Correction de l'épreuve A

(durée : 3 h 30)

Problème 1

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels définie par $A = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -4 & 8 & -4 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

1. a) *Déterminer les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?*

On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(A-\lambda I_3) &= \operatorname{rg}\big(12(A-\lambda I_3)\big)\\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 7-12\lambda & -2 & \boxed{1} \\ -4 & 8-12\lambda & -4 \\ 1 & -2 & 7-12\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} {\scriptstyle L_1} \\ {\scriptstyle L_2} \\ {\scriptstyle L_3} \end{matrix}\\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 7-12\lambda & -2 & \boxed{1} \\ 2-4\lambda & -\lambda & 0 \\ -4+14\lambda-12\lambda^2 & 1-2\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} {\scriptstyle L_1} \\ {\scriptstyle L_2 \leftarrow (L_2+4L_1)/12} \\ {\scriptstyle L_3 \leftarrow \big(L_3-(7-12\lambda)L_1\big)/12} \end{matrix}
\end{aligned}$$

On distingue alors deux cas :

<u>Premier cas : $\lambda = 0$</u> On a

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 7 & -2 & \boxed{1} \\ \boxed{2} & 0 & 0 \\ -4 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} = 3$$

<u>Second cas : $\lambda \neq 0$</u> On peut continuer la méthode du pivot en choisissant $-\lambda$ comme pivot, ce qui donne

$$\operatorname{rg}(A-\lambda I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 7-12\lambda & -2 & \boxed{1} \\ 2-4\lambda & \boxed{-\lambda} & 0 \\ \ast & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} {\scriptstyle L_1} \\ {\scriptstyle L_2} \\ {\scriptstyle L_3 \leftarrow \big(-\lambda L_3-(1-2\lambda)L_2\big)/2} \end{matrix}$$

où

$$\ast = 6\lambda^3 - 11\lambda^2 + 6\lambda - 1 = 6(\lambda-1)\Big(\lambda-\frac{1}{2}\Big)\Big(\lambda-\frac{1}{3}\Big).$$

Donc

$$\operatorname{rg}(A-\lambda I_3) = \begin{cases} 2 & \text{si } \lambda \in \{1; 1/2; 1/3\}, \\ 3 & \text{sinon.} \end{cases}$$

<u>Bilan :</u> Comme $\lambda \in \operatorname{Sp}(A) \iff \operatorname{rg}(A-\lambda I_3) < 3$, on en déduit que

$$\boxed{\operatorname{Sp}(A) = \Big\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}\Big\}.}$$

La matrice carrée A étant d'ordre 3 et possédant 3 valeurs propres distinctes, on sait, d'après le cours, que les 3 sous-espaces propres associés sont de dimension 1 et que

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$$

b) *Pour chaque valeur propre de A, déterminer une base du sous-espace propre associé. Les vecteurs seront choisis de troisième composante égale à 1.*

Déterminons $E_1(A) = \mathrm{Ker}(A - I_3)$. D'après la réduite de gauß déterminée à la question précédente, on a, pour $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$(A - I_3)X = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcrcrl} -5x & - & 2y & + & \boxed{z} & = 0 \\ -2x & & \boxed{-\,y} & & & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} x = & \lambda \\ y = & -2\lambda \\ z = & \lambda \end{array}\right. \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

donc

$$\boxed{E_1(A) = \mathrm{Vect}\big((1, -2, 1)\big).}$$

Déterminons $E_{1/2}(A) = \mathrm{Ker}\big(A - (1/2)I_3\big)$. D'après la réduite de gauß déterminée à la question précédente, on a, pour $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$\Big(A - \frac{1}{2}I_3\Big)X = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcrcrl} x & - & 2y & + & \boxed{z} & = 0 \\ & & \boxed{-\dfrac{1}{2}y} & & & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} x = & \lambda \\ y = & 0 \\ z = & -\lambda \end{array}\right. \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

