Banque « Agro – Véto »
2009/2010

Correction UPA

Correction de l'épreuve A

(durée : 3 h 30)

Problème 1

Considérons la matrice A appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}\cdot$

1. a) *Déterminer les valeurs propres de A. Ce résultat assure-t-il la diagonalisabilité de A ?*

On a

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(A-\lambda I_3) &= \operatorname{rg}\big(6(A-\lambda I_3)\big) \\ &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -6\lambda & \boxed{3} & 3 \\ -4 & 6-6\lambda & 4 \\ -2 & 3 & 5-6\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} {\scriptstyle L_1} \\ {\scriptstyle L_2} \\ {\scriptstyle L_3} \end{matrix} \\ &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -6\lambda & \boxed{3} & 3 \\ -4+12\lambda-12\lambda^2 & 0 & -2+6\lambda \\ -2+6\lambda & 0 & 2-6\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} {\scriptstyle L_1} \\ {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2-(2-2\lambda)L_1} \\ {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \end{matrix} \end{aligned}$$

On distingue alors deux cas :

- Si $\lambda = 1/3$, alors

$$\operatorname{rg}\Big(A - \frac{1}{3}I_3\Big) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -2 & \boxed{3} & 3 \\ \boxed{-\frac{4}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

- Si $\lambda \neq 1/3$, alors on peut choisir $-2+6\lambda$ comme pivot, ce qui donne

$$\operatorname{rg}(A-\lambda I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -6\lambda & \boxed{3} & 3 \\ -4+12\lambda-12\lambda^2 & 0 & \boxed{-2+6\lambda} \\ -6+18\lambda-12\lambda^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} {\scriptstyle L_1} \\ {\scriptstyle L_2} \\ {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3+L_2} \end{matrix}$$

  donc, dans le cas où $\lambda \neq 1/3$, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(A-\lambda I_3) < 3 \quad &\Longleftrightarrow \quad -6+18\lambda-12\lambda^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = \frac{1}{2}\cdot \end{aligned}$$

En conclusion, on a

$$\boxed{\operatorname{Sp} A = \Big\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}\Big\}\cdot}$$

Comme la matrice A est d'ordre 3 et possède 3 valeurs propres distinctes, le cours nous dit que

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$$

Remarque : Ce résultat découle du fait que les sous-espaces propres E_1*,* $E_{1/2}$ *et* $E_{1/3}$ *(respectivement associés à* 1*,* 1/2 *et* 1/3*) sont nécessairement de dimension* 1 *et donc que la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à l'ordre de la matrice.*

b) *Pour chaque valeur propre de* A*, déterminer une base du sous-espace propre associé.*

Déterminons $E_1 = \text{Ker}(A - I_3)$. D'après la réduite de Gauß obtenue à la question précédente, on a, pour $X = {}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$(A - I_3)X = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -6x & + & \boxed{3y} & + & 3z & = & 0 \\ -4x & & & + & \boxed{4z} & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \lambda \\ y & = & \lambda \\ z & = & \lambda \end{array}\right. \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

donc

$$\boxed{E_1 = \text{Vect}\left({}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right).}$$

Déterminons $E_{1/2} = \text{Ker}\left(A - \frac{1}{2}I_3\right)$. D'après la réduite de Gauß obtenue à la question précédente, on a, pour $X = {}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$\left(A - \frac{1}{2}I_3\right)X = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -3x & + & \boxed{3y} & + & 3z & = & 0 \\ -\ x & & & + & \boxed{z} & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \lambda \\ y & = & 0 \\ z & = & \lambda \end{array}\right. \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

donc

$$\boxed{E_{1/2} = \text{Vect}\big({}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Déterminons $E_{1/3} = \text{Ker}\left(A - \frac{1}{3}I_3\right)$. D'après la réduite de Gauß (pour $\lambda = 1/3$) obtenue à la question précédente, on a, pour $X = {}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$\left(A - \frac{1}{3}I_3\right)X = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & \boxed{3y} & + & 3z & = & 0 \\ \boxed{x} & & & & & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 0 \\ y & = & -\lambda \\ z & = & \lambda \end{array}\right. \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

donc

$$\boxed{E_{1/3} = \text{Vect}\left({}^t\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right).}$$

c) *Déterminer* $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ *telle que la matrice* $P^{-1}AP$ *soit de la forme* $D = \text{Diag}(\alpha, \beta, \gamma)$ *avec* α*,* β*,* γ *trois nombres réels tels que* $\alpha > \beta > \gamma$*. Les coefficients de la dernière ligne de* P *seront choisis égaux à* 1*.*

Le théorème de changement de base, de la base canonique vers la base de vecteurs propres déterminée à la question précédente, nous dit que l'on peut écrire $A = PDP^{-1}$ où D désigne la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A (dans l'ordre décroissant comme le veut l'énoncé) et P désigne la matrice de passage de la base canonique vers la base de vecteurs propres (c'est-à-dire la matrice obtenue en disposant en colonnes les vecteurs propres, dans un ordre identique à celui des valeurs propres). Par conséquent,

$$\boxed{A = PDP^{-1} \qquad \text{où} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

