{dx^n}.$$

Pour obtenir le résultat, il suffit donc d'établir $\frac{d^n(xe^x)}{dx^n} = xe^x + ne^x$. On utilise pour cela la formule de Leibniz, qui donne

$$\frac{d^n\left(xe^x\right)}{dx^n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{(k)} \left(e^x\right)^{(n-k)} = \binom{n}{0} x^{(0)} \left(e^x\right)^{(n)} + \binom{n}{1} x^{(1)} \left(e^x\right)^{(n-1)} = xe^x + ne^x.$$

D'où le résultat.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n+2)}(x) - f^{(n)}(x) = xe^x + ne^x}$$

Remarque. On aurait également pu démontrer cette formule par récurrence.

En prenant $x = 0$, on obtient alors l'égalité suivante.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_{n+2} - \alpha_n = n}$$

Montrons le résultat suivant par récurrence, comme indiqué.
Initialisation. En $p = 0$, la propriété considérée s'écrit

$$\begin{cases} \alpha_0 = \alpha_0 \\ \alpha_1 = \alpha_1 \end{cases}$$

ce qui est trivialement vrai.
Héritage. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que la propriété est vraie au rang p. En utilisant la propriété établie ci-avant ainsi que l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\alpha_{2p+2} = \alpha_{2p} + 2p = \alpha_0 + p(p-1) + 2p = \alpha_0 + p(p+1)$$

et

$$\alpha_{2p+1} = \alpha_{2p-1} + 2p - 1 = \alpha_1 + (p-1)^2 + 2p - 1 = \alpha_1 + p^2.$$

D'où la propriété au rang $p+1$, et par suite le résultat.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \begin{cases} \alpha_{2p} = \alpha_0 + p(p-1) \\ \alpha_{2p+1} = \alpha_1 + p^2 \end{cases}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque f est de classe C^∞, elle admet un développement limité à tout ordre en 0, ce qui donne

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{2n+1} \alpha_k \frac{x^k}{k!} + o(x^{2n+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_{2k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{n} \alpha_{2k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (\alpha_0 + k(k-1)) \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{n} \left(\alpha_1 + k^2\right) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

$$\boxed{\text{Au voisinage de 0, on a } f(x) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha_0 + k(k-1)) \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{n} \left(\alpha_1 + k^2\right) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})}$$

2.1.2 Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\frac{1}{(2p-2)!} - \frac{1}{(2p-1)!} = \frac{2p-2}{(2p-1)!} = \frac{4p(p-1)}{(2p)!}$$

et

$$\frac{1}{(2p-1)!} - \frac{1}{(2p)!} = \frac{2p-1}{(2p)!} = \frac{4p^2-1}{(2p+1)!}.$$

D'où le résultat.

$$\boxed{\text{Pour tout } p \in \mathbb{N}^* \text{ on a } \frac{4p(p-1)}{(2p)!} = \frac{1}{(2p-2)!} - \frac{1}{(2p-1)!} \text{ et } \frac{4p^2-1}{(2p+1)!} = \frac{1}{(2p-1)!} - \frac{1}{(2p)!}.}$$

En choisissant $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = -\dfrac{1}{4}$, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{4k(k-1)}{(2k)!}x^{2k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{4k^2-1}{(2k+1)!}x^{2k+1}\right) + o(x^{2n+1}) \\
&= \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{4k(k-1)}{(2k)!}x^{2k} + 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{4k^2-1}{(2k+1)!}x^{2k+1} - x\right) + o(x^{2n+1}) \\
&= \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-2)!}x^{2k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)!}x^{2k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)!}x^{2k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)!}x^{2k+1} - x\right) + o(x^{2n+1}) \\
&= \frac{1}{4}\left(\sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} \frac{1}{(k-2)!}x^{k} - \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} \frac{1}{(k-1)!}x^{k} + \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} \frac{1}{(k-2)!}x^{k} - \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} \frac{1}{(k-1)!}x^{k} - x\right) + o(x^{2n+1}) \\
&= \frac{1}{4}\left(\sum_{k=2}^{2n+1} \frac{1}{(k-2)!}x^{k} - \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{1}{(k-1)!}x^{k} - x\right) + o(x^{2n+1}) \\
&= \frac{1}{4}\left(\sum_{i=0}^{2n-1} \frac{1}{i!}x^{i+2} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{(k-1)!}x^{k}\right) + o(x^{2n+1}) \\
&= \frac{1}{4}\left(\sum_{i=0}^{2n-1} \frac{1}{i!}x^{i+2} - \sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{i!}x^{i+1}\right) + o(x^{2n+1})
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