donc

$$\boxed{E_{1/2}(A) = \mathrm{Vect}\big((-1, 0, 1)\big).}$$

Déterminons $E_1(A) = \mathrm{Ker}\big(A - (1/3)I_3\big)$. D'après la réduite de gauß déterminée à la question précédente, on a, pour $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$\Big(A - \frac{1}{3}I_3\Big)X = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcrcrl} 3x & - & 2y & + & \boxed{z} & = 0 \\ \dfrac{2}{3}x & & \boxed{-\dfrac{1}{3}y} & & & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} x = & \lambda \\ y = & 2\lambda \\ z = & \lambda \end{array}\right. \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

donc

$$\boxed{E_{1/3}(A) = \mathrm{Vect}\big((1, 2, 1)\big).}$$

c) *En déduire une matrice R réelle et inversible telle que $R^{-1}AR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.*

On sait, d'après le cours que la matrice A se diagonalise sous la forme

$$A = R \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix} R^{-1}$$

où R désigne la matrice de passage de la base canonique vers la base de vecteurs propres, c'est-à-dire la matrice obtenue en juxtaposant (en colonne) les vecteurs des bases des sous-espaces propres, c'est-à-dire

$$\boxed{R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

d) *Calculer R^{-1} (le détail des calculs figurera sur la copie).*

Soit X le vecteur colonne de coordonnées x, y, z et Y celui de coordonnées a, b, c. Alors

$$RX = Y \iff \begin{cases} x - y + z = a & L_1 \\ -2x + 2z = b & L_2 \\ x + \boxed{y} + z = c & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{2x} + 2z = a + c & L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ -2x + 2z = b & L_2 \\ x + \boxed{y} + z = c & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{2x} + 2z = a + c & L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ \boxed{4z} = a + b + c & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ x + \boxed{y} + z = c & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{4}a - \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c \\ y = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c \\ z = \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c \end{cases}$$

$$\iff X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} Y$$

donc, d'après le cours,

$$\boxed{R^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

2. *Rappelons que $\mathbb{R}_2[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.*

a) *Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}[X], +, .)$. Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et en déduire sa dimension.*

Le polynôme nul est de degré $-\infty$ donc appartient à $\mathbb{R}_2[X]$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors, d'après les règles sur les degrés, on a

$$\deg(\lambda P + \mu Q) \leqslant \max\{\deg(\lambda P); \deg(\mu Q)\} \leqslant \max\{\deg(P); \deg(Q)\} \leqslant 2,$$

donc $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{R}_2[X]$. On a ainsi prouvé que

$$\boxed{\mathbb{R}_2[X] \text{ est un sous-espace vectoriel de } (\mathbb{R}[X], +, .).}$$

Par ailleurs, on sait, d'après la définition des polynômes, que tout polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ s'écrit, de manière unique, sous la forme $aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Cela signifie que

$$\boxed{\mathscr{B} = (1, X, X^2) \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X]}$$

et donc que

$$\boxed{\dim \mathbb{R}_2[X] = 3.}$$

b) *À tout élément P de $\mathbb{R}_2[X]$, nous associons la fonction P^* définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ P^*(x) = \frac{1}{x}\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t$ et $P^*(0) = P(0)$. Démontrer que P^* est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.*

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ de sorte que $P(X) = aX^2 + bX + c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$P^*(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (at^2 + bt + c)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\Big[a\frac{t^3}{3} + b\frac{t^2}{2} + ct\Big]_0^x = \frac{a}{3}x^2 + \frac{b}{2}x + c$$

et

$$P^*(0) = P(0) = c.$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P^*(x) = \frac{a}{3}x^2 + \frac{b}{2}x + c,$$

ce qui prouve bien que

$$\boxed{P^* \text{ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.}}$$

c) *Nous définissons alors l'application $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par $\varphi(P) = P^*$. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.*

