# PC* 96-97 **correction épreuve 1 X97**

## Première partie

1. $f$ étant convexe sur l'intervalle $[t_1, t_2]$, sa courbe représentative est en dessous la corde joignant les points $(t_1, f(t_1))$ et $(t_2, f(t_2))$. Comme $f(t_1) = f(t_2) = 0$, on a pour tout t de $[t_1, t_2]$, $f(t) \leq 0$. Par ailleurs $f$ est positive sur $[t_1, t_2]$, donc $f$ est nulle sur $[t_1, t_2]$.

2. $\varphi$ est croissante sur $]c, +\infty[$. $\varphi$ a donc une limite en $+\infty$. $f$ est majorée sur cet intervalle donc $\dfrac{f(t) - f(c)}{t - c}$ a 0 pour limite en $+\infty$. Ainsi $\varphi$ a une limite négative ou nulle en $+\infty$. Il s'ensuit que $\dfrac{f(t) - f(c)}{t - c} \leq 0$, pour $t > c$. En choisissant $c \leq c' < t'$, on a de même $f(t') \leq f(c')$. Ainsi f est décroissante sur $[c, +\infty[$.

3. Considérons la fonction $\psi$ définie par $\psi(t) = \dfrac{f(t) - f(c)}{t - c}$ sur l'intervalle $]-\infty, c[$. $\psi$ est croissante et a donc une limite en $-\infty$. $f$ étant majorée par M, $\psi(t) \geq \dfrac{M - f(c)}{t - c}$, la limite en $-\infty$ de $\psi$ est donc positive ou nulle. Par un raisonnement similaire à la question précédente on en conclut que $f$ est croissante sur $\mathbf{R}$, comme elle est aussi décroissante sur $\mathbf{R}$, $f$ est constante sur $\mathbf{R}$.

## Deuxième partie

4. $(y^2)" = 2(y'^2 + yy") = 2(y'^2 - qy^2) \geq 0$. $y^2$ est donc convexe.

5. Si $t_1 < t_2$ et $y(t_1) = y(t_2) = 0$, $y^2$ vérifie les hypothèses de la question 1, donc $y^2$ est nulle sur $[t_1, t_2]$, par suite $y$ a la même propriété. On a $y(t_1) = y'(t_1) = 0$, par suite $y$ est nulle sur $\mathbf{R}$, d'après le théorème d'unicité de Cauchy puisque la fonction nulle est solution.

6. $y^2$ est bornée, convexe sur $\mathbf{R}$, donc, d'après la question 3, $y^2$ est constante sur $\mathbf{R}$. $y$ étant continue sur l'intervalle $\mathbf{R}$, elle est aussi constante sur $\mathbf{R}$. Si $C$ est la valeur constante de $y$, on a $C.q = 0$. Comme $q$ n'est pas nulle on en déduit que $C = 0$.

7. $y_0 > 0$, $y'(0) = 0$ ;

   (a) $y^2$ est convexe $(y^2)'(0) = 0$, donc, pour tout $t$, $y^2(t) \geq y_0^2$. $y^2$ ne s'annule donc pas , par suite y ne s'annule pas et étant continue sur $\mathbf{R}$, pour tout $t$ , $y(t) \geq y_0 > 0$. $y" = -qy \geq (-q)y_0 \geq 0$, y est donc convexe.

(b) Posons $z(t) = y(t) - Y(t)$. On a $Y(t) = y_0 ch(\omega t)$. $z'(t) = y'(t) - Y'(t)$, $z"(t) = -q(t)y(t) - \omega^2 y_0 ch(\omega t) = -q(t)y(t) - \omega^2 Y(t) \geq \omega^2 (y(t) - y_0 ch(\omega t))$. Ainsi $z"(t) \geq \omega^2 z(t)$ sur $\mathbf{R}$. Posons $h(t) = z"(t) - \omega^2 z(t)$. Ona, pour tout $t$ dans $\mathbf{R}$, $h(t) \geq 0$. Par la méthode des variations des constantes on trouve $z(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{sh(\omega(t-u)).h(u)}{\omega} du$ puisque $z(0) = z'(0) = 0$. On constate alors que pour tout réel $t$, $z(t) \geq 0$.

**Troisième partie**

8. Si l'on pose $u = yz' - y'z$ on a, sur $\mathbf{R}$, $u' = yz" - y"z = -qyz + qyz = 0$. Par suite u est constant sur $\mathbf{R}$.