$$\boxed{\text{Au voisinage de 0, on a } f(x) = \frac{1}{4}\left(\sum_{i=0}^{2n-1} \frac{1}{i!}x^{i+2} - \sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{i!}x^{i+1}\right) + o(x^{2n+1})}$$

2.1.3 De la question précédente on déduit, pour tout entier n :

$$f(x) = \frac{1}{4}\left(x^2 \sum_{i=0}^{2n-1} \frac{1}{i!}x^i - x \sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{i!}x^i\right) + o(x^{2n+1}).$$

On voit alors que f possède au voisinage de 0 et à l'ordre $2n+1$, le même développement limité que la fonction $u : x \mapsto \frac{1}{4}(x^2e^x - xe^x)$. En effet, pour obtenir un développement limité de u à l'ordre $2n+1$, il suffit d'utiliser le développement à l'ordre $2n-1$ de l'exponentielle pour la première occurrence de e^x, et le développement à l'ordre $2n$ de l'exponentielle pour la seconde occurrence.

$$\boxed{f \text{ possède en 0 le même développement limité que } x \mapsto \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x, \text{ à tout ordre impair.}}$$

2.1.4 Soit $u(x) = \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x$. Le calcul de ses dérivées donne :

$$u'(x) = \frac{1}{4}(x^2 + x - 1)e^x$$

et

$$u''(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 3x)e^x.$$

Il est alors évident que u vérifie $u''(x) - u(x) = xe^x$ pour tout réel x.

$$\boxed{x \mapsto \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x \text{ est solution de } (\varepsilon_2)\,.}$$

2.2 À la question 1.5, nous avons donné la solution générale de l'équation homogène associée à (ε_2) . Il suffit alors de lui ajouter la solution particulière obtenue ci-dessus pour conclure.

$$\boxed{\text{Les solutions de } (\varepsilon_2) \text{ sont les fonctions de la forme } x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x} + \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.}$$

3.1 Si z est une solution de Δ_2, elle est forcément de classe C^2. On en déduit alors que $y : x \mapsto z(e^x)$ est également de classe C^2, par composition. D'où le résultat.

$$\boxed{\begin{array}{l} y : x \mapsto z(e^x) \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ de sorte que :} \\ y'(x) = e^x z'(e^x) \\ y''(x) = e^x z'(e^x) + e^{2x} z''(e^x) \end{array}}$$

Mais puisque z vérifie (Δ_2), on a pour tout réel t :

$$t^2 z''(t) + t z'(t) - z(t) = t\ln(t).$$

D'où, en prenant $t = e^x$:

$$e^{2x} z''(e^x) + e^x z'(e^x) - z(e^x) = xe^x;$$

on voit ainsi que l'on a

$$y''(x) - y(x) = xe^x$$

pour tout réel x.

$$\boxed{y \text{ est solution de } (\varepsilon_2)\,.}$$

On déduit alors de la question 2.2 une expression de y.

$$\boxed{\text{Il existe des réels } \lambda \text{ et } \mu \text{ tels que } y(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x} + \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x.}$$

Pour tout réel x on a donc :

$$z(e^x) = \lambda e^x + \mu e^{-x} + \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x.$$

En posant $x = \ln t$, on obtient alors directement une expression de $z(t)$ en fonction de t.

$$\boxed{z(t) = \lambda t + \frac{\mu}{t} + \frac{1}{4}\left((\ln t)^2 - \ln t\right) t}$$