Le résultat de la question précédente signifie que $\varphi(\mathbb{R}_2[X]) \subset \mathbb{R}_2[X]$. Reste donc à démontrer la linéarité de φ. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda P + \mu Q)(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x \big(\lambda P(t) + \mu Q(t)\big)\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda\frac{1}{x}\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t + \mu\frac{1}{x}\int_0^x Q(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda\varphi(P)(x) + \mu\varphi(Q)(x)
\end{aligned}$$

et

$$\varphi(\lambda P + \mu Q)(0) = (\lambda P + \mu Q)(0) = \lambda P(0) + \mu Q(0) = \lambda\varphi(P)(0) + \mu\varphi(Q)(0),$$

d'où

$$\varphi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q).$$

En conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X].}$$

d) *Calculer la matrice M de φ dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ (les polynômes de $\mathscr{B}$ seront rangés par ordre de degré croissant).*

On a vu que, si $P(X) = aX^2 + bX + c$, alors $\varphi(P)(X) = \frac{a}{3}X^2 + \frac{b}{2}X + c$. Il s'ensuit que

$$\varphi(1) = 1, \qquad \varphi(X) = \frac{1}{2}X \qquad \text{et} \qquad \varphi(X^2) = \frac{1}{3}X^2$$

et donc que

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}.$$

e) *Notons* $f_0 : x \longmapsto (x-1)^2$, $f_1 : x \longmapsto (x-1)(x+1)$ *et* $f_2 : x \longmapsto (x+1)^2$. *Montrer que* $\mathscr{F} = (f_0, f_1, f_2)$ *est une base de* $\mathbb{R}_2[X]$. *Soit* P *appartenant à* $\mathbb{R}_2[X]$. *En notant* (c_0, c_1, c_2) *la famille des composantes de* P *dans la base* $\mathscr{F}$, *exprimer* c_0, c_1 *et* c_2 *en fonction de* $P(1)$, $P(-1)$ *et* $P'(1)$.

La matrice de la famille (f_0, f_1, f_2) dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4R^{-1}.$$

Comme cette matrice est inversible (puisque c'est l'inverse de $(1/4)R$), on en déduit bien que

$$\boxed{\mathscr{F} = (f_0, f_1, f_2) \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$$

Comme (c_0, c_1, c_2) est la famille des composantes de P dans la base $\mathscr{F}$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = c_0(x-1)^2 + c_1(x-1)(x+1) + c_2(x+1)^2.$$

En évaluant cette relation en 1 et -1, on obtient

$$P(1) = 4c_2 \qquad \text{et} \qquad P(-1) = 4c_0.$$

Par ailleurs, en dérivant, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P'(x) = 2c_0(x-1) + c_1(x+1) + c_1(x-1) + 2c_2(x+1),$$

ce qui donne, lorsqu'on fait $x = 1$,

$$P'(1) = 2c_1 + 4c_2.$$

On en déduit que

$$\boxed{c_0 = \frac{P(-1)}{4}, \qquad c_1 = \frac{P'(1) - P(1)}{2} \qquad \text{et} \qquad c_2 = \frac{P(1)}{4}.}$$

f) *Calculer* $\varphi(f_0)$, $\varphi(f_1)$, $\varphi(f_2)$ *dans la base* $\mathscr{F}$ *puis écrire la matrice* M' *de* φ *dans la base* $\mathscr{F}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\varphi(f_0)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (t-1)^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left[\frac{(t-1)^3}{3}\right]_0^x = \frac{(x-1)^3+1}{3x} = \frac{1}{3}x^2 - x + 1,$$

donc, lorsque $P = f_0$, on obtient

$$c_0 = \frac{\varphi(f_0)(-1)}{4} = \frac{7}{12}, \qquad c_1 = \frac{\varphi(f_0)'(1) - \varphi(f_0)(1)}{2} = -\frac{1}{3}, \qquad c_2 = \frac{\varphi(f_0)(1)}{4} = \frac{1}{12}$$

ce qui donne

$$\boxed{\varphi(f_0) = \frac{7}{3}f_0 - \frac{1}{3}f_1 + \frac{1}{3}f_2.}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\varphi(f_1)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (t^2-1)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left[\frac{t^3}{3} - t\right]_0^x = \frac{1}{3}x^2 - 1,$$

