Correction de l'épreuve A

(durée : 3 h 30)

Problème 1

On note $\mathcal{B}$ la base canonique du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^4$ et Id *l'endomorphisme identité de $\mathbb{C}^4$. On note $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, respectivement $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, l'algèbre des matrices carrées d'ordre 4 à coefficients dans $\mathbb{C}$, respectivement dans $\mathbb{R}$. On note J la matrice définie par $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ vaut J. Pour tout quadruplet $A = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{C}^4$, on note M_A la matrice $M_A = \sum_{k=1}^{4} a_k J^{k-1}$ et f_A l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ dont la matrice dans la base B vaut M_A.*

I. Première partie

1. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 1$.*

   Le polynôme $X^4 - 1$ admet au plus 4 racines dans $\mathbb{C}$ (en fait, exactement 4) et l'on constate que 1, i, -1 et $-i$ sont des racines évidentes, donc

   $$\boxed{\text{les solutions de } z^4 = 1 \text{ sont } z_0 = 1,\ z_1 = i,\ z_2 = -1 \text{ et } z_3 = -i.}$$

2. *On note* spec(g) *l'ensemble des valeurs propres de g.*

   a) *Montrer que* $\operatorname{spec}(g) = \{1, i, -1, -i\}$.

   On sait que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de g si, et seulement si, $\operatorname{rang}(J - \lambda I) < 4$. Comme on a clairement $\operatorname{rang} J = 4$, on sait que 0 n'est pas une valeur propre, ce qui permet de supposer que $\lambda \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned}
\operatorname{rang}(J - \lambda I) &= \operatorname{rang} \begin{pmatrix} \boxed{-\lambda} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3) \\ (L_4) \end{matrix} \\
&= \operatorname{rang} \begin{pmatrix} \boxed{-\lambda} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-\lambda} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3) \\ (L_4) \longleftarrow (-\lambda L_4 - L_1) \end{matrix} \\
&= \operatorname{rang} \begin{pmatrix} \boxed{-\lambda} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-\lambda} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-\lambda} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda^3 \end{pmatrix} \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3) \\ (L_4) \longleftarrow (-\lambda L_4 + L_2) \end{matrix} \\
&= \operatorname{rang} \begin{pmatrix} \boxed{-\lambda} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-\lambda} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-\lambda} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4 - 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3) \\ (L_4) \longleftarrow (-\lambda L_4 - L_3) \end{matrix}
\end{aligned}$$

   donc $\operatorname{rang}(A - \lambda I) < 4$ si, et seulement si, $\lambda^4 - 1 = 0$, ce qui signifie, en vertu du résultat de la question précédente, que

   $$\boxed{\operatorname{spec}(g) = \{1, i, -1, -i\}.}$$

b) *Déterminer une base de chaque sous-espace propre associé, formée de vecteur(s) dont la première coordonnée vaut* 1.

Nous devons rechercher, pour $\lambda \in \{1, i, -1, -i\}$, un vecteur $X = {}^t(x\ y\ z\ t)$ tel que $(J - \lambda I)X = 0$. Or d'après les calculs de la question précédente, on a

$$(J-\lambda I)X = 0 \iff \left\{\begin{array}{rrrl} -\lambda x & + \ y & & = 0 \\ & -\ \lambda y & + \ \ z & = 0 \\ & & -\ \lambda z & + t = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} x = & a \\ y = & \lambda a \\ z = & \lambda^2 a \\ t = & \lambda^3 a \end{array}\right. \quad (a \in \mathbb{R}),$$

ce qui prouve que le sous-espace propre associé à la valeur propre λ est la droite vectorielle dirigée par $(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3)$. Par suite,

$$\boxed{\text{les sous-espaces propres associés aux valeurs propres } 1,\ i,\ -1,\ -i \text{ sont respectivement les droites dirigées } (1,1,1,1),\ (1,i,-1,-i),\ (1,-1,1,-1) \text{ et } (1,-i,-1,i).}$$

c) *g est-il diagonalisable ?*

La somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^4$ sur lequel est défini l'endomorphisme g, donc

$$\boxed{g \text{ est diagonalisable.}}$$

3. *On considère un quadruplet $A = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{C}^4$.*

a) *Calculer les coefficients de M_A.*

On a

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=J} \xrightarrow{\times \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{=J}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=J^2} \xrightarrow{\times \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{=J}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=J^3}$$

donc

$$\begin{aligned} M_A &= \sum_{k=1}^{4} a_k J^{k-1} \\ &= a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{M_A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_4 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_1 \end{pmatrix}.}$$

b) *Montrer que f_A est combinaison linéaire de* Id, *g, $g \circ g$ et $g \circ g \circ g$.*