9. $y_1 \neq 0$, si $y_2 = ay_1$, avec a constant, on doit avoir $a = 0$ puisque $y_1(0) = 1$ et $y_2(0) = 0$. Mais alors $y_2 = 0$, ceci contredit $y_2'(0) = 1$. Si $y$ est solution de $E$, $y = y(0)y_1 + y'(0)y_2$. Pour tout $t$ de $\mathbf{R}$, on a : $y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t) = y_1(0)y_2'(0) - y_2(0)y_1'(0) = 1$ (1). Si $t_0$ est un zéro commun à $y_1$ et $y_2$ on a $y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_2(t_0)y_1'(t_0) = 0$, ceci contredit la relation (1).

10. Posons $z(t) = y_1(-t)$. $z(0) = 1$, $z'(t) = -y_1'(t)$ donc $z'(0) = 0$, $z"(t) = y"(-t)$. On constate que pour tout $t$ dans $\mathbf{R}$, $y"(-t) + q(-t)y(-t) = 0$. $q$ étant paire on voit que $z$ est solution de $E$ vérifiant les mêmes conditions initiales que $y_1$, on a donc $z = y_1$, ceci prouve que $y_1$ est paire. On démontre de même que $y_2$ est impaire en posant $z(t) = -y_2(-t)$.

11. $q$ est périodique de période $\pi$.

(a) Si $y$ est dans $S$, on a pour tout $t$ dans $\mathbf{R}$, $y"(t+\pi) + q(t+\pi)y(t+\pi) = 0$, comme $q(t+\pi) = q(t)$, on voit que la fonction $\mu(y)$ est dans $S$. L'équation différentielle étant linéaire sans second membre la fonction $\mu$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $S$.

(b) Si $\mu(y) = 0$ et $y \in S$, on a pour tout $t$ dans $\mathbf{R}$, $y(t+\pi) = 0$, par suite y=0. $\mu$ est donc un automorphisme de l'espace vectoriel de dimension 2, $E$.

(c) $\mu(y_1) = y_1(\pi)y_1 + y_1'(\pi)y_2$, $\mu(y_2) = y_2(\pi)y_1 + y_2'(\pi)y_2$. Ainsi

$$M = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix}.$$

$det(M) = 1$. Par suite :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} y_2'(\pi) & -y_2(\pi) \\ -y_1'(\pi) & y_1(\pi) \end{pmatrix}.$$

(d) $\mu^{-1}(y)(t) = y(t-\pi)$, la matrice de $\mu^{-1}$ dans la base $(y_1, y_2)$ est donc :

$$\begin{pmatrix} y_1(-\pi) & y_2(-\pi) \\ y_1'(-\pi) & y_2'(-\pi) \end{pmatrix}.$$

12. $q$ est paire et périodique de période $\pi$.

    (a) $y_1$ est paire et $y_2$ est impaire, donc $y_1(-\pi) = y_1(\pi)$. Par suite $y_1(\pi) = y_2'(\pi) = \alpha$.

    (b) Le polynôme caractéristique de $M$ est $X^2 - 2\alpha X + 1$.

13. On suppose $|\alpha| > 1$.

    (a) Le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbf{R}$ à racines simples. $\mu$ est donc diagonalisable. Soit $z_1$ un vecteur propre de $\mu$ associé à la valeur propre $\lambda = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}$ et $z_2$ un vecteur propre associé à $\frac{1}{\lambda}$. $\mu^p(z_1) = \lambda^p z_1 = z_1$, on a donc , pour tous $t$ dans $\mathbf{R}$ et $p$ dans $\mathbf{Z}$, $z_1(t + p\pi) = \lambda^p z_1(t)$, comme $|\lambda| \neq 1$ et qu'il existe $t_0$ tel que $z_1(t_0) \neq O$, on voit que $z_1$ n'est pas bornée. De même $z_2$ n'est pas bornée.

    (b) Si $y$ est une solution bornée, on a $y = c_1 z_1 + c_2 z_2$ et donc pour tout $p$ dans $\mathbf{Z}$ et tout $t$ dans $\mathbf{R}$, $y(t + p\pi) = c_1 \lambda^p z_1(t) + c_2 \lambda^{-p} z_2(t)$. En passant à la limite quand p tend vers $+\infty$ et $-\infty$, on voit puisque $y$ est bornée que l'on a nécessairement $c_1 = c_2 = 0$, d'où $y = 0$.