donc, lorsque $P = f_0$, on obtient

$$c_0 = \frac{\varphi(f_1)(-1)}{4} = -\frac{1}{6}, \qquad c_1 = \frac{\varphi(f_1)'(1) - \varphi(f_1)(1)}{2} = \frac{2}{3}, \qquad c_2 = \frac{\varphi(f_1)(1)}{4} = -\frac{1}{6}$$

ce qui donne

$$\boxed{\varphi(f_1) = -\frac{1}{6}f_0 + \frac{2}{3}f_1 - \frac{1}{6}f_2.}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\varphi(f_2)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (t+1)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left[\frac{(t+1)^3}{3}\right]_0^x = \frac{(x+1)^3-1}{3x} = \frac{1}{3}x^2 + x + 1,$$

donc, lorsque $P = f_0$, on obtient

$$c_0 = \frac{\varphi(f_2)(-1)}{4} = \frac{1}{12}, \qquad c_1 = \frac{\varphi(f_2)'(1) - \varphi(f_2)(1)}{2} = -\frac{1}{3}, \qquad c_2 = \frac{\varphi(f_2)(1)}{4} = \frac{7}{12}$$

ce qui donne

$$\boxed{\varphi(f_0) = \frac{1}{12}f_0 - \frac{1}{3}f_1 + \frac{7}{12}f_2.}$$

On en déduit que

$$M' = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -4 & 8 & -4 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{M' = A.}$$

g) *Écrire la relation matricielle liant M et M' et retrouver les résultats de la question 1. c).*

La relation de changement de bases nous dit que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = P_{\mathscr{B}\mathscr{F}}\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(\varphi)\,P_{\mathscr{F}\mathscr{B}}$$

où $P_{\mathscr{F}\mathscr{B}}$ est la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{F}$ vers la base $\mathscr{B}$ et $P_{\mathscr{B}\mathscr{F}} = {P_{\mathscr{F}\mathscr{B}}}^{-1}$ est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{F}$.
On sait que M représente φ dans la base $\mathscr{B}$ et $M' = A$ représente φ dans la base $\mathscr{F}$.
Comme $f_0(X) = (X-1)^2 = X^2 - 2X + 1$, $f_1(X) = (X-1)(X+1) = X^2 - 1$ et $f_2(X) = (X+1)^2 = X^2 + 2X + 1$, on a

$$P_{\mathscr{B}\mathscr{F}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = R\cdot$$

On obtient donc

$$\boxed{M' = RMR^{-1}}$$

ce qui permet de retrouver la relation

$$\boxed{A = R\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}R^{-1} \qquad \text{où} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}\cdot$$

3. *Considérons trois suites réelles u, v et w définies sur $\mathbb{N}$ qui vérifient les relations :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{7u_n - 2v_n + w_n}{12}, \\ v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 2v_n - w_n}{12}, \\ w_{n+1} = \dfrac{u_n - 2v_n + 7w_n}{12}. \end{cases}$$

a) *Écrire un algorithme qui calcule, pour un entier naturel n donné, les valeurs de u_n, v_n et w_n. Écrire ensuite un algorithme qui, pour un entier naturel n donné, calcule $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.*

En SCILAB :

```
//   Calcul des n-èmes termes et de la somme
u = 1; v = 1; w = 1;    //   Initialisation (valeurs modifiables)
s = 0;    //   Initialisation de la somme
for i = 1 : n do
  U = (7 * u - 2 * v + w)/12;
  V = (-u + 2 * v - w)/12;
  W = (u - 2 * v + 7 * w)/12;
  u = U; v = V; w = W;
  s = s + u;
end
u, v, w, s,
```

b) *Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $\mathscr{P}(n)$: $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.*

Procédons par récurrence.

Initialisation : $\mathscr{P}(0)$ est vraie car $A^0 = I_3$.

Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathscr{P}(n+1)$. On a

$$A^{n+1}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = AA^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 7u_n - 2v_n + w_n \\ -u_n + 2v_n - w_n \\ u_n - 2v_n + 7w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix},$$

où la deuxième égalité découle de l'hypothèse de récurrence et la dernière de la définition des suites. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}.}$$

c) *Déterminer, pour tout entier naturel n, une expression de A^n puis celles de u_n, v_n et w_n en fonction de n et de u_0, v_0 et w_0.*

Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous avons vu que $A = RMR^{-1}$, donc

$$\begin{aligned} A^n &= \underbrace{(RMR^{-1})(RMR^{-1})\cdots(RMR^{-1})}_{n \text{ facteurs } RM'R^{-1}} \\ &= RM\underbrace{R^{-1}R}_{=I_3}M\underbrace{R^{-1}R}_{=I_3}MR^{-1}\cdots RM\underbrace{R^{-1}R}_{=I_3}MR^{-1} \\ &= RM^nR^{-1}. \end{aligned}$$

Or M étant diagonale, on démontre, à l'aide d'une récurrence immédiate, que

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{3^n} \end{pmatrix}$$

donc, en effectuant le calcul RM^nR^{-1}, on obtient

$$A^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{3^n} & \dfrac{1}{3^n}-1 & 1-\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{3^n} \\ \dfrac{2}{3^n}-2 & \dfrac{2}{3^n}+2 & \dfrac{2}{3^n}-2 \\ 1-\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{3^n} & \dfrac{1}{3^n}-1 & 1+\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{3^n} \end{pmatrix}.$$

Reste alors à multiplier cette matrice par le vecteur colonne ${}^t\begin{pmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \end{pmatrix}$, pour obtenir les expresions de u_n, v_n et w_n, ce qui donne

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left\{\begin{array}{l} u_n = \left(1+\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{3^n}\right)u_0 + \left(\dfrac{1}{3^n}-1\right)v_0 + \left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{3^n}\right)w_0 \\ v_n = \left(\dfrac{2}{3^n}-2\right)u_0 + \left(\dfrac{2}{3^n}+2\right)v_0 + \left(\dfrac{2}{3^n}-2\right)w_0 \\ w_n = \left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{3^n}\right)u_0 + \left(\dfrac{1}{3^n}-1\right)v_0 + \left(1+\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{3^n}\right)w_0 \end{array}\right.}$$

d) *Les suites u, v et w sont-elles convergentes ? Si oui, préciser leurs limites respectives.*

Les expressions précédentes nous permettent d'affirmer que

$$\boxed{\lim u_n = u_0 - v_0 + w_0, \qquad \lim v_n = -2(u_0 - v_0 + w_0), \qquad \lim w_n = u_0 - v_0 + w_0.}$$

Problème 2

1. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Nous définissons la fonction g par $g(0) = f(0)$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g(x) = \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$. On considère également l'application a de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ a(x) = \{f(x) + f(-x)\}/2$.*

   a) *Pour tout réel non nul x, justifier l'existence de l'intégrale définissant g.*

   La quantité $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,dt$ est l'intégrale d'une fonction continue, donc elle est définie. Ainsi,

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt \text{ est définie.}}$$

   b) *Justifier l'existence de primitives de f sur $\mathbb{R}$. Exprimer, pour tout réel x non nul, $g(x)$ à l'aide de l'une de ces primitives F.*

   La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, le théorème de Darboux assure que

$$\boxed{f \text{ admet des primitives sur } \mathbb{R}.}$$

   Si l'on note F l'une de ces primitives, on a clairement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad g(x) = \frac{F(x) - F(-x)}{2x}\cdot}$$

   c) *Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.*

   L'expression de g sur $\mathbb{R}^*$ donnée à la question précédente permet de justifier la continuité de g sur $\mathbb{R}^*$ à l'aide des théorèmes généraux de continuité (somme et quotient de fonctions continues).
   Par ailleurs, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad g(x) = \frac{1}{2}\Big(\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} - \frac{F(-x) - F(-0)}{x - 0}\Big),$$

   donc g s'écrit comme la moitié de la différence du taux d'accroissement en 0 de la fonction $x \longmapsto F(x)$ et du taux d'accroissement de la fonction $x \longmapsto F(-x)$. Comme F est dérivable sur $\mathbb{R}$ (pardi, c'est une primitive de f), on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = f(0) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{F(-x) - F(-0)}{x - 0} = -f(0),$$

   où la seconde limite découle du fait que la dérivée de $x \longmapsto F(-x)$ est $x \longmapsto -f(-x)$.
   Il s'ensuit que