Dans la base canonique, Id est représentée par J, g est représentée par J, $g \circ g$ est représentée par J^2 et $g \circ g \circ g$ est représentée par J^3, donc

$$\boxed{f_A = a_1 \operatorname{Id} + a_2\, g + a_3\, g \circ g + a_4\, g \circ g \circ g.}$$

c) *Calculer l'image par f_A des vecteurs propres de g déterminés à la question I. 2. b).*

Si $\lambda \in \{1, i, -1, -i\}$, on sait que le vecteur $u_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3)$ dirige le sous-espace propre associé à la valeur propre λ donc $g(u_\lambda) = \lambda u_\lambda$ et par suite, $(g \circ g)(u_\lambda) = \lambda^2 u_\lambda$ et $(g \circ g \circ g)(u_\lambda) = \lambda^3 u_\lambda$. Ainsi, on a

$$f_A(u_\lambda) = (a_1 + a_2\lambda + a_3\lambda^2 + a_4\lambda^3)u_\lambda,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\begin{array}{l} f_A(1,1,1,1) = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(1,1,1,1) \\ f_A(1,i,-1,-i) = (a_1 + ia_2 - a_3 - ia_4)(1,i,-1,-i) \\ f_A(1,-1,1,-1) = (a_1 - a_2 + a_3 - a_4)(1,-1,1,-1) \\ f_A(1,-i,-1,i) = (a_1 - ia_2 - a_3 + ia_4)(1,-i,-1,i). \end{array}}$$

d) *En déduire que l'endomorphisme f_A est diagonalisable et donner une matrice diagonale à laquelle M_A est semblable.*

La question précédente démontre que le vecteur propre de g associés à la valeur propre $\lambda \in \{1, i, -1, -i\}$ est aussi un vecteur propre de f_A associé à la valeur propre $a_1 + a_2\lambda + a_3\lambda^2 + a_4\lambda^3$. Comme ces quatre vecteurs sont linéairement indépendants (puisque ce sont des vecteurs propres de g associés à des valeurs propres distinctes) et comme $\mathbb{C}^4$ est un espace de dimension 4, on en déduit que ces quatre vecteurs forment une base de vecteurs propres de f_A et donc que

$$\boxed{\begin{array}{c} f_A \text{ est diagonalisable et } M_A \text{ semblable à la matrice diagonale} \\ \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 + ia_2 - a_3 - ia_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 - a_2 + a_3 - a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 - ia_2 - a_3 + ia_4 \end{pmatrix}. \end{array}}$$

4. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note $M(z)$ la matrice $M(z) = \begin{pmatrix} z & 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & z \end{pmatrix}$.*

a) *Déterminer les valeurs propres de $M(z)$.*

On constate que $M(z) = M_{(z,1,1,1)}$ donc, d'après la question précédente, $M(z)$ est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} z+3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z-1 \end{pmatrix},$$

ce qui signifie que

$$\boxed{\operatorname{spec} M(z) = \{z-1, z+3\}.}$$

b) *Déterminer l'ensemble des complexes z pour lesquels la matrice $M(z)$ est inversible.*

Une matrice est inversible si, et seulement si, 0 n'est pas une valeur propre de cette matrice. Donc $M(z)$ est inversible si, et seulement si, $z - 1 \neq 0$ et $z + 3 \neq 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{\big(M(z) \text{ est inversible}\big) \iff (z \neq 1 \text{ et } z \neq -3).}$$

c) *Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$. Calculer $[M(1)]^k$ et $[M(z) - M(1)]^k$ puis, en notant que $M(z) = [M(z) - M(1)] + M(1)$, en déduire $[M(z)]^n$ à l'aide de z, n, $M(1)$ et I.*