2. a) *Calculer P^{-1}.*

Soit X le vecteur colonne de coordonnées x, y, z et Y celui de coordonnées a, b, c. Alors

$$
\begin{aligned}
PX = Y \quad &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{\begin{array}{llllll} x & + \boxed{y} & & = & a & L_1 \\ x & & - z & = & b & L_2 \\ x & + y & + z & = & c & L_3 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{llllll} x & + \boxed{y} & & = & a & L_1 \\ x & & - z & = & b & L_2 \\ & & \boxed{z} & = & -a+c & L_3 - L_1 \longrightarrow L_3 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{llllll} x & + \boxed{y} & & = & a & L_1 \\ \boxed{x} & & & = & -a+b+c & L_2 + L_3 \longrightarrow L_2 \\ & & \boxed{z} & = & -a+c & L_3 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x = -a + b + c \\ y = 2a - b - c \\ z = -a + c \end{array}\right. \\
&\iff X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y
\end{aligned}
$$

donc

$$
\boxed{P \text{ est inversible et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}
$$

b) *Démontrer que, pout tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.*

Trois démonstrations pour le prix d'une :

Par changement de base : Soit $n \in \mathbb{N}$. Si a est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, on sait que D est la matrice de a dans la base de vecteurs propres. Alors A^n représente a^n dans la base canonique et D^n représente a^n dans la base de vecteurs propres. Le théorème de changement de base nous dit donc que $A^n = PD^nP^{-1}$.

Par itération : La relation est clairement vérifiée pour $n = 0$. Pour $n \geqslant 1$, on a

$$
\begin{aligned}
PD^nP^{-1} &= P\,\overbrace{(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)}^{n \text{ facteurs}}\,P^{-1} \\
&= \cancel{PP^{-1}}\ A\cancel{PP^{-1}}\ A\cancel{P} \cdots \cancel{P^{-1}}\ A\cancel{PP^{-1}} \\
&= A^n.
\end{aligned}
$$

Par récurrence : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{H}(n) : A^n = PD^nP^{-1}$.

- Pour $n = 0$, on a $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_3 = A^0$ donc $\mathcal{H}(0)$ est vraie.
- Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}(n)$ est vraie et démontrons $\mathcal{H}(n+1)$. On a

$$
A^{n+1} = A^nA = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1},
$$

où la deuxième égalité découle de $\mathcal{H}(n)$. Donc $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

- Le principe de récurrence permet de conclure que $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.

Bilan : On a

$$
\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = PD^nP^{-1}.}
$$

c) *En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n en fonction de n.*

Soit $n \in \mathbb{N}$. La matrice D étant diagonale, on a $D^n = \dfrac{1}{6^n}\begin{pmatrix} 6^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{array}{ccc}
 & \overbrace{\frac{1}{6^n}\begin{pmatrix} 6^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}^{=D^n} & \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{=P^{-1}} \\
\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=P} & \underbrace{\frac{1}{6^n}\begin{pmatrix} 6^n & 3^n & 0 \\ 6^n & 0 & -2^n \\ 6^n & 3^n & 2^n \end{pmatrix}}_{=PD^n} & \underbrace{\frac{1}{6^n}\begin{pmatrix} -6^n + 2\times 3^n & 6^n - 3^n & 6^n - 3^n \\ -6^n + 2^n & 6^n & 6^n - 2^n \\ -6^n + 2\times 3^n - 2^n & 6^n - 3^n & 6^n - 3^n + 2^n \end{pmatrix}}_{=PD^nP^{-1}}
\end{array}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \frac{1}{6^n}\begin{pmatrix} -6^n + 2\times 3^n & 6^n - 3^n & 6^n - 3^n \\ -6^n + 2^n & 6^n & 6^n - 2^n \\ -6^n + 2\times 3^n - 2^n & 6^n - 3^n & 6^n - 3^n + 2^n \end{pmatrix}}.$$

3. *Soient $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $(X_n)_{n\geqslant 0}$ la suite matricielle définie par la donnée de $X_0 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n + B$.*

   a) *Soient E un espace vectoriel réel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base de E. Considérons les endomorphismes a et b de E définis par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = A$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(b) = B$.*

      i. *Dans cette question, on suppose qu'il existe une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$. Démontrer que $\mathrm{Im}(b) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a)$.*

      Soit ℓ l'endomorphisme de E défini par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\ell) = L$. La relation matricielle $L = AL + B$ nous dit que $\ell = a \circ \ell + b$.
      Soit $\overrightarrow{y} \in \mathrm{Im}(b)$. Il existe alors $\overrightarrow{x} \in E$ tel que $\overrightarrow{y} = b(\overrightarrow{x})$. Comme $b = \ell - a \circ \ell$, on en déduit que $\overrightarrow{y} = (\ell - a \circ \ell)(\overrightarrow{x}) = (\mathrm{Id}_E - a)\big(\ell(\overrightarrow{x})\big)$, ce qui démontre que $\overrightarrow{y} \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a)$.
      En conclusion,

      $$\boxed{\mathrm{Im}(b) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a).}$$

      ii. *Réciproquement, on suppose que $\mathrm{Im}(b) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a)$. Soit G un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - a)$ dans E.*

      - *Démontrer que, pour tout vecteur $\overrightarrow{x} \in E$, il existe un unique vecteur $\overrightarrow{g} \in G$ tel que $b(\overrightarrow{x}) = (\mathrm{Id}_E - a)(\overrightarrow{g})$.*

        Soit $\overrightarrow{x} \in E$.
        Existence :
        Comme $b(\overrightarrow{x}) \in \mathrm{Im}\, b$ et comme $\mathrm{Im}(b) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a)$, on a $b(\overrightarrow{x}) \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a)$, ce qui justifie l'existence de $\overrightarrow{u} \in E$ tel que $b(\overrightarrow{x}) = (\mathrm{Id}_E - a)(\overrightarrow{u})$.
        Comme $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - a)$ et G sont supplémentaires dans E, on peut décomposer $\overrightarrow{u}$ sur la somme $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - a) + G$, c'est-à-dire qu'il existe $\overrightarrow{k} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - a)$ et $\overrightarrow{g} \in G$ tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{k} + \overrightarrow{g}$.
        En combinant ces résultats, on obtient

        $$b(\overrightarrow{x}) = (\mathrm{Id}_E - a)(\overrightarrow{k} + \overrightarrow{g}) = \underbrace{(\mathrm{Id}_E - a)(\overrightarrow{k})}_{=\overrightarrow{0}} + (\mathrm{Id}_E - a)(\overrightarrow{g}),$$

        ce qui justifie l'existence de $\overrightarrow{g} \in G$ tel que $b(\overrightarrow{x}) = (\mathrm{Id}_E - a)(\overrightarrow{g})$.