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \frac{1}{2}\big(f(0) + f(0)\big) = f(0) = g(0),$$

   ce qui justifie la continuité de g en 0.
   En conclusion,

$$\boxed{g \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

   d) *Montrer que g est paire sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire de plus sur g si f est impaire sur $\mathbb{R}$? Le démontrer.*

   La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$, qui est symétrique par rapport à 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$g(-x) = \frac{1}{2(-x)}\int_{x}^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = g(x),$$

   donc

$$\boxed{g \text{ est paire sur } \mathbb{R}.}$$

Nous allons démontrer que, si f est impaire sur $\mathbb{R}$, alors g est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. Tout d'abord, si f est impaire sur $\mathbb{R}$, on a $f(0) = 0$ donc $g(0) = f(0) = 0$. Par ailleurs, toujours sous la même hypothèse, le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale définissant g donne, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$g(x) = \frac{1}{2x}\int_x^{-x} f(-u)\,(-\mathrm{d}u) = \frac{1}{2x}\int_x^{-x}\big(-f(u)\big)\,(-\mathrm{d}u) = -\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u = -g(x),$$

ce qui démontre que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g(x) = 0$. On a donc bien démontré que

$$\boxed{\text{si } f \text{ est impaire sur } \mathbb{R}, \text{ alors } g \text{ est la fonction nulle sur } \mathbb{R}.}$$

e) *Montrer que* $g(0) = a(0)$ *et que, pour tout réel non nul* x, $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$.

On a $a(0) = \{f(0) + f(-0)\}/2 = f(0) = g(0)$. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{x}\int_0^x \frac{f(t)+f(-t)}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2x}\int_0^x f(-t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2x}\int_0^{-x} f(u)\,(-\mathrm{d}u) && \text{en posant } u=-t \text{ dans la seconde intégrale} \\
&= \frac{1}{2x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2x}\int_{-x}^{0} f(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2x}\int_{-x}^x f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= g(x).
\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ a(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}}$$

f) *Montrer maintenant que* g *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *et que* $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ xg'(x) + g(x) = a(x)$.

La fonction a est continue sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes généraux de continuité (somme et composée de fonctions continues). Par suite, a admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Notons A la primitive de a sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Alors, d'après la question précédente, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$g(x) = \frac{A(x)}{x}\cdot$$

On constate donc, à l'aide des théorèmes généraux de dérivabilité (quotient de fonctions dérivables), que

$$\boxed{g \text{ est une fonction dérivable sur } \mathbb{R}^*.}$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$g'(x) = \frac{a(x)}{x} - \frac{A(x)}{x^2}$$

donc

$$xg'(x) + g(x) = a(x) - \frac{A(x)}{x} + \frac{A(x)}{x} = a(x).$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad xg'(x) + g(x) = a(x).}$$

g) *Dans cette question seulement, f est supposée dérivable en 0. Montrer qu'alors a est dérivable en 0. Puis, à l'aide du développement limité à l'ordre 1 en 0 de a, montrer que g est dérivable en 0 et préciser $g'(0)$.*

D'après les théorèmes généraux de dérivabilité (somme et composée de fonctions dérivable en 0), on peut affirmer que

$$\boxed{a \text{ est dérivable en } 0.}$$

De plus, on a

$$a'(0) = \frac{f'(0) - f'(-0)}{2} = 0.$$

Il s'ensuit que

$$a(x) = a(0) + a'(0)x + o_{x\to 0}(x) = f(0) + o_{x\to 0}(x).$$

En primitivant ce développement limité, on obtient

$$\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t = 0 + f(0)x + o_{x\to 0}(x^2),$$

et donc, d'après le résultat de la question e),

$$g(x) = f(0) + o_{x\to 0}(x).$$

On en déduit que

$$\boxed{g \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } g'(0) = 0.}$$

h) *Dans cette question seulement, $f : x \longmapsto |x|$. Pour tout réel x strictement positif puis, pour tout réel x strictement négatif, calculer l'expression de $g(x)$. Montrer alors que g n'est pas dérivable en 0.*