On a

$$\begin{array}{ccc} & & \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{=M(1)} \\ & \times & \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=M(1)} & = & \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}}_{=M(1)^2} \end{array}$$

d'où $[M(1)]^2 = 4M(1)$ et donc $[M(1)]^k = 4[M(1)]^{k-1} = 4^2[M(1)]^{k-2} = \cdots = 4^{k-1}M(1)$, c'est-à-dire

$$\boxed{[M(1)]^k = 4^{k-1}M(1).}$$

On a $M(z) - M(1) = (z-1)I$, donc

$$\boxed{[M(z) - M(1)]^k = (z-1)^k I.}$$

On a

$$\begin{aligned} [M(z)]^n &= \big([M(z) - M(1)] + M(1)\big)^n \\ &= \big((z-1)I + M(1)\big)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M(1)^k [(z-1)I]^{n-k} && \text{d'après la formule du binôme car } M(1) \text{ et } (z-1)I \text{ commutent} \\ &= (z-1)^n I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} M(1)^k [(z-1)I]^{n-k} \\ &= (z-1)^n I + \Big(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^{k-1}(z-1)^{n-k}\Big) M(1) && \text{d'après ce qui précède} \\ &= (z-1)^n I + \frac{1}{4}\big((4+z-1)^n - (z-1)^n\big) M(1) && \text{d'après la formule du binôme} \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{[M(z)]^n = (z-1)^n I + \frac{(z+3)^n - (z-1)^n}{4} M(1).}$$

5. *Application.*

a) *Écrire un algorithme fournissant le produit de deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Combien d'opérations (additions et multiplications) sont-elles réalisées ?*

En SCILAB :

```
function C = matprod(A, B)
  for i = 1 : 4 do
    for j = 1 : 4 do
      C(i, j) = 0;
      for k = 1 : 4 do C(i, j) = C(i, j) + A(i, k) * B(k, j); end
    end
  end
endfunction
```

On constate que cet algorithme consomme

$$\boxed{\text{64 multiplications et 64 additions.}}$$

b) *Écrire un algorithme fournissant la puissance n-ième d'une matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ utilisant l'algorithme précédent. Combien d'opérations sont-elles réalisées ?*

En SCILAB :

```
function C = puiss(A,n)
  C=A;
  for i = 1 : n - 1 do C=matprod(A,C); end
endfunction
```

On constate que cet algorithme consomme

$$\boxed{64(n-1) \text{ multiplications et } 64(n-1) \text{ additions.}}$$

c) *Soit $z \in \mathbb{R}$. Écrire un algorithme fournissant la puissance n-ième de $M(z)$ en utilisant la formule obtenue au I. 4. c). Combien d'opérations sont-elles réalisées ?*

En SCILAB :

```
function C = puissM(z,n)
  a = (z - 1)^n;  b = ((z + 3)^n - a)/4;
  A = [a,0,0,0;0,a,0,0;0,0,a,0;0,0,0,a];
  B = [b,b,b,b;b,b,b,b;b,b,b,b;b,b,b,b];
  C = A + B;
endfunction
```

On constate que cet algorithme consomme $n-1$ multiplications pour le calcul de $a = (z-1)^n$; $n-1$ multiplications et 1 division pour le calcul de $b = \big((z+3)^n - a\big)/4$. Par ailleurs, on fait 1 addition pour $z-1$, 2 addition pour calculer b et 16 additions pour la calcul de $A+B$. Donc, l'algorithme de cette question conduit à réaliser

$$\boxed{2n-2 \text{ multiplications, 1 division et 19 additions.}}$$

<u>II. Deuxième partie</u>

On note $\mathbb{R}_3[x]$ l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 3 et $\mathcal{B}_1 = (\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3)$ sa base canonique définie par $\mathcal{E}_j : x \longmapsto x^j$. Pour toute fonction polynomiale P, on note $h(P)$ l'application $x \longmapsto (1-x^2)\big[P'(0) - P'''(0)/6 + x\big(P''(0)/2 - P(0)\big)\big]$.