Unicité :
Soient $\overrightarrow{g_1}, \overrightarrow{g_2} \in G$ tels que $b(\overrightarrow{x}) = (\mathrm{Id}_E - a)(\overrightarrow{g_1}) = (\mathrm{Id}_E - a)(\overrightarrow{g_2})$. On a alors $(\mathrm{Id}_E - a)(\overrightarrow{g_1} - \overrightarrow{g_2}) = \overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{g_1} - \overrightarrow{g_2} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - a)$. Or, G étant un sous-espace de E, on a aussi $\overrightarrow{g_1} - \overrightarrow{g_2} \in G$, ce qui prouve que $\overrightarrow{g_1} - \overrightarrow{g_2} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - a) \cap G$. Comme $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - a)$ et G sont en somme directe, on a $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - a) \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$, ce qui implique que $\overrightarrow{g_1} - \overrightarrow{g_2} = \overrightarrow{0}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{g_1} = \overrightarrow{g_2}$.
Conclusion :

$$\boxed{\forall \overrightarrow{x} \in E, \quad \exists! \overrightarrow{g} \in G, \qquad b(\overrightarrow{x}) = (\mathrm{Id}_E - a)(\overrightarrow{g}).}$$

- *On peut alors définir une application ℓ de E dans E qui, à tout $\overrightarrow{x} \in E$, associe l'unique vecteur $\overrightarrow{g} \in G$ tel que $b(\overrightarrow{x}) = (\mathrm{Id}_E - a)(\overrightarrow{g})$. Démontrer que ℓ est un endomorphisme de E tel que $(\mathrm{Id}_E - a) \circ \ell = b$.*

  Soient $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2} \in E$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Par définition de ℓ, on a $b(\overrightarrow{x_1}) = (\mathrm{Id}_E - a)\big(\ell(\overrightarrow{x_1})\big)$ et $b(\overrightarrow{x_2}) = (\mathrm{Id}_E - a)\big(\ell(\overrightarrow{x_2})\big)$. Alors

$$\begin{aligned} b(\lambda_1 \overrightarrow{x_1} + \lambda_2 \overrightarrow{x_2}) &= \lambda_1 b(\overrightarrow{x_1}) + \lambda_2 b(\overrightarrow{x_2}) \\ &= \lambda_1 (\mathrm{Id}_E - a)\big(\ell(\overrightarrow{x_1})\big) + \lambda_2 (\mathrm{Id}_E - a)\big(\ell(\overrightarrow{x_2})\big) \\ &= (\mathrm{Id}_E - a)\big(\lambda_1 \ell(\overrightarrow{x_1}) + \lambda_2 \ell(\overrightarrow{x_2})\big), \end{aligned}$$

  ce qui nous dit, d'après la définition de ℓ et le fait que $\lambda_1 \ell(\overrightarrow{x_1}) + \lambda_2 \ell(\overrightarrow{x_2}) \in G$, que

$$\ell(\lambda_1 \overrightarrow{x_1} + \lambda_2 \overrightarrow{x_2}) = \lambda_1 \ell(\overrightarrow{x_1}) + \lambda_2 \ell(\overrightarrow{x_2}).$$

  Donc

$$\boxed{\ell \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

  Par définition de ℓ, on a $\forall \overrightarrow{x} \in E,\ b(\overrightarrow{x}) = (\mathrm{Id}_E - a)\big(\ell(\overrightarrow{x})\big)$, c'est-à-dire

$$\boxed{b = (\mathrm{Id}_E - a) \circ \ell.}$$

- *En déduire l'existence d'une matrice $L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que l'on ait $L = AL + B$.*

  Notons L la matrice de l'endomorphisme ℓ (défini au point précédent) dans la base $\mathcal{B}$. La relation $b = (\mathrm{Id}_E - a) \circ \ell$ se traduit alors matriciellement par l'égalité $B = (I_3 - A)L$, c'est-à-dire $B = L - AL$ ou encore $L = AL + B$. En conclusion,

$$\boxed{\text{il existe } L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ telle que } L = AL + B.}$$

iii. *Énoncer alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice $L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$.*

En associant les résultats des deux questions précédentes, nous obtenons qu'

$$\boxed{\text{il existe } L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ telle que } L = AL + B \text{ si, et seulement si, } \mathrm{Im}(b) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a).}$$

b) *Dans cette question, on suppose l'existence de $L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$.*

i. *Considérons alors la suite matricielle $(Y_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = X_n - L$. Exprimer, pour tout entier naturel n, Y_{n+1} en fonction de A et Y_n. En déduire, pour tout entier naturel n, Y_n en fonction de A, n et Y_0.*

En soustrayant les relations $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n + B$ et $L = AL + B$, on obtient $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} - L = A(X_n - L)$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad Y_{n+1} = AY_n.}$$

La suite $(Y_n)_{n \geqslant 0}$ est alors une suite matricielle géométrique, ce qui permet de conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathcal{P}(n) : \qquad Y_n = A^n Y_0.$$

Démontrons ce prédicat par récurrence.