14. (a) $\alpha = 1$. $\mu$ possède 1 pour valeur propre double. Soit $z$ son vecteur propre associé. on $\mu(z) = z$, donc z est solution non nulle $\pi$-périodique de $E$.

    (b) $\alpha = -1$. $\mu$ possède -1 pour valeur propre double. Soit $z$ son vecteur propre associé. on $\mu(z) = -z$, on a donc $z(t + \pi) = -z(t)$, par suite $z$ est solution non nulle $2\pi$- périodique de $E$.

15. $|\alpha| < 1$.

    (a) Le polynôme caractéristique admet deux racines complexes non réelles conjuguées l'une de l'autre, notons les $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ où $\theta$ est différent de 0 modulo $\pi$. Il existe une matrice colonne à deux lignes non nulles complexes $U = U_1 + iU_2$ où $U_1$ et $U_2$ sont réelles telle que $MU = e^{i\theta}U$. On obtient alors :

    $$MU_1 = cos\theta U_1 + sin\theta U_2\,,\ , MU_2 = -sin\theta U_1 + cos\theta U_2$$

    $U_1$ et $U_2$ sont non nuls et non colinéaires car $M$ n'a pas de valeur propre réelle. Considérons $u_1$ et $u_2$ les éléments de $S$ dont les matices colonnes de leurs coordonnées dans la base $(y_1, y_2)$ sont respectivement $U_1$ et $-U_2$. La matrice de $\mu$ par rapport à $(u_1, u_2)$ est

    $$\begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}.$$

    Sur le compact $[0, \pi]$, les fonctions continues $u_1$ et $u_2$ sont bornées. Comme on a, pour tout $t$ de $\mathbf{R}$ et tout $p$ de $\mathbf{Z}$, $u_1(t+p\pi) = cosp\theta u_1(t) + sinp\theta u_2(t)$, $u_2(t+p\pi) = -sinp\theta u_1(t) + cosp\theta u_2(t)$. Il en découle que $u_1$ et $u_2$ sont bornées sur $\mathbf{R}$ et que toute solution de $E$ étant combinaison linéaire de $u_1$ et $u_2$ est donc bornée.

(b) $y_1$ et $y_2$ ne s'annulant pas simultanément, $r = \sqrt{(y_1)^2 + (y_2)^2}$ n'a donc pas de zéro. Cette fonction étant bornée, $\frac{1}{r^2}$ est minorée par un nombre strictement positif, m. Si $z$ est une primitive de $\frac{1}{r^2}$, pour tout réel $t \geq 0$, $z(t) - z(0) \geq mt$. Ainsi $z$ n'est pas majorée sur $[0, +\infty[$.

(c) Si $y_1$ ne s'annulait pas sur $]0, +\infty[$, $Arctan\frac{y_2}{y_1}$ serait dérivable sur cet intervalle et sa dérivée serait $\frac{1}{r^2}$ , elle ne serait donc pas bornée, ceci est contraire au résutat prouvé dans la question 15 a). Soit $t_0$ la borne inférieure de l'ensemble des zéros strictement positifs de $y_1$. Par continuité de $y_1$ on a $y_1(t_0) = 0$, donc $t_0 > 0$. $y_1$ étant paire $y_1(-t_0) = 0$ et $y_1$ admet donc au moins deux zéros distincts.

## Quatrième partie

16. Soit $y$ une solution non nulle de $E$ admettant $a$ pour zéro.

(a) Si $y'(a) = 0$, d'après le théorème de Cauchy on a $y = 0$. Par suite $y'(a) \neq 0$. Alors $y(t) \sim (t - a)y'(a)$, au voisinage de $a$. Ceci prouve qu'il existe un nombre réel $\epsilon$ strictement positif tel que le seul zéro de $y$ dans l'intervalle $]a - \epsilon, a + \epsilon[$ soit $a$.

(b) L'ensemble des zéros de $y$ strictement supérieurs à $a$ étant non vide considérons sa borne inférieur, b. Par continuité $y(b) = 0$ et d'aprés la question précédente $b \geq a + \epsilon$, donc $b > a$ et bien sûr $y$ n'admet pas de zéro dans l'intervalle $]a, b[$.