1. *Montrer que h est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$.*

Si $P, Q \in \mathbb{R}_3[x]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
&h(\alpha P + Q)(x)\\
&= (1-x^2)\left[(\alpha P + Q)'(0) - \frac{(\alpha P+Q)'''(0)}{6} + x\left(\frac{(\alpha P+Q)''(0)}{2} - (\alpha P+Q)(0)\right)\right]\\
&= (1-x^2)\left[(\alpha P' + Q')(0) - \frac{(\alpha P'''+Q''')(0)}{6} + x\left(\frac{(\alpha P''+Q'')(0)}{2} - (\alpha P+Q)(0)\right)\right]\\
&= \alpha(1-x^2)\left[P'(0) - \frac{P'''(0)}{6} + x\left(\frac{P''(0)}{2} - P(0)\right)\right] + (1-x^2)\left[Q'(0) - \frac{Q'''(0)}{6} + x\left(\frac{Q''(0)}{2} - Q(0)\right)\right]\\
&= \alpha\, h(P)(x) + h(Q)(x)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\deg\big(h(P)\big) &= \deg\left\{P'(0)(1-x^2) - \frac{P'''(0)}{6}(1-x^2) + \left(\frac{P''(0)}{2} - P(0)\right)x(1-x^2)\right\}\\
&\leqslant \max\left\{P'(0)(1-x^2)\,;\ \frac{P'''(0)}{6}(1-x^2)\,;\ \left(\frac{P''(0)}{2} - P(0)\right)x(1-x^2)\right\}\\
&\leqslant 3,
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{h \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_3[x].}$$

2. *Déterminer la matrice de h dans la base $\mathcal{B}_1$.*

   On a

$$\begin{aligned}
h(\mathcal{E}_0)(x) &= 0\times(1-x^2)-\frac{0}{6}(1-x^2)+\Big(\frac{0}{2}-1\Big)x(1-x^2) = -x+x^3 = -\mathcal{E}_1(x)+\mathcal{E}_3(x)\\
h(\mathcal{E}_1)(x) &= 1\times(1-x^2)-\frac{0}{6}(1-x^2)+\Big(\frac{0}{2}-0\Big)x(1-x^2) = 1-x^2 = \mathcal{E}_0(x)-\mathcal{E}_2(x)\\
h(\mathcal{E}_2)(x) &= 0(1-x^2)-\frac{0}{6}(1-x^2)+\Big(\frac{2}{2}-0\Big)x(1-x^2) = x-x^3 = \mathcal{E}_1(x)-\mathcal{E}_3(x)\\
h(\mathcal{E}_3)(x) &= 0(1-x^2)-\frac{6}{6}(1-x^2)+\Big(\frac{0}{2}-0\Big)x(1-x^2) = -1+x^2 = -\mathcal{E}_0(x)+\mathcal{E}_2(x),
\end{aligned}$$

   donc

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(h) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}.}$$

3. *Déterminer l'ensemble des valeurs propres réelles de h.*

   On constate que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(h) = M_{(0,1,0,-1)}$ donc, d'après le résultat de la question I. 3. d), $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(h)$ est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2i\end{pmatrix}$$

   ce qui démontre que

$$\boxed{\text{la seule valeur propre réelle de } h \text{ est } 0.}$$

4. *Déterminer une base de l'image et du noyau de h.*

   Le noyau de h est le sous-espace propre de h associé à la valeur propre 0. Or, d'après les résultats des questions I. 3. c) et I. 3. d), on sait que $\dim \mathrm{Ker}\, h = 2$ et que les vecteurs de coordonnées $(1,1,1,1)$ et $(1,-1,1,-1)$ dans la base $\mathcal{B}_1$ forment une base de $\mathrm{Ker}\, h$. Donc

$$\boxed{x \longmapsto 1+x+x^2+x^3 \text{ et } x \longmapsto 1-x+x^2-x^3 \text{ forment une base de } \mathrm{Ker}\, h.}$$