Initialisation : On a $A^0 Y_0 = I_3 Y_0 = Y_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$. On a

$$Y_{n+1} = AY_n = A\,A^n Y_0 = A^{n+1} Y_0,$$

où la deuxième égalité découle de $\mathcal{P}(n)$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : D'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad Y_n = A^n Y_0.}$$

ii. *Exprimer, pour tout entier naturel n, X_n en fonction de A, n, L et X_0.*
En combinant les relations $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = X_n - L$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = A^n Y_0$, on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad X_n = A^n (X_0 - L) + L.}$$

4. *Dans cette question, nous choisissons* $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) *Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension 3, $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base de E et $a \in \mathcal{L}(E)$ défini par $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = A$. Démontrer que pour qu'un vecteur $\overrightarrow{v}$, de composantes (x, y, z) dans $\mathcal{B}$, appartienne à $\operatorname{Im}(\operatorname{Id}_E - a)$, il faut et il suffit que $x - y - z = 0$.*

On a

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{v} \in \operatorname{Im}(\operatorname{Id}_E - a) \\
\iff \quad & \exists \overrightarrow{u} \in E, \quad \overrightarrow{v} = (\operatorname{Id}_E - a)(\overrightarrow{u}) \\
\iff \quad & \exists a, b, c \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (I_3 - A) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
\iff \quad & \exists a, b, c \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
\iff \quad & \exists a, b, c \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rrrcll} 6a & \boxed{-3b} & -\ 3c & = & 6x & L_1 \\ 4a & & -\ 4c & = & 6y & L_2 \\ 2a\ - & 3b & +\ \ c & = & 6z & L_3 \end{array} \right. \\
\iff \quad & \exists a, b, c \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rrrcll} 6a & \boxed{-3b} & -\ 3c & = & 6x & L_1 \\ \boxed{4a} & & -\ 4c & = & 6y & L_2 \\ -4a & & +\ 4c & = & -6x + 6z & L_3 - L_1 \longrightarrow L_3 \end{array} \right. \\
\iff \quad & \exists a, b, c \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rrrcll} 6a & \boxed{-3b} & -\ 3c & = & 6x & L_1 \\ \boxed{4a} & & -\ 4c & = & 6y & L_2 \\ & & 0 & = & -6x + 6y + 6z & L_3 + L_2 \longrightarrow L_3 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Or un système admet au moins une solution si, et seulement si, toutes ses équations auxiliaires sont satisfaites, donc

$$\overrightarrow{v} \in \operatorname{Im}(\operatorname{Id}_E - a) \iff -6x + 6y + 6z = 0,$$

ce qui signifie que

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{un vecteur } \overrightarrow{v}\text{, de composantes } (x, y, z) \text{ dans } \mathcal{B}\text{, appartient} \\ \text{à } \operatorname{Im}(\operatorname{Id}_E - a) \text{ si, et seulement si, on a } x - y - z = 0. \end{array}}$$

Remarque : Cela signifie que le sous-espace $\operatorname{Im}(\operatorname{Id}_E - a)$ est le plan de E d'équation cartésienne $x - y - z = 0$.

b) *Justifier l'existence d'une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$.*

Soit b l'endomorphisme de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(b) = B$. Pour justifier l'existence de la matrice L, la question 3. a) γ] nous dit qu'il suffit de démontrer que $\mathrm{Im}\, b \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a)$. Comme $\big(b(\overrightarrow{e_1}), b(\overrightarrow{e_2}), b(\overrightarrow{e_3})\big)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, b$, il suffit donc de vérifier que les vecteurs $b(\overrightarrow{e_1})$, $b(\overrightarrow{e_2})$ et $b(\overrightarrow{e_3})$ appartiennent à $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a)$. Or les colonnes de la matrice B sont les composantes de $b(\overrightarrow{e_1})$, $b(\overrightarrow{e_2})$ et $b(\overrightarrow{e_3})$ dans la base $\mathcal{B}$, donc il suffit de vérifier que les composantes de ces colonnes satisfont l'équation cartésienne $x - y - z = 0$ de $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a)$. Et il est clair que

$$3 - 1 - 2 = 0, \qquad -1 - 0 - (-1) = 0 \qquad \text{et} \qquad -2 - (-1) - (-1) = 0,$$

donc $\mathrm{Im}\, b \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a)$.
En conclusion, il est licite d'utiliser le résultat de la question 3. a) γ] pour affirmer qu'

$$\boxed{\text{il existe } L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ telle que } L = AL + B.}$$

c) *Déterminer une matrice L' appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L' = DL' + P^{-1}BP$. On choisira cette matrice de manière à ce que les trois éléments de sa première ligne soient nuls. À partir de cette matrice L', déterminer une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$.*

On a

$$\begin{array}{ccc}
 & \overbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}}^{=B} & \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{=P} \\
\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=P^{-1}} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=P^{-1}B} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=P^{-1}BP}
\end{array}$$

Si l'on pose

$$L' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

on a

$$(I_3 - D)L' = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3d & 3e & 3f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix}.$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned}
& L' = DL' + P^{-1}BP \\
\iff \quad & (I_3 - D)L' = P^{-1}BP \\
\iff \quad & \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3d & 3e & 3f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\iff \quad & d = g = h = 0, \quad e = 2, \quad f = -2 \quad \text{et} \quad i = \frac{3}{2}\cdot
\end{aligned}$$