3.2 On vient de démontrer que si z est une solution de (Δ_2), alors celle-ci est de la forme $t \mapsto \lambda t + \frac{\mu}{t} + \frac{1}{4}\left((\ln t)^2 - \ln t\right) t$. Réciproquement, il reste à vérifier si toute fonction de cette forme est bien une solution de l'équation différentielle. Considérons donc une telle fonction. On a alors

$$z'(t) = \lambda - \frac{1}{4} - \frac{\mu}{t^2} + \frac{1}{4}\left((\ln t)^2 - \ln t\right)$$

et

$$z''(t) = \frac{1}{4t} + \frac{2\mu}{t^3} + \frac{\ln t}{2t},$$

ce qui permet de vérifier aisément que l'on a $t^2 z'' + tz' - z = t \ln t$. D'où le résultat.

$$\boxed{\text{La solution générale de } (\Delta_2) \text{ est } t \mapsto \lambda t + \frac{\mu}{t} + \frac{1}{4}\left((\ln t)^2 - \ln t\right) t, \text{ avec } \lambda, \mu \text{ des réels.}}$$

II - Deuxième partie

1. On a

$$Y' = AY \iff \begin{pmatrix} y^{(3)}(x) \\ y''(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y''(x) + y'(x) - 2y(x) \\ y''(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$$

On voit alors que cette égalité est vraie, puisque y est solution de (ε_3').

$$\boxed{Y' = AY}$$

2.1 Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et I la matrice identité de taille 3. On a

$$(A - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rrrcl} (2-\lambda)x & +y & -2z & = & 0 \\ x & -\lambda y & & = & 0 \\ & y & -\lambda z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcll} (2-\lambda)x & +y & -2z & = & 0 & \\ x & -\lambda y & & = & 0 & \\ -\lambda(2-\lambda)x & +(2-\lambda)y & & = & 0 & L_3 \leftarrow 2L_3 - \lambda L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcll} (2-\lambda)x & +y & -2z & = & 0 & \\ x & -\lambda y & & = & 0 & \\ & (2-\lambda)(1-\lambda^2)y & & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 + \lambda(2-\lambda)L_2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcl} \boxed{-2}z & +(2-\lambda)x & +y & = & 0 \\ & \boxed{1}x & -\lambda y & = & 0 \\ & & \boxed{(2-\lambda)(1-\lambda)(1+\lambda)}y & = & 0 \end{array}\right.$$

Ce dernier système étant échelonné, on voit que le système considéré est de rang 3 si et seulement si $(2-\lambda)(1-\lambda)(1+\lambda) \neq 0$, ce qui assure que les valeurs propres de A sont $-1, 1$ et 2.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } A \text{ sont } -1, 1 \text{ et } 2.}$$

On voit ainsi que la matrice (d'ordre 3) A admet trois valeurs propres distinctes, ce qui assure qu'elle est diagonalisable.

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$$

2.2 En $\lambda = 1$, le système précédent équivaut à

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} -2z & +x & +y & = & 0 \\ & x & -y & = & 0 \end{array}\right.$$

soit encore à

$$\begin{cases} z = x \\ x = y \end{cases}$$

On voit alors que le sous-espace propre associé à 1 est la droite vectorielle engendrée par $(1, 1, 1)$.

$$\boxed{\text{Le sous-espace propre associé à 1 est la droite vectorielle engendrée par } u = (1, 1, 1).}$$

En $\lambda = -1$, le système précédent équivaut à

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} -2z & +3x & +y & = & 0 \\ & x & +y & = & 0 \end{array}\right.$$

soit encore à

$$\begin{cases} z = x \\ y = -x \end{cases}$$

On voit alors que le sous-espace propre associé à -1 est la droite vectorielle engendrée par $v = (1, -1, 1)$.

$$\boxed{\text{Le sous-espace propre associé à } -1 \text{ est la droite vectorielle engendrée par } v = (1, -1, 1).}$$

En $\lambda = 2$, le système précédent équivaut à

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} -2z & & +y & = & 0 \\ & x & -2y & = & 0 \end{array}\right.$$

soit encore à

$$\begin{cases} z = \frac{1}{2}y \\ x = 2y \end{cases}$$

On voit alors que le sous-espace propre associé à 2 est la droite vectorielle engendrée par $(4, 2, 1)$.

$$\boxed{\text{Le sous-espace propre associé à 2 est la droite vectorielle engendrée par } w = (4, 2, 1).}$$

La famille (u, v, w) étant formée de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $1, -1, 2$, on en déduit qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}^3$ (puisque ces valeurs propres sont deux à deux distinctes) dans laquelle la matrice de A est

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si P désigne alors la matrice de passage de la base canonique à (u, v, w), soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a alors :

$$A = PDP^{-1}.$$

D'où le résultat.