   Le théorème du rang nous dit que $\dim \mathrm{Im}\, h = 2$. Or les deux premières colonnes de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(h)$ sont clairement linéairement indépendantes donc les vecteurs $h(\mathcal{E}_1)$ et $h(\mathcal{E}_2)$ forment une base de $\mathrm{Im}\, h$, c'est-à-dire que

$$\boxed{x \longmapsto -x+x^3 \text{ et } x \longmapsto 1-x^2 \text{ forment une base de } \mathrm{Im}\, h.}$$

Problème 2

Dans ce problème, on considère $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : [0; a] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement croissante sur $[0; a]$, dérivable dans l'intervalle $]0; a[$ et telle que $f(0) = 0$. La fonction f est alors bijective de $[0; a]$ dans $[0; f(a)]$ et admet une réciproque, notée g. On remarquera que g est continue sur l'intervalle $[0; f(a)]$ et strictement croissante sur cet intervalle.

1. a) *Dans les deux premières questions, on montre que, pour tout réel $\alpha \in [0; a]$, on a la relation* (1) définie par $\displaystyle\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{f(\alpha)} g(y)\,\mathrm{d}y = \alpha f(\alpha)$.

i. *Justifier que l'on a $g(0) = 0$.*

On sait que $f(0) = 0$ donc le seul antécédent de 0 par f est 0, ce qui prouve que

$$\boxed{g(0) = 0.}$$

ii. *Exemple : On prend $f(x) = x^p$ avec $p \in \mathbb{R}_+^*$. Vérifier la relation (1).*

La fonction $f(x) = x^p$ réalise une bijection de $[0; a]$ sur $[0; a^p]$ dont la réciproque est définie par $g(y) = \sqrt[p]{y}$. Alors, pour tout α tel que $0 \leqslant \alpha \leqslant a$,

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{f(\alpha)} g(y)\,\mathrm{d}y &= \int_0^\alpha x^p\,\mathrm{d}x + \int_0^{\alpha^p} \sqrt[p]{y}\,\mathrm{d}y = \Big[\frac{x^{p+1}}{p+1}\Big]_0^\alpha + \Big[\frac{py\sqrt[p]{y}}{p+1}\Big]_0^{\alpha^p} \\ &= \frac{\alpha^{p+1}}{p+1} + \frac{p\alpha^{p+1}}{p+1} = \alpha^{p+1} = \alpha f(\alpha),\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\text{si } f(x) = x^p, \text{ la relation (1) est vraie.}}$$

b) *Pour tout réel $\alpha \in [0; a]$, on note $\varphi(\alpha) = \displaystyle\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{f(\alpha)} g(y)\,\mathrm{d}y - \alpha f(\alpha)$.*

i. *Exprimer la fonction φ à l'aide de f et de primitives de f et g.*

Si F désigne la primitive de f qui s'annule en 0 et si G est la primitive de g qui s'annule en 0, alors

$$\boxed{\varphi(\alpha) = F(\alpha) + G\big(f(\alpha)\big) - \alpha f(\alpha).}$$

ii. *En déduire que la fonction φ ainsi définie est continue sur $[0; a]$.*

La formule de la question précédente nous permet de voir que φ est la somme et la composée de fonctions continues donc, en vertu des théorèmes généraux de continuité,

$$\boxed{\varphi \text{ est continue sur } [0; a].}$$

iii. *Montrer que φ est dérivable sur $]0; a[$, de dérivée nulle sur $]0; a[$ et en déduire que φ est constante sur $[0; a]$.*

La formule de la question (i) nous permet de voir que φ est la somme et la composée de fonctions dérivables donc, en vertu des théorèmes généraux de dérivabilité,

$$\boxed{\varphi \text{ est dérivable sur }]0; a[.}$$

De plus, pour tout α vérifiant $0 < \alpha < a$, on a

$$\varphi'(\alpha) = f(\alpha) + f'(\alpha)g\big(f(\alpha)\big) - f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) = f(\alpha) + f'(\alpha)\alpha - f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) = 0,$$

où l'on a utilisé le fait que $g\big(f(\alpha)\big) = \alpha$, donc

$$\boxed{\varphi \text{ est de dérivée nulle sur }]0; a[.}$$

Comme $]0; a[$ est un intervalle, on en déduit que φ est constante sur $]0; a[$. Comme φ est continue sur $[0; a]$, on peut en déduire que

$$\boxed{\varphi \text{ est constante sur } [0; a].}$$

iv. *Vérifier que $\varphi(0) = 0$ et en déduire l'égalité* (1).