On constate qu'il n'existe aucune condition sur a, b et c pour avoir $L' = DL' + P^{-1}BP$, ce qui signifie que l'on peut les choisir librement dans $\mathbb{R}$. Pour faire simple, on prend $a = b = c = 0$. Avec ce choix, on obtient

$$\boxed{L' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

Multiplions la relation $L' = DL' + P^{-1}BP$ par P à gauche et par P^{-1} à droite, ce qui donne

$$PL'P^{-1} = PDL'P^{-1} + B.$$

Or $AP = PD$ d'après la formule de diagonalisation de la question 1. c), donc

$$PL'P^{-1} = APL'P^{-1} + B,$$

ce qui montre que l'on peut prendre

$$L = PL'P^{-1}.$$

Or

$$\begin{array}{ccc} & \overbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}^{= L'} & \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{= P^{-1}} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{= P} & \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}}_{= PL'} & \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 12 & -4 & -8 \\ 3 & 0 & -3 \\ 9 & -4 & -5 \end{pmatrix}}_{= PL'P^{-1}} \end{array}$$

donc

$$\boxed{\text{on peut prendre } L = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 12 & -4 & -8 \\ 3 & 0 & -3 \\ 9 & -4 & -5 \end{pmatrix}.}$$

d) *Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'expression des coefficients de la matrice X_n et démontrer que chacun des coefficients a une limite lorsque n tend vers $+\infty$ (que l'on exprimera en fonction des coefficients de la matrice X_0).*

Le résultat de la question 3. b) nous dit que

$$X_n = A^n(X_0 - L) + L.$$

Or, d'après la valeur de L déterminée à la question précédente, on a

$$X_0 - L = \begin{pmatrix} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \\ w & w' & w'' \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 12 & -4 & -8 \\ 3 & 0 & -3 \\ 9 & -4 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2u - 12 & 2u' + 4 & 2u'' + 8 \\ 2v - 3 & 2v' & 2v'' + 3 \\ 2w - 9 & 2w' + 4 & 2w'' + 5 \end{pmatrix}$$

ce qui donne, d'après le résultat de la question 2. c),

$$\begin{aligned}
& A^n(X_0-L)\\
= & \ \frac{1}{6^n}\begin{pmatrix} -6^n+2\times 3^n & 6^n-3^n & 6^n-3^n\\ -6^n+2^n & 6^n & 6^n-2^n\\ -6^n+2\times 3^n-2^n & 6^n-3^n & 6^n-3^n+2^n \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2u-12 & 2u'+4 & 2u''+8\\ 2v-3 & 2v' & 2v''+3\\ 2w-9 & 2w'+4 & 2w''+5 \end{pmatrix}\\
= & \ \text{Moults calculs}\\
= & \ \frac{1}{6^n}\begin{pmatrix} s6^n-(t+6)3^n & s'6^n-(t'-2)3^n & s''6^n-(t''-4)3^n\\ s6^n-(d+3/2)\,2^n & s'6^n-d'2^n & s''6^n-(d''-3/2)2^n\\ s6^n-(t+6)3^n+(d+3/2)\,2^n & s'6^n-(t'-2)3^n+d'2^n & s''6^n-(t''-4)3^n+(d''-3/2)2^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\boxed{\begin{cases} s=-u+v+w\\ t=-2u+v+w\\ d=-u+w \end{cases}\qquad \begin{cases} s'=-u'+v'+w'\\ t'=-2u'+v'+w'\\ d'=-u'+w' \end{cases}\qquad \begin{cases} s''=-u''+v''+w''\\ t''=-2u''+v''+w''\\ d''=-u''+w'' \end{cases}}$$

En rajoutant L, on obtient finalement

$$\boxed{X_n=\begin{pmatrix} s+6-\dfrac{t+6}{2^n} & s'-2-\dfrac{t'-2}{2^n} & s''-4-\dfrac{t''-4}{2^n}\\ s+\dfrac{3}{2}-\dfrac{2d+3}{2\times 3^n} & s'-\dfrac{d'}{3^n} & s''-\dfrac{3}{2}-\dfrac{2d''-3}{2\times 3^n}\\ s+\dfrac{9}{2}-\dfrac{t+6}{2^n}+\dfrac{2d+3}{2\times 3^n} & s'-2-\dfrac{t'-2}{2^n}+\dfrac{d'}{3^n} & s''-\dfrac{5}{2}-\dfrac{t''-4}{2^n}+\dfrac{2d''-3}{2\times 3^n} \end{pmatrix}}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, il vient

$$\lim X_n=\begin{pmatrix} s+6 & s'-2 & s''-4\\ s+\dfrac{3}{2} & s' & s''-\dfrac{3}{2}\\ s+\dfrac{9}{2} & s'-2 & s''-\dfrac{5}{2} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\lim X_n=\begin{pmatrix} -u+v+w+6 & -u'+v'+w'-2 & -u''+v''+w''-4\\ -u+v+w+\dfrac{3}{2} & -u'+v'+w' & -u''+v''+w''-\dfrac{3}{2}\\ -u+v+w+\dfrac{9}{2} & -u'+v'+w'-2 & -u''+v''+w''-\dfrac{5}{2} \end{pmatrix}}.$$

Remarque : Pour cette dernière question, il est préférable de passer à la limite dans la relation $\forall n\in\mathbb{N},\ X_n=A^n(X_0-L)+L$ *avant de faire les calculs. On trouve alors que*

$$\lim X_n=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}(X_0-L)+L,$$

ce qui redonne le résultat encadré ci-dessus de façon nettement plus efficace.