Pour $x > 0$, on a

$$g(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^x |t|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2x}\int_{-x}^0 (-t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2x}\int_0^x t\,\mathrm{d}t = \frac{x}{4} + \frac{x}{4} = \frac{x}{2},$$

donc, comme g est paire sur $\mathbb{R}$, on a

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad g(x) = \frac{|x|}{2}\cdot}$$

On constate que g est dérivable à gauche de 0 avec $g'(0^-) = -1/2$ et que g est dérivable à droite de 0 avec $g'(0^+) = 1/2$. Comme $g'(0^-) \neq g'(0^+)$, on en déduit bien que

$$\boxed{g \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$$

2. *Dans cette question, f vérifie $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y \implies |f(x) - f(y)| < |x - y|$.*

a) *Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. Nous pouvons alors associer à f la fonction g définie à la question 1.*

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. L'hypothèse dit que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\},\ |f(x) - f(x_0)| < |x - x_0|$. Or $\lim_{x\to x_0} |x - x_0| = 0$, donc $\lim_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$ d'après le théorème des gendarmes, c'est-à-dire $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, ce qui justifie la continuité de f en x_0. Comme x_0 est quelconque dans $\mathbb{R}$, on en déduit bien que

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

b) *Montrer que, pour tout réel x, on a $g(x) = \int_0^1 a(xu)\,\mathrm{d}u$.*
Si $x = 0$, on a

$$\int_0^1 a(0u)\,\mathrm{d}u = a(0)\int_0^1 \mathrm{d}u = a(0) = f(0) = g(0).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t && \text{d'après 1. e)} \\ &= \frac{1}{x}\int_0^1 a(xu)\,x\mathrm{d}u && \text{en posant } t = xu \\ &= \int_0^1 a(xu)\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

En définitive, on a

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \int_0^1 a(xu)\,\mathrm{d}u.}$$

c) *Montrer que, pour tous réels distincts v et w, $|a(v) - a(w)| < |v - w|$ puis en déduire que, pour tous réels distincts x et y, $|g(x) - g(y)| < |x - y|$.*
Soient u, v deux nombres réels distincts. On a

$$\begin{aligned} |a(v) - a(w)| &= \left|\frac{f(v) + f(-v)}{2} - \frac{f(w) + f(-w)}{2}\right| \\ &= \frac{1}{2}|f(v) - f(w) + f(-w) - f(-v)| \\ &\leqslant \frac{1}{2}|f(v) - f(w)| + \frac{1}{2}|f(-w) - f(-v)| && \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\ &< \underbrace{\frac{1}{2}|v - w| + \frac{1}{2}|-w - (-v)|}_{=|v-w|} && \text{par hypothèse,} \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\text{pour tous réels distincts } v \text{ et } w,\ |a(v) - a(w)| < |v - w|.}$$

Soient x, y deux nombres réels distincts. On a, d'après b),

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= \left|\int_0^1 \big(a(xu) - a(yu)\big)\,\mathrm{d}u\right| \\ &\leqslant \int_0^1 |a(xu) - a(yu)|\,\mathrm{d}u && \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\ &< \int_0^1 |xu - yu|\,\mathrm{d}u && \text{car } \forall u > 0,\ |a(xu) - a(yu)| < |xu - yu| \text{ (ce qui se passe en 0 importe peu).} \end{aligned}$$

Or

$$\int_0^1 |xu - yu|\,\mathrm{d}u = |x - y|\int_0^1 u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}|x - y| < |x - y|,$$

donc

$$\boxed{\text{pour tous réels distincts } x \text{ et } y, \text{ on a } |g(x) - g(y)| < |x - y|.}$$

Remarque : En fait, on a démontré un résultat plus fin : pour tous réels distincts x et y, on a $|g(x) - g(y)| < |x - y|/2$.