Comme $f(0) = 0$, on a

$$\varphi(0) = \int_0^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{f(0)} g(y)\,\mathrm{d}y - 0 \times f(0) = 0,$$

donc

$$\boxed{\varphi(0) = 0.}$$

Comme φ est constante sur $[0; a]$ et nulle en 0, on sait que φ est nulle sur $[0; a]$, ce qui revient à dire que

$$\boxed{\text{la relation (1) est vraie.}}$$

2. a) *Dans cette question, on applique la formule précédente au calcul de* $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x$.

i. *Soit $P(x) = x^4 + 1$. Montrer que $P(x) = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)$ et en déduire que* $\displaystyle\frac{x^2}{x^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}\Big(\frac{x}{x^2 - x\sqrt{2}+1} - \frac{x}{x^2 + x\sqrt{2}+1}\Big)$.

On a $P(x) = x^2 + 1 + 2x^2 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2 + x\sqrt{2}+1)(x^2 - x\sqrt{2}+1)$, donc

$$\boxed{P(x) = (x^2 + x\sqrt{2}+1)(x^2 - x\sqrt{2}+1).}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}}{4}\Big(\frac{x}{x^2 - x\sqrt{2}+1} - \frac{x}{x^2 + x\sqrt{2}+1}\Big) &= \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{x(x^2 + x\sqrt{2}+1) - x(x^2 - x\sqrt{2}+1)}{(x^2 - x\sqrt{2}+1)(x^2 + x\sqrt{2}+1)}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{2\sqrt{2}x^2}{x^4+1},
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\frac{x^2}{x^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}\Big(\frac{x}{x^2 - x\sqrt{2}+1} - \frac{x}{x^2 + x\sqrt{2}+1}\Big).}$$

ii. *Montrer que* $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{4}\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 - x\sqrt{2}+1}\mathrm{d}x$ *en utilisant un changement de variable.*

D'après la relation précédente, on a

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^1 \frac{x}{x^2 - x\sqrt{2}+1}\mathrm{d}x - \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^1 \frac{x}{x^2 + x\sqrt{2}+1}\mathrm{d}x.$$

En effectuant alors le changement de variable $u = -x$ dans la seconde intégrale, il vient

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x &= \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^1 \frac{x}{x^2 - x\sqrt{2}+1}\mathrm{d}x - \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{-1} \frac{u}{u^2 - u\sqrt{2}+1}(-\mathrm{d}u)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^1 \frac{x}{x^2 - x\sqrt{2}+1}\mathrm{d}x - \frac{\sqrt{2}}{4}\int_{-1}^0 \frac{x}{x^2 - x\sqrt{2}+1}\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{4}\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 - x\sqrt{2}+1}\mathrm{d}x.}$$

iii. *En déduire que* $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x = \big(\sqrt{2}\ln(3-2\sqrt{2})+\sqrt{2}\pi\big)/8$*. On pourra utiliser le changement de variable* $u = x\sqrt{2}-1$ *ainsi que la formule valable pour tout réel* x *strictement positif :* $\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2$.