(c) Soit $z$ une autre solution de $E$. Supposons que $z$ ne s'annule pas sur $[a, b]$. Considérons la fonction $u = \frac{y}{z}$, $y'z - z'y$ a une valeur constante k sur $\mathbf{R}$. $u' = \frac{k}{z^2}$. La fonction $u$ est donc monotone sur $[a, b]$, prenant la valeur zéro aux bornes, $u$ est nulle sur $[a, b]$ ; en conséquence $y$ est nulle sur $[a, b]$, ceci contredit le résultat de la question précédente.

17. On suppose que q est $\pi$-périodique, paire et $|\alpha| < 1$. On sait déjà que $y_1$ a un zéro dans $]0, +\infty[$. Soit a un zéro strictement positif de $y_1$ ; d'aprés la question I6a) il existe donc $a" > a$ tel que $y_1(a") \neq 0$. On applique la même méthode que dans la question 15c) pour prouver que $y_1$ s'annule sur $[a", +\infty[$. Il s'ensuit que $y_1$ admet une infinité de zéros. En appliquant les question 16b) et 16c) où le rôle de $y$ est joué par $y_1$ on voit que toute solution de $E$ admet une infinité de zéros.

18. Dans cette question $q$ est supposée non nulle, $\pi$-périodique et positive. Si $y_1$ ne s'annulait pas sur $[0, +\infty[$, comme $y_1(0) = 1$, on en déduirait que $y_1$ est positive sur $[0, +\infty[$ ; $y"_1 = -qy_1 \leq 0$, donc $-y_1$ serait convexe majorée sur $[0, +\infty[$. La question 2 permettrait d'affirmer que $y_1$

est croissante sur $[0, +\infty[$ ; par suite $y_1 \leq 1$ sur $[0, +\infty[$. Or $y_1$ serait concave sur $[0, +\infty[$ et $y_1'(0) = 0$ donc, pour $t \geq 0$, $y_1 \leq 1$ sur $[0, +\infty[$. Ceci impliquerait $y_1 = 1$ sur $[0, +\infty[$. Mais alors $q = 0$ sur $[0, +\infty[$, et par périodicité $q = 0$ sur $\mathbf{R}$, ceci serait contraire à l'hypothèse. Appelons alors $a$ la borne inférieure des zéros strictement positifs de $y_1$, par continuité $y_1(a) = 0$ et comme $y_1(0) = 1$, $a > 0$.
On a $y_1'(a) \neq 0$, comme $y_1$ et positive sur $[0, a]$, on a nécécéssairement $y_1'(a) < 0$. Si $y_1$ ne s' annule pas sur $]a, +\infty[$, $y_1$ prend des valeurs strictement négatives sur $]a, +\infty[$ et par suite $y_1$ est convexe majorée sur $]a, +\infty[$, $y_1$ est donc décroissante sur $]a, +\infty[$ d'après la question 2. $y_1$ est donc majorée par $y_1(A) < 0$ sur $[A, +\infty[$ pour $A > a$. Alors pour $n \in \mathbf{N}$ et assez grand, $y'((n+1)\pi) - y'(n\pi) = -\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} q(t)y(t)dt \geq -y_1(A) \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} q(t)dt$.
Sachant que $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} q(t)dt = \int_0^{\pi} q(t)dt > 0$, on en déduit que la série de terme général, $y_1'((n+1)\pi) - y_1'(n\pi)$ est divergente, donc la suite $(y_1'(n\pi))$ n'est pas convergente. Comme on sait que $y_1'$ est croissante sur $]a, +\infty[$, on voit que $y_1'$ a $+\infty$ pour limite en $+\infty$. Dans ce cas $y_1$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Ceci contredit le fait que $y_1$ restait négative sur $]a, +\infty[$. En fait ce raisonnement est valable si on remplace a par tout zéro b de $y_1$ en remplaçant au besoin $y_1$ par $-y_1$ si $y_1'(b) > 0$.
On peut donc conclure que $y_1$ a une infinité de zéros dans $\mathbf{R}_+^*$. Par application de la question 16c), on en déduit que toute solution de $E$ a une infinité de zéros.
Remarquons que pour prouver l'existence d'un zéro d'une solution non nulle on peut supposer qu'une telle solution $y$ , continue sur $\mathbf{R}$ garde un signe constant, par exemple négatif et appliquer la question 3, pour en déduire que $y$ est constante et qu'alors $q = 0$, on obtient ainsi une contradiction.