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ convient.}}$$

2.3 On sait déjà que P est inversible, en tant que matrice d'une base dans la base canonique. Quels que soient les réels x, y, z, a, b, c on a :

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x & +y & +4z & = & a \\ x & -y & +2z & = & b \\ x & +y & +z & = & c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x & +y & +4z & = & a & \\ 2x & & +6z & = & a+b & \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ & & 3z & = & a-c & \quad L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y & = & \frac{1}{6}a & -\frac{1}{2}b & +\frac{1}{3}c \\ x & = & -\frac{1}{2}a & +\frac{1}{2}b & +c \\ z & = & \frac{1}{3}a & & -\frac{1}{3}c \end{cases}$$

On en déduit $P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

3. On a

$$Y' = AY = PDP^{-1}Y.$$

On obtient alors directement le résultat en multipliant cette égalité par P^{-1} à gauche.

$$\boxed{P^{-1}Y' = DP^{-1}Y}$$

4.1 Remarque. La fonction z qui est introduite ici vous semblera certainement « sortie de nulle part, » son introduction est pourtant motivée par les questions précédentes. De la relation $P^{-1}Y' = DP^{-1}Y$ on peut en effet déduire l'égalité $Z' = DZ$ en posant $Z = P^{-1}Y$ (si vous êtes prêts à admettre que l'on peut dériver des vecteurs de fonctions comme on dérive des fonctions...). Si l'on appelle ensuite z la première coordonnée de $Z = P^{-1}Y$, on obtient $z = -\frac{1}{2}y'' + \frac{1}{2}y' + y$ après calcul du produit $P^{-1}Y$, et le calcul du produit dans l'égalité $Z' = DZ$ montre que z vérifie l'équation différentielle $z' = z$.

y étant une solution de (ε_3'), on en déduit qu'elle est de classe C^1. Il vient alors que z est de classe C^3 en tant que combinaison linéaire de fonctions de classe C^1. On peut alors écrire :

$$z' = -\frac{1}{2}y^{(3)} + \frac{1}{2}y'' + y' = -\frac{1}{2}(2y'' + y' - 2y) + \frac{1}{2}y'' + y' = -\frac{1}{2}y'' + \frac{1}{2}y' + y = z.$$

$$\boxed{z \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ de sorte que } z' = z.}$$

On en déduit qu'il existe un réel λ tel que $z(x) = \lambda e^x$, pour tout réel x.

$$\boxed{\text{Il existe un réel } \lambda \text{ tel que } z(x) = \lambda e^x, \text{ pour tout réel } x.}$$

On vient de prouver que y vérifie l'équation différentielle $-\frac{1}{2}y'' + \frac{1}{2}y' + y = \lambda e^x$, soit encore

$$(\dagger)\ - y'' + y' + 2y = 2\lambda e^x.$$

L'équation caractéristique associée à $(\dagger)$ est $-r^2 + r + 2 = 0$, qui admet pour racines -1 et 2 (après calcul du discriminant). On en déduit que la solution générale de l'équation homogène associée à $(\dagger)$ est

$$x \mapsto Ae^{-x} + Be^{2x}.$$

Considérant enfin que 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on en déduit que $(\dagger)$ admet une solution particulière définie par $y_0(x) = \alpha e^x$. Pour déterminer la valeur de α, il suffit de remarquer que l'on a

$$-y_0''(x) + y_0'(x) + 2y_0(x) = 2\alpha e^x,$$

ce qui donne $\alpha = \lambda$ après calcul des dérivées de y_0. Au final, on voit que y est de la forme $y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^x$.

$$\boxed{\text{Il existe trois réels } A, B, \lambda \text{ tels que } y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^x.}$$