En posant $u = x\sqrt{2}-1$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2-x\sqrt{2}+1}\mathrm{d}x$, il vient

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2-x\sqrt{2}+1}\mathrm{d}x &= \int_{-1}^1 \frac{2x}{(\sqrt{2}x-1)^2+1}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}-1} \frac{\sqrt{2}(u+1)}{u^2+1}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2}} \\
&= \int_{-\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}-1} \frac{u+1}{u^2+1}\mathrm{d}u \\
&= \left[\frac{\ln|u^2+1|}{2} + \arctan u\right]_{-\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}-1} \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{4-2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} + \arctan(\sqrt{2}-1) + \arctan(\sqrt{2}+1) \\
&= \frac{1}{2}\ln\underbrace{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}_{=3-2\sqrt{2}} + \underbrace{\left(\arctan(\sqrt{2}-1)+\arctan\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)}_{=\pi/2} \\
&= \frac{1}{2}\ln(3-2\sqrt{2}) + \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

donc, d'après la formule de la question précédente,

$$\boxed{\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln(3-2\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}\pi}{8}\cdot}$$

b) *Dans cette question,* f_0 *désigne la fonction, définie sur* $[0;\pi/4]$*, par* $f_0(x) = \sqrt{\tan x}$.

i. *Montrer que* f_0 *est strictement croissante sur* $[0;\pi/4]$*, continue sur* $[0;\pi/4]$ *et dérivable sur* $]0;\pi/4[$*. Jusitifier l'existence de la fonction* ${f_0}^{-1}$ *et donner l'expression de cette fonction réciproque.*

La fonction f_0 est strictement croissante sur $[0;\pi/4]$ (respectivement continue sur $[0;\pi/4]$, respectivement dérivable sur $]0;\pi/4[$) comme composée de fonctions strictement croissantes sur $[0;\pi/4]$ (respectivement continues sur $[0;\pi/4]$, respectivement dérivables sur $]0;\pi/4[$). Comme $f([0;\pi/4]) = [0;1]$, le théorème de la bijection permet alors d'affirmer que f_0 admet une fonction réciproque ${f_0}^{-1}$ définie de $[0;1]$ vers $[0;\pi/4]$ telle que, pour tout $y \in [0;1]$, $\sqrt{\tan x} = y$ où $x = {f_0}^{-1}(y)$. Or $\sqrt{\tan x} = y \iff \tan x = y^2 \iff x = \arctan(y^2)$ car $x \in [0;\pi/4]$, donc ${f_0}^{-1}(y) = \arctan(y^2)$. Pour résumer,

la fonction f_0 est strictement croissante sur $[0;\pi/4]$, continue sur $[0;\pi/4]$, dérivable sur $]0;\pi/4[$, bijective de $[0;\pi/4]$ vers $[0;1]$. De plus, son application réciproque ${f_0}^{-1} : [0;1] \longrightarrow [0;\pi/4]$ est définie par ${f_0}^{-1}(y) = \arctan(y^2)$.

ii. *Calculer* $\displaystyle\int_0^1 \arctan(y^2)\,\mathrm{d}y$ *par intégration par parties.*

Les fonctions $y \longmapsto y$ et $y \longmapsto \arctan(y^2)$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, on peut effectuer l'intégration par parties suivantes :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \arctan(y^2)\,\mathrm{d}y &= \big[y\arctan(y^2)\big]_0^1 - \int_0^1 \frac{2y^2}{1+y^4}\mathrm{d}y \\ &= \arctan 1 - 2\Big(\frac{\sqrt{2}}{8}\ln(3-2\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}\pi}{8}\Big)\end{aligned}$$

où l'on utilisé le résultat de la question 2. a) iii. Donc

$$\boxed{\int_0^1 \arctan(y^2)\,\mathrm{d}y = \frac{(1-\sqrt{2})\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\ln(3-2\sqrt{2}).}$$

iii. *En utilisant* (1) *et la question précédente, donner la valeur de* $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x$.

La fonction f_0 satisfait toutes les hypothèses pour que l'on puisse lui appliquer la formule (1) avec $\alpha = a = \pi/4$. Il vient alors

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \arctan(y^2)\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4}$$

car $f_0(\pi/4) = 1$. Il s'ensuit que

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \arctan(y^2)\,\mathrm{d}y,$$

ce qui donne, en vertu du résultat de la question précédente, que

$$\boxed{\int_0^{\pi/4} \sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{4}\big(\pi + \ln(3-2\sqrt{2})\big).}$$

3. *Dans cette question, on revient au cas général.* α *désigne un réel vérifiant* $0 \leqslant \alpha \leqslant a$ *et* β *un réel vérifiant* $0 \leqslant \beta \leqslant f(a)$.

   a) *Montrer, en distinguant deux cas selon la position relative de* β *et* $f(\alpha)$, *que l'on a* $\displaystyle\int_{f(\alpha)}^{\beta} g(y)\,\mathrm{d}y \geqslant \alpha\big(\beta - f(\alpha)\big)$ *puis que l'on a* (2) : $\displaystyle\alpha\beta \leqslant \int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\beta} g(y)\,\mathrm{d}y$.