3. *Soit* $\left(\mathscr{C}^0(\mathbb{R}),+,\boldsymbol{.}\right)$ *l'espace vectoriel des fonctions continues sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs réelles muni des lois usuelles. Nous allons maintenant nous intéresser à la fonction* Φ *qui, à toute fonction* f *appartenant à* $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$*, associe la fonction* g *définie à la question 1.*

   a) *Montrer que* Φ *est un endomorphisme de* $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$*.*

   Nous avons vu que la continuité de f impliquait celle de g (d'après 1. c)), donc Φ est une application de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ vers $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$.
   Soient $f_1, f_2 \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Alors, si l'on note g_1 et g_2 les fonctions associées respectivement à f_1 et f_2 à la question 1, on a

   $$\Phi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(0) = (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)(0) = \lambda_1 g_1(0) + \lambda_2 g_2(0) = \lambda_1 \Phi(f_1)(0) + \lambda_2 \Phi(f_2)(0)$$

   et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

   $$\begin{aligned}
   \Phi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) &= (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)(x) \\
   &= \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(t)\,\mathrm{d}t \\
   &= \lambda_1 \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f_1(t)\,\mathrm{d}t + \lambda_2 \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f_2(t)\,\mathrm{d}t \\
   &= \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) \\
   &= \lambda_1 \Phi(f_1)(x) + \lambda_2 \Phi(f_2)(x).
   \end{aligned}$$

   On a donc démontré que $\Phi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \Phi(f_1) + \lambda_2 \Phi(f_2)$.
   En conclusion,

   $$\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } \mathscr{C}^0(\mathbb{R}).}$$

   b) *Déterminer le noyau de* Φ *(on pourra utiliser la question 1. f))*

   Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ telle que $f \in \operatorname{Ker}\Phi$, c'est-à-dire telle que $\Phi(f) = 0$. Si l'on note g la fonction associée respectivement à f à la question 1, on a donc $g = 0$. En utilisant le résultat de la question 1. f), on constate alors que la fonction a est nulle sur $\mathbb{R}^*$, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(-x) = -f(x)$. Cela signifie donc que f est une fonction impaire sur $\mathbb{R}$. Réciproquement, si f est une fonction impaire sur $\mathbb{R}$, nous avons vu, à la question 1. d), que g est la fonction nulle et donc $f \in \operatorname{Ker}\Phi$. Ainsi,

   $$\boxed{\text{le noyau de } \Phi \text{ est l'ensemble des fonctions impaires sur } \mathbb{R}.}$$

   c) *Nous savons que l'application* sin *est continue et impaire sur* $\mathbb{R}$*. Admet-elle un antécédent par* Φ *dans* $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ *? Que peut-on en déduire sur la fonction* Φ *?*

   Si f désigne un élément de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$, nous avons vu, à la question 1. d), que la fonction g associée est paire sur $\mathbb{R}$. Cela signifie que l'image de Φ est contenue dans l'ensemble des fonctions paires sur $\mathbb{R}$. Comme la fonction sin n'est pas paire sur $\mathbb{R}$ (le fait qu'elle soit impaire, comme l'indique l'énoncé, ne sert à rien car le contraire d'impaire n'est pas paire !), elle ne peut pas admettre d'antécédent par Φ. Donc

   $$\boxed{\text{la fonction } \sin \text{ n'admet pas d'antécédent par } \Phi.}$$

   En particulier,

   $$\boxed{\Phi \text{ n'est pas surjective sur } \mathscr{C}^0(\mathbb{R}).}$$

   d) *Montrer que l'application* $u : x \longmapsto |x-1| + |x+1|$*, continue sur* $\mathbb{R}$ *et paire, n'admet pas d'antécédent par* Φ *dans* $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$*.*

   Si f désigne un élément de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$, nous avons vu, à la question 1. f), que la fonction g associée est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Comme la fonction $u : x \longmapsto |x-1| + |x+1|$ n'est pas dérivable en -1 et 1, elle ne peut pas admettre d'antécédent par Φ. Donc

   $$\boxed{\text{la fonction } u \text{ n'admet pas d'antécédent par } \Phi.}$$