4.2 On vient de prouver que toute solution de (ε_3') est de la forme $y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^x$, ce qui prouve :

$$S_3' \subset Vect(x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^x).$$

Réciproquement, il reste à vérifier si toute fonction de la forme $y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^x$ est bien une solution de (ε_3') , ce qui se fait trivialement :

$$\begin{array}{rcl} y^{(3)}(x) - 2y''(x) - y'(x) + 2y(x) & = & \left(-Ae^{-x} + 8Be^{2x} + \lambda e^x\right) \\ & & -2\left(Ae^{-x} + 4Be^{2x} + \lambda e^x\right) \\ & & -\left(-Ae^{-x} + 2Be^{2x} + \lambda e^x\right) \\ & & +2\left(Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^x\right) \\ & = & 0. \end{array}$$

D'où le résultat.

$$\boxed{S_3' = Vect(x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^x)}$$

5. On déduit du résultat ci-dessus que S_3' est le sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par $x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^x$. Pour démontrer que celui-ci est de dimension 3, il suffit de prouver que la famille $(x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^x)$ est libre. Pour cela, on peut raisonner comme à la question 1.4 de la partie I, en remarquant que $x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^x$ sont des vecteurs propres associées à des valeurs propres deux à deux distinctes (en l'occurrence $-1, 2$ et 1) de l'application linéaire $\Psi : f \mapsto f'$. Ce qui termine la démonstration.

$$\boxed{S_3' \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel de dimension 3.}}$$

Remarque. Pour établir la liberté de la famille considérée, on aurait pu cette fois encore revenir à la définition d'une famille libre.

III - Troisième partie

1.1 On peut écrire :

$$\begin{aligned} F_n &= \{x \mapsto Q(x)e^{\lambda x},\ Q \in \mathbb{R}_n[X]\} \\ &= \left\{x \mapsto \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i e^{\lambda x},\ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n\right\} \\ &= \left\{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i g_i,\ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n\right\} \\ &= Vect(g_i, 0 \leqslant i \leqslant n) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

$$\boxed{F_n = Vect(g_i, 0 \leqslant i \leqslant n)}$$

Montrons enfin que la famille $(g_0, \dots, g_n)$ est libre, ce qui prouvera $dim(F_n) = n + 1$. Considérons pour cela des réels $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ tels que

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i g_i = 0.$$

Cela équivaut à

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i e^{\lambda x} = 0,$$

soit encore à

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i = 0.$$

Par identification des coefficients, on en déduit $\alpha_0 = \cdots = \alpha_n = 0$, ce qui termine la démonstration.

$$\boxed{dim(F_n) = n + 1}$$

2.1 Soit $i \in [\![0, n]\!]$. On a

$$(D - \lambda Id)(g_i) = D(g_i) - \lambda Id(g_i) = g_i' - \lambda g_i.$$

Si $i > 0$, on a $g_i'(x) = ix^{i-1}e^{\lambda x} + \lambda x^i e^{\lambda x} = ig_{i-1}(x) + \lambda g_i(x)$, ce qui donne

$$\forall i > 0,\ (D - \lambda Id)(g_i) = ig_{i-1}.$$

Par contre, si $i = 0$, on a $g_0'(x) = \lambda e^{\lambda x} = \lambda g_0(x)$, ce qui donne $(D - \lambda Id)(g_0) = 0$. D'où le résultat.

$$\boxed{\forall (i, j) \in\in [\![0, n]\!]^2,\ (D - \lambda Id)(g_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0 \\ ig_{i-1} & \text{sinon} \end{cases}}$$

Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Montrons par récurrence sur j le résultat suivant :

$$\forall j \in \mathbb{N},\ (D - \lambda Id)^j (g_i) = \begin{cases} \dfrac{i!}{(i-j)!} g_{i-j} & \text{si } 0 \leqslant j \leqslant i \\ 0 & \text{si } i < j \end{cases}$$

Initialisation. En $j = 0$, la propriété s'écrit $g_i = g_i$, ce qui est trivialement vrai.

Héritage. Soit $j \in \mathbb{N}$ tel que la propriété soit vraie au rang j. Démontrons que celle-ci est encore vérifiée au rang $j + 1$.

•Premier cas : si $j < i$. On peut écrire dans ce cas :

$$\begin{aligned} (D - \lambda Id)^{j+1} (g_i) &= (D - \lambda Id) \left((D - \lambda Id)^j (g_i) \right) \\ &= (D - \lambda Id) \left(\frac{i!}{(i-j)!} g_{i-j} \right) \\ &= \frac{i!}{(i-j)!} (D - \lambda Id) (g_{i-j}) \\ &= \frac{i!}{(i-j)!} (i-j) g_{i-j-1} \\ &= \frac{i!}{(i-(j+1))!} g_{i-(j+1)}. \end{aligned}$$

Ce qui prouve la propriété au rang $j + 1$.