   Supposons que $f(\alpha) \leqslant \beta$. Comme la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0;f(a)]$, on a $\forall y \in [f(\alpha);\beta]$, $g\big(f(\alpha)\big) \leqslant g(y)$, ce qui donne $\alpha \leqslant g(y)$. La croissance de l'intégrale nous permet alors d'écrire que

$$\int_{f(\alpha)}^{\beta} g(y)\,\mathrm{d}y \geqslant \int_{f(\alpha)}^{\beta} \alpha\,\mathrm{d}y = \alpha\big(\beta - f(\alpha)\big).$$

   Supposons que $f(\alpha) > \beta$. Comme la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0;f(a)]$, on a $\forall y \in [\beta;f(\alpha)]$, $g\big(f(\alpha)\big) \geqslant g(y)$, ce qui donne $\alpha \geqslant g(y)$. La croissance de l'intégrale nous permet alors d'écrire que

$$\int_{f(\alpha)}^{\beta} g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\beta}^{f(\alpha)} \big(-g(y)\big)\,\mathrm{d}y \geqslant \int_{f(\alpha)}^{\beta} (-\alpha)\,\mathrm{d}y = \alpha\big(\beta - f(\alpha)\big).$$

   Ainsi, dans tous les cas, on a

$$\boxed{\int_{f(\alpha)}^{\beta} g(y)\,\mathrm{d}y \geqslant \alpha\big(\beta - f(\alpha)\big).}$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^\beta g(y)\,\mathrm{d}y &= \underbrace{\int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{f(\alpha)} g(y)\,\mathrm{d}y}_{=\alpha f(\alpha)\text{ d'après (1)}} + \underbrace{\int_{f(\alpha)}^\beta g(y)\,\mathrm{d}y}_{\geqslant \alpha\{\beta - f(\alpha)\}} \\ &\geqslant \alpha f(\alpha) + \alpha\big(\beta - f(\alpha)\big),\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\alpha\beta \leqslant \int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^\beta g(y)\,\mathrm{d}y.}$$

b) *Étudier sur* $[0; f(a)]$ *les variations de la fonction* h *définie, pour tout* $t \in [0; f(a)]$*, par la formule* $h(t) = \alpha t - \displaystyle\int_0^t g(y)\,\mathrm{d}y$*. Calculer la valeur de son maximum et retrouver ainsi la formule* (2)*.*

La fonction h est dérivable sur $[0; f(a)]$ comme différence de deux fonctions dérivables sur $[0; f(a)]$ (la seconde fonction est une primitive de g qui est une fonction continue sur $[0; f(a)]$). De plus, pour tout $t \in [0; f(a)]$, on a $h'(t) = \alpha - g(t)$ donc $h'(t) \geqslant 0 \iff \alpha \geqslant g(t) \iff f(\alpha) \geqslant t$ puisque f est une fonction croissante. On obtient ainsi le tableau de variation suivant

t	0		$f(\alpha)$		$f(a)$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$	0	$\nearrow$	$h\big(f(\alpha)\big)$	$\searrow$	$h\big(f(a)\big)$

Or, d'après la relation (1), on a

$$h\big(f(\alpha)\big) = \alpha f(\alpha) - \int_0^{f(\alpha)} g(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x,$$

donc d'après les variations de h, on en déduit que

$$\forall t \in [0; f(a)]\,, \qquad h(t) \leqslant \int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x,$$

ce qui donne pour $t = \beta$,

$$\alpha\beta - \int_0^\beta g(y)\,\mathrm{d}y \leqslant \int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\alpha\beta \leqslant \int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^\beta g(y)\,\mathrm{d}y.}$$