Problème 2
Étude d'une équation fonctionnelle

Soit a un nombre réel appartenant à $[-1;1]$ et φ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. L'objet de ce problème est de déterminer les fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{ax} f(t)\,\mathrm{d}t + \varphi(x). \qquad (E_{a,\varphi}).$$

1. *Pour cette question, nous prenons a égal à 1 et φ désigne la fonction exponentielle.*
   a) *On suppose l'existence d'une application f, continue sur $\mathbb{R}$, vérifiant $(E_{1,\exp})$.*
      i. *Calculer $f(0)$.*

En choisissant $x = 0$ dans $(E_{1,\exp})$, on a

$$f(0) = \int_0^0 f(t)\mathrm{d}t + \mathrm{e}^0 = 0 + 1,$$

donc

$$\boxed{f(0) = 1.}$$

ii. *Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ en fonction de x, f et e^x.*

La relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x \qquad (E_{1,\exp})$$

nous dit que la fonction f est la somme de $x \longmapsto \mathrm{e}^x$, qui est bien sûr de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et de l'application $x \longmapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive (qui s'annule en 0) de la fonction continue f. Les théorèmes généraux sur la dérivabilité nous permettent donc d'affirmer que

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Remarque : A fortiori, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

En dérivant la relation $(E_{1,\exp})$, on obtient

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = f(x) + \mathrm{e}^x.}$$

iii. *En déduire la fonction f.*

La question précédente nous dit que f est solution de l'équation différentielle

$$y' - y = \mathrm{e}^x\,.$$

D'après le cours, les solutions de l'équation homogène $y' - y = 0$ sont toutes les fonctions de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y_h(x) = \lambda\,\mathrm{e}^x \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Selon la méthode de variation de la constante, on recherche une solution particulière y_p de l'équation $y' - y = \mathrm{e}^x$ sous la forme $\forall x \in \mathbb{R},\ y_p(x) = \lambda(x)\,\mathrm{e}^x$ où λ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. En reportant dans l'équation $y' - y = \mathrm{e}^x$, on obtient $\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x)\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$, ce qui donne $\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = 1$. On peut alors prendre $\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda(x) = x$, ce qui nous donne la solution particulière suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y_p(x) = x\,\mathrm{e}^x\,.$$

Il s'ensuit que les solutions de l'équation $y' - y = \mathrm{e}^x$ sont toutes les fonctions de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y(x) = (\lambda + x)\,\mathrm{e}^x \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

La condition $f(0) = 1$ implique alors que f est la solution de $y' - y = \mathrm{e}^x$ pour laquelle $(\lambda + 0)\,\mathrm{e}^0 = 1$, c'est-à-dire $\lambda = 1$, donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = (1 + x)\,\mathrm{e}^x\,.}$$

b) *Déterminer l'ensemble des fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$, vérifiant $(E_{1,\exp})$.*

La question précédente nous dit que la seule solution possible de $(E_{1,\exp})$, qui est continue sur $\mathbb{R}$, est la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = (1 + x)\,\mathrm{e}^x\,.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^x (1+t)\,\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t + \mathrm{e}^x &= \left[(1+t)\,\mathrm{e}^t\right]_0^x - \int_0^x \mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t + \mathrm{e}^x \\ &= (1+x)\,\mathrm{e}^x - 1 - \left[\mathrm{e}^t\right]_0^x + \mathrm{e}^x \\ &= (1+x)\,\mathrm{e}^x - 1 - \mathrm{e}^x + 1 + \mathrm{e}^x \\ &= (1+x)\,\mathrm{e}^x,\end{aligned}$$

où l'intégration par parties de la première ligne est justifiée par le caractère $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ des applications $t \longmapsto 1 + t$ et $t \longmapsto \mathrm{e}^t$. Donc f est bien solution de $(E_{1,\exp})$.
En conclusion,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{le problème } (E_{1,\exp}) \text{ possède une unique solution continue} \\ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ définie par } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (1+x)\,\mathrm{e}^x.\end{array}}$$

2. *Pour cette question, nous prenons a égal à -1 et φ désigne encore la fonction exponentielle.*

a) *On suppose l'existence d'une application f, continue sur $\mathbb{R}$, vérifiant $(E_{-1,\exp})$.*

i. *Calculer $f(0)$.*

En choisissant $x = 0$ dans $(E_{-1,\exp})$, on obtient à nouveau

$$f(0) = \int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^0 = 0 + 1,$$

donc

$$\boxed{f(0) = 1.}$$

ii. *Justifier l'existence d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et écrire alors, pour tout nombre réel x, $f(x)$ en fonction de x, F et e^x.*

La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, le théorème de Darboux (« Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle ») nous dit que

$$\boxed{f \text{ admet une primitive } F \text{ (de classe } \mathcal{C}^1) \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

La relation $(E_{-1,\exp})$ s'écrit alors

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = F(-x) - F(0) + \mathrm{e}^x.}$$

iii. *Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ en fonction de x, f et e^x. Calculer $f'(0)$.*

Les résultats de la question précédente nous disent que f s'expriment comme somme de composées de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, donc, d'après les théorèmes généraux de dérivabilité,

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

De plus, en dérivant la relation $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = F(-x) - F(0) + \mathrm{e}^x$, on obtient

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = -f(-x) + \mathrm{e}^x.}$$

En choisissant $x = 0$ dans cette formule, il vient $f'(0) = -f(-0) + \mathrm{e}^0 = -1 + 1 = 0$, donc

$$\boxed{f'(0) = 0.}$$

iv. *Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel x, $f''(x)$ en fonction de x, f' et e^x.*

La relation $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -f(-x) + \mathrm{e}^x$ nous dit que f' est la somme de composées de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, donc, d'après les théorèmes généraux de dérivabilité, f' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie que

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

De plus, en dérivant la relation $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -f(-x) + \mathrm{e}^x$, on obtient

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) = f'(-x) + \mathrm{e}^x.}$$

v. *Démontrer alors que, pour tout nombre réel x, on a $f''(x) + f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$.*