•Deuxième cas : si $j = i$. On peut écrire dans ce cas :

$$\begin{aligned} (D - \lambda Id)^{i+1} (g_i) &= (D - \lambda Id) \left((D - \lambda Id)^i (g_i) \right) \\ &= (D - \lambda Id) (i! g_0) \\ &= i! (D - \lambda Id) (g_0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui prouve la propriété au rang $j + 1$.

•Troisième cas : si $j > i$. On peut écrire dans ce cas :

$$\begin{aligned} (D - \lambda Id)^{j+1} (g_i) &= (D - \lambda Id) \left((D - \lambda Id)^j (g_i) \right) \\ &= (D - \lambda Id) (0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui prouve la propriété au rang $j + 1$ et termine la démonstration.

$$\boxed{\forall j \in [\![0, n]\!],\ (D - \lambda Id)^j (g_i) = \begin{cases} \dfrac{i!}{(i-j)!} g_{i-j}, & 0 \leqslant j \leqslant i \\ 0, & i < j \leqslant n \end{cases}}$$

2.2 On obtient directement le résultat en appliquant la formule de Taylor en λ au polynôme $\prod$, qui est de degré inférieur ou égal à n.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \prod(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\prod^{(j)}(\lambda)}{j!} (x - \lambda)^j}$$

2.3 En utilisant le résultat précédent et la question 2.1 on peut écrire :

$$\begin{aligned}\Phi(g_i) &= \sum_{j=0}^{n} \frac{\prod^{(j)}(\lambda)}{j!}\left[(D-\lambda Id)^j\,(g_i)\right]\\ &= \sum_{j=0}^{i} \frac{\prod^{(j)}(\lambda)}{j!} \times \frac{i!}{(i-j)!} g_{i-j} + 0\\ &= \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \prod^{(j)}(\lambda)\; g_{i-j}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

$$\boxed{\Phi(g_i) = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \prod^{(j)}(\lambda)\; g_{i-j}}$$

2.4 On observe que pour toute fonction $f \in F_n$ on a

$$\Phi(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i f^{(i)} = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i(f),$$

ce qui prouve que l'on a $\Phi = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i$. On commence alors par remarquer que chacun des D^i est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et donc que $\Phi \in \mathscr{L}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}))$ en tant que combinaison linéaire des D^i. On observe alors qu'à la question précédente on a établit $\Phi(g_i) \in F_n$ pour tout entier i compris entre 0 et n, ce qui établit $\Phi(F_n) \subset F_n$, et démontre ainsi que Φ est un endomorphisme de F_n.

$$\boxed{\Phi \in \mathscr{L}(F_n)}$$

On obtient alors directement la matrice M de Φ dans la base $\mathscr{G}$ en utilisant la question 2.3 puisque la formule $\Phi(g_i) = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \prod^{(j)}(\lambda)\; g_{i-j}$ décompose dans $\mathscr{G}$ l'image par Φ des vecteurs de $\mathscr{G}$.

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} \prod(\lambda) & \binom{1}{1}\prod'(\lambda) & \cdots & \binom{i}{i}\prod^{(i)}(\lambda) & \cdots & \binom{n}{n}\prod^{(n)}(\lambda) \\ & & & \vdots & & \\ 0 & \prod(\lambda) & & \binom{i}{1}\prod'(\lambda) & & \vdots \\ & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \prod(\lambda) & & \\ & & & & & \binom{n}{1}\prod'(\lambda) \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & & 0 & \prod(\lambda) \end{pmatrix}}$$

2.5 Il apparait que M est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont tous non nuls, ce qui assure qu'elle est inversible. On en déduit alors que Φ est une bijection.

$$\boxed{\Phi \text{ est une bijection}}$$

3. Il est clair que y est une solution de (ε_k) si et seulement si $\Phi(y) = g_k$. Mais comme Φ est un isomorphisme de F_n et puisque $g_k \in F_n$, on en déduit que l'équation $\Phi(y) = g_k$ admet une unique solution dans F_n. D'où le résultat.

$$\boxed{\text{Il existe une unique fonction } f_k \text{ appartenant à } F_n \text{ solution de } (\varepsilon_k) \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

4.1 En appliquant la formule de Taylor à $\prod$ on obtient :

$$\prod = \sum_{i=0}^{n} \frac{\prod^{(i)}(0)}{i!} X^i.$$

Il suffit alors d'identifier les coefficients des deux expressions de $\prod$ pour obtenir le résultat.

$$\boxed{\forall i \in [\![0, n]\!],\ \prod^{(i)}(0) = 1}$$

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{i}{i} & \cdots & \binom{n}{n} \\ & & & \vdots & & \\ 0 & 1 & & \binom{i}{1} & & \vdots \\ & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & & \\ & & & & & \binom{n}{1} \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

4.2 Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. En lui appliquant la formule de Taylor en $t \in \mathbb{R}$ on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k.$$

Il suffit alors de prendre $x = t + 1$ pour obtenir le résultat.

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{P(t)}{0!} + \frac{P'(t)}{1!} + \frac{P''(t)}{2!} + \cdots + \frac{P^{(n)}(t)}{n!} = P(t+1)}$$

Prenons $P(t) = (t-1)^k$. La formule ci-dessus s'écrit alors :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(t)}{k!} = t^k,$$

soit encore

$$\Phi(P) = g_k.$$

On en déduit $P = \Phi^{-1}(g_k)$, ce qui équivaut à dire que P est une solution de (ε_k).

$$\boxed{t \mapsto (t-1)^k \text{ est une une solution de } (\varepsilon_k).}$$

$$\boxed{\Phi^{-1}(g_k) = t \mapsto (t-1)^k}$$

On déduit directement du résultat ci-dessus que, pour tout réel x on a :

$$\Phi^{-1}(g_k)(x) = (x-1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i x^{k-i} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i g_{k-i}(x).$$

$$\boxed{\Phi^{-1}(g_k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i g_{k-i}}$$

4.3 L'expression de M^{-1} se déduit directement des égalités obtenues ci-dessus.

$$\boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & (-1)^1\binom{1}{1} & \cdots & (-1)^i\binom{i}{i} & & \cdots & (-1)^n\binom{n}{n} \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & 1 & & (-1)\binom{i}{1} & & & \vdots \\ & & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & & & \\ & & & & & & (-1)\binom{n}{1} \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & & & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

4.4 Soient i, j deux entiers tels que $i < j$. Choisissons alors pour n un entier strictement supérieur à j. Après une observation attentive des expressions de M et de M^{-1} données précédemment, on voit que le terme général $m_{p,q}$ de M vérifie :

$$m_{p,q} = \begin{cases} \binom{q-1}{q-p} & \text{si } p \leqslant q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et le terme général $n_{p,q}$ de M^{-1} vérifie :

$$n_{p,q} = \begin{cases} (-1)^{q-p}\binom{q-1}{q-p} & \text{si } p \leqslant q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Et comme MM^{-1} est égal à la matrice identité de taille $n+1$, on en déduit que si $i<j$, le terme d'indices i,j de cette matrice est nul. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n+1} m_{i,k} n_{k,j} = 0,$$

soit

$$\sum_{k=i}^{j} \binom{k-1}{k-i} (-1)^{j-k} \binom{j-1}{j-k} = 0,$$

ce qui équivaut à

$$\sum_{k=i}^{j} \binom{k-1}{i-1} (-1)^{j-k} \binom{j-1}{k-1} = 0.$$

Si l'on change alors j en $j+1$ et i en $i+1$ (ce qui est possible car cette égalité est valable quels que soient les entiers i et j avec $i<j$) on obtient :

$$\sum_{k=i+1}^{j+1} \binom{k-1}{i} (-1)^{j+1-k} \binom{j}{k-1} = 0.$$

Il ne reste alors plus qu'à effectuer le changement d'indice $u=k-1$ pour obtenir le résultat.

$$\boxed{\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i<j \Rightarrow \sum_{k=i}^{j} (-1)^{j-k} \binom{k}{i} \binom{j}{k} = 0}$$