La relation $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -f(-x) + \mathrm{e}^x$ (démontrée à la question 2. a) β]) implique que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(-x) = -f(x) + \mathrm{e}^{-x}$. En combinant ce résultat avec celui de la question 2. a) γ], on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) = f'(-x) + \mathrm{e}^x = -f(x) + \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) + f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}.}$$

vi. *En déduire la fonction f.*

La question précédente nous dit que f est solution de l'équation différentielle

$$y'' + y = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\,.$$

L'équation caractérisitque de l'équation homogène $y'' + y = 0$ est $r^2 + 1$ dont les solutions sont $r = \pm i$. Donc, d'après le cours, les solutions de l'équation homogène $y'' + y = 0$ sont toutes les fonctions de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y_h(x) = \mathrm{e}^{0x}(\lambda \cos x + \mu \sin x) \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Selon le principe de superposition, on recherche d'une part une solution particulière $y_{p,1}$ de l'équation $y'' + y = \mathrm{e}^x$ et d'autre part une solution particulière $y_{p,2}$ de l'équation $y'' + y = \mathrm{e}^{-x}$. De façon évidente, on peut prendre $\forall x \in \mathbb{R},\ y_{p,1}(x) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^x$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ y_{p,2}(x) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}$. Cela nous donne la solution particulière suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y_p(x) = y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\cdot$$

Il s'ensuit que les solutions de l'équation $y'' + y = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$ sont toutes les fonctions de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Les conditions $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$ impliquent alors que f est la solution de $y'' + y = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$ pour laquelle $\lambda.1 + \mu.0 + \dfrac{1+1}{2} = 1$ et $-\lambda.0 + \mu.1 + \dfrac{1-1}{2} = 0$, c'est-à-dire $\lambda = 0$ et $\mu = 0$, donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\cdot}$$

b) *Déterminer l'ensemble des fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$, vérifiant $(E_{-1,\exp})$.*

La question précédente nous dit que la seule solution possible de $(E_{-1,\exp})$, qui est continue sur $\mathbb{R}$, est la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\cdot$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{-x} \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x &= \left[\frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}\right]_0^{-x} + \mathrm{e}^x \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x}{2} + \mathrm{e}^x \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x}{2},
\end{aligned}$$

ce qui démontre que la fonction f est bien solution de $(E_{-1,\exp})$.
En conclusion,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{le problème } (E_{-1,\exp}) \text{ possède une unique solution continue} \\ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ définie par } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\cdot\end{array}}$$

3. *Pour cette question, a désigne un nombre réel appartenant à $[-1;1]$ et φ est l'application nulle. On suppose l'existence d'une application f, continue sur $\mathbb{R}$, vérifiant $(E_{a,0})$.*

   a) i. *Justifier l'existence d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et écrire alors, pour tout nombre réel x, $f(x)$ en fonction de x, a et F.*

   La continuité de f associée au théorème de Darboux permet là encore d'affirmer que

   $$\boxed{f \text{ admet une primitive } F \text{ (de classe } \mathcal{C}^1\text{) sur } \mathbb{R}.}$$

   La relation $(E_{a,0})$ s'écrit alors

   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = F(ax) - F(0).}$$

   ii. *Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ en fonction de x, a et $f(x)$.*

   Les résultats de la question précédente nous disent que f s'exprime comme somme de composées de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, donc, d'après les théorèmes généraux de dérivabilité,

   $$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

   De plus, en dérivant la relation $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = F(ax) - F(0)$, on obtient

   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = af(ax).}$$

   iii. *Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout nombre entier naturel n, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x)$.*

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'assertion

   $$\mathcal{P}(n) : \quad \text{« } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x) \text{ ».}$$

   Initialisation : Par hypothèse, f est continue sur $\mathbb{R}$ et il est évident que l'on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(0)}(x) = a^{0(0+1)/2} f(a^0 x)$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (d'après 3. a) β]), la fonction $x \longmapsto a^{n(n+1)/2} f(a^n x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc $f^{(n)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie que f est de classe

$\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$. En dérivant la relation $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x)$, on obtient alors

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n+1)}(x) &= a^{n(n+1)/2}.a^n f'(a^n x) \\ &= a^{n(n+1)/2}.a^n.a.f(a.a^n x) \qquad \text{d'après 3. a) } \beta] \\ &= a^{(n+1)(n+2)/2} f(a^{n+1} x),\end{aligned}$$

ce qui termine de démontrer $\mathcal{P}(n+1)$.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui signifie que

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x).}$$

iv. *En déduire, pour tout nombre entier naturel n, la valeur de $f^{(n)}(0)$.*

En choisissant $x = 0$ dans la relation établie à la question précédente, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f^{(n)}(0) = a^{n(n+1)/2} f(a^n.0) = a^{n(n+1)/2}.f(0).$$

Or, en choisissant $x = 0$ dans $(E_{a,0})$, on a

$$f(0) = \int_0^{a.0} f(t)\,\mathrm{d}t = 0,$$

donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f^{(n)}(0) = 0.}$$

b) *Démontrer que, pour tout réel x et tout entier n, on a $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'assertion

$$\mathcal{Q}(n) : \quad \text{« } \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \text{ ».}$$

Initialisation : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_0^x \frac{(x-t)^0}{0!} f^{(0+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = \big[f(t)\big]_0^x = f(x) - f(0) = f(x),$$

car $f(0) = 0$ d'après la question précédente. Donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.
Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie et démontrons $\mathcal{Q}(n+1)$. On sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme $f^{(n+1)}$ et $t \longmapsto -\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, il est licite d'effectuer une intégration par parties par l'intégrale ci-dessus, ce qui donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}f(x) &= \Big[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\Big]_0^x - \int_0^x \Big(-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\Big) f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{(x-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) + \frac{(x-0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + 0 + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $f^{(n+1)}(0) = 0$ pour annuler un terme. Donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui signifie que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.}$$

c) *Soit A un nombre réel strictement positif.*

i. *Justifier l'existence d'un réel positif ou nul M tel que $\forall x \in [-A;A]\,,\ |f(x)| \leqslant M$ et en déduire que, pour tout entier naturel n, on a $\forall x \in [-A;A]\,,\ |f^{(n)}(x)| \leqslant M$.*

Un théorème du cours (appelé parfois « théorème des bornes ») dit que « toute fonction continue sur un segment est bornée sur ce segment (et y atteint ses bornes) ». Appliqué à f sur le segment $[-A;A]$ (où f est bien continue), ce théorème permet d'affirmer que

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in [-A;A]\,, \qquad |f(x)| \leqslant M.}$$

On sait, d'après 3. a) γ], que l'on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x)$. En prenant les valeurs absolues dans cette égalité et la restreignant au segment $[-A;A]$, on obtient alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [-A;A]\,, \qquad |f^{(n)}(x)| = |a|^{n(n+1)/2} |f(a^n x)|.$$

D'une part, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |a|^{n(n+1)/2} \leqslant 1$$

puisque $a \in [-1;1]$
D'autre part, pour tout $x \in [-A;A]$, on a $a^n x \in [-A;A]$ puisque $a \in [-1;1]$. Donc, d'après le résultat encadré ci-dessus, on peut affirmer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [-A;A]\,, \qquad |f(a^n x)| \leqslant M.$$

La combinaison de tous ces résultats nous dit alors que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [-A;A]\,, \qquad |f^{(n)}(x)| \leqslant M.}$$

ii. *Soit x un nombre réel appartenant à $[-A;A]$. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a $|f(x)| \leqslant MA^{n+1}/(n+1)!$ et en déduire que $f(x) = 0$.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \right| && \text{d'après 3. b)} \\ &\leqslant \left| \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!} |f^{(n+1)}(t)|\,\mathrm{d}t \right| && \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\ &\leqslant \left| \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!} M\,\mathrm{d}t \right| && \text{d'après 3. c) } \alpha\text{] et le fait que } [0 \overset{\leftrightsquigarrow}{;} x] \subset [-A;A] \end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left| \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!}\,\mathrm{d}t \right| = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \Big[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \Big]_0^x = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} & \text{si } x \in [0;A] \\ \displaystyle\int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} \Big]_x^0 = \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} & \text{si } x \in [-A;0] \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\left| \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!}\,\mathrm{d}t \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Il s'ensuit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |f(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} M.$$

Comme $x \in [-A;A]$, on a, par ailleurs, $|x| \leqslant A$, ce qui donne finalement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |f(x)| \leqslant \frac{A^{n+1}}{(n+1)!} M.}$$

Cette inégalité étant satisfaite pour tout $n \in \mathbb{N}$, il est licite de vouloir passer à la limite en faisant tendre n vers $+\infty$. Pour cela, on remarque que le théorème sur les croissances comparées des suites de référence ou encore la convergence vers 0 du terme général de la série exponentielle convergente $\sum_{n \geqslant 0} A^{n+1}/(n+1)!$ nous dit que

$$\frac{A^{n+1}}{(n+1)!} M \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Par conséquent, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $|f(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Comme $|f(x)|$ de dépend pas de n, il s'ensuit que $|f(x)| = 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{f(x) = 0.}$$

d) *Que peut-on en déduire sur la fonction f ?*

Le résultat de la question précédente nous dit que f est la fonction nulle sur $[-A; A]$ pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$ et donc que

$$\boxed{f \text{ est la fonction nulle sur } \mathbb{R}.}$$

Remarque : On a ainsi démontré que la seule solution possible du problème $(E_{a,0})$ est la fonction nulle. Comme il est évident que la fonction nulle est bien solution de $(E_{a,0})$, on peut affirmer que la fonction nulle est la seule solution de l'équation homogène $(E_{a,0})$.

4. *Pour cette question, a désigne un nombre réel appartenant à $[-1; 1]$ et φ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*

a) *Démontrer que, sous réserve d'existence, il existe une unique application f, continue sur $\mathbb{R}$, vérifiant $(E_{a,\varphi})$.*

Considérons f_1 et f_2 deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont continues sur $\mathbb{R}$ et toutes les deux solutions du problème $(E_{a,\varphi})$.
On peut alors écrire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_1(x) = \int_0^{ax} f_1(t)\,\mathrm{d}t + \varphi(x)$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_2(x) = \int_0^{ax} f_2(t)\,\mathrm{d}t + \varphi(x).$$

En soustrayant ces deux égalités et en utilisant la linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (f_1 - f_2)(x) = \int_0^{ax} (f_1 - f_2)(t)\,\mathrm{d}t,$$

ce qui signifie que $f_1 - f_2$ (qui est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que différence de deux telles fonctions) est solution du problème $(E_{a,0})$. Comme la question précédente nous dit que la seule solution de ce problème est la fonction nulle, on en déduit que $f_1 - f_2 = 0$, c'est-à-dire $f_1 = f_2$.
On en conclut que,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{sous réserve d'existence, il existe une unique} \\ \text{application } f\text{, continue sur } \mathbb{R}\text{, vérifiant } (E_{a,\varphi}).\end{array}}$$

b) *Que peut-on en déduire sur l'ensemble des fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$, vérifiant $(E_{a,\varphi})$.*

On en conclut que

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{l'ensemble des fonctions } f\text{, continues sur } \mathbb{R}\text{, solutions} \\ \text{du problème } (E_{a,\varphi}) \text{ est ou bien vide ou bien un singleton.}\end{array}}$$