ÉCOLE POLYTECHNIQUE, MATH 1 2005

Première partie

1. On a $(X^p)^{(k)} = p(p-1)(\ldots)(p-k+1)X^{p-k}$ (égal à 0 si $k > p$) d'où on tire

$$\boxed{\pi_n(X^p) = \begin{cases} p! & \text{si } p \leq n \\ \dfrac{p!}{(p-n)!} & \text{si } p > n \end{cases}.}$$

2. a) $A_n f \in E_n$ est immédiat (produit de 2 fonctions de classe $\mathcal{C}^n$).
Pour $B_n g$ on va utiliser le théorème de Lebesgue de dérivabilité sous le signe intégral : soit $\varphi(x,t) = g'(xt)$.

- $\dfrac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(x,t) = t^k g^{(k+1)}(xt)$ est continue par rapport à x et à t pour $k \leq n-1$,
- $\left|\dfrac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \|g^{(k+1)}\| \leq \pi_{n-1}(g)$ qui est bien sûr intégrable sur $[0,1]$,

on peut alors en déduire que $B_n g$ est $n-1$-fois dérivable et à dérivée $n-1$-ième continue, soit $B_n g \in E_{n-1}$.

b) A_n et B_n sont des applications linéaires par linéarité de la multiplication et de l'intégration. On a vu à la question précédente que $A_n(E_n) \subset E_n$ donc $A_n \in \mathcal{L}(E_n)$ et $B_n \in \mathcal{L}(E_n, E_{n-1})$. Procédons maintenant au calcul des normes.

- Pour A_n : $(xf(x))^{(k)} = xf^{(k)}(x) + kf^{(k-1)}(x)$ grâce à la formule de Leibniz donc $|(xf(x))^{(k)}| \leq \|f^{(k)}\| + k\|f^{(k-1)}\| \leq (n+1)\pi_n(f)$ d'où $\pi_n(A_n f) \leq (n+1)\pi_n(f)$, A_n est continue, de norme $\leq n+1$. Or, si $f = X^n$ alors $\pi_n(f) = n!$ et $\pi_n(A_n f) = (n+1)!$ donc on a égalité soit $\boxed{\|A_n\| = n+1}$.
- Pour B_n : on sait que $(B_n g)^{(k)}(x) = \displaystyle\int_0^1 t^k g^{(k+1)}(xt)\,\mathrm{d}t$ donc, en majorant $|g^{(k+1)}(xt)|$ par $\|g^{(k+1)}\|$ et t^k par 1, on obtient $|(B_n g)^{(k)}(x)| \leq \|g^{(k+1)}\| \leq \pi_n(g)$ pour $k \leq n-1$. Ceci nous donne $\pi_{n-1}(B_n g) \leq \pi_n(g)$, B_n est continue, de norme ≤ 1. En prenant $g = X$ alors $(B_n g)(x) = 1$ donc $\pi_{n-1}(B_n g) = 1 = \pi_n(g) = 1$, on a égalité d'où $\boxed{\|B_n\| = 1}$.

3. On remarque que $(B_n g)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^1 g'(u)\,\mathrm{d}u = \dfrac{g(x)-g(0)}{x}$ si $x \neq 0$ et $(B_n g)(0) = g'(0)$ donc

$$(B_n A_n f)(x) = \frac{1}{x}[A_n f(x) - A_n f(0)] = f(x) \text{ même si } x = 0$$

soit $\boxed{B_n A_n = \mathrm{Id}_{E_n, E_{n-1}}}$. De même, on vérifie que $\boxed{(A_{n-1} B_n g)(x) = g(x) - g(0)}$.

4. a) $\operatorname{Im} A_0 = \{g \in \mathcal{C}^0 \mid \exists f \in \mathcal{C}^0,\ g = Xf\}$.
Si $g \in \operatorname{Im} A_0$ alors $g(0) = 0$ et $\dfrac{g(x)}{x} = f(x) \to f(0)$ quand $x \to 0$ donc $g \in F_0$.
Si $g \in F_0$ alors, en posant $f = \dfrac{g}{X}$, $f(0) = \displaystyle\lim_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x}$ alors $f \in \mathcal{C}^0$ donc $g \in \operatorname{Im} A_0$.
Conclusion : on a bien $\boxed{\operatorname{Im} A_0 = F_0}$.

b) $n > 0$ donc, si $g \in \operatorname{Im} A_n$, alors $g(0) = 0$ et $g = Xf$. On a $f = B_n g$ car $g(0) = 0$ et $f \in \mathcal{C}^n$ par définition. Par Leibniz $g^{(n)}(x) = xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x)$ d'où

$$\frac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)}{x} = \underbrace{f^{(n)}(x)}_{\to f^{(n)}(0)} + n \underbrace{\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x}}_{\to f^{(n)}(0)}$$

donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)}{x} = (n+1)f^{(n)}(0)$ soit $\boxed{\operatorname{Im} A_n \subset F_n}$.

c) Si $g \in F_n$ alors $f = \dfrac{g}{X} = B_n g \in \mathcal{C}^{n-1}$. $\dfrac{g}{X}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ pour $x \neq 0$.

$f^{(n-1)}(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{n-1} g^{(n)}(xt)\,\mathrm{d}t$ d'où

$$\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x} = \int_0^1 t^n \frac{g^{(n)}(xt) - g^{(n)}(0)}{xt}\,\mathrm{d}t.$$

Soit $l = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)}{x}$ alors

$$\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x} - \frac{l}{n+1} = \int_0^1 t^n \left[\frac{g^{(n)}(xt) - g^{(n)}(0)}{xt} - l\right] \mathrm{d}t$$

d'où, si $\varepsilon > 0$ alors $\exists \eta > 0$ tel que $|x| \leq \eta \Rightarrow \left|\dfrac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)}{x} - l\right| \leq \varepsilon$. On obtient alors la majoration, pour $|x| \leq \eta$, $x \neq 0$,

$$\left|\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x} - \frac{l}{n+1}\right| \leq \frac{\varepsilon}{n+1} \text{ i.e. } \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x} = \frac{l}{n+1}.$$

Remarques : on a $l = g^{(n+1)}(0)$ et f est n fois dérivable sur $[-1, 1]$, on peut aussi appliquer le théorème de Lebesgue de convergence dominée.

d) En utilisant la formule de Leibniz on a $g^{(n)}(x) = xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x)$ puis $g^{(n)}(0) = nf^{(n-1)}(0)$ d'où

$$f^{(n)}(x) = \frac{g^{(n)}(x) - nf^{(n-1)}(x)}{x} = \frac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)}{x} - n\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x}$$

or on sait que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)}{x} = l$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x} = \dfrac{l}{n+1}$ donc $f^{(n)}(x)$ admet une limite quand $x \to 0$ et cette limite est égale à $l - n\dfrac{l}{n+1} = \dfrac{l}{n+1}$ donc f est dérivable n-fois en 0 et sa dérivée est continue en 0.

Conclusion : f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[-1, 1]$, $f \in E_n$ et $g = A_n f \in \operatorname{Im} A_n$. On a bien $\boxed{A_n = \operatorname{Im} F_n}$.

Deuxième partie

5. a) On fait la démonstration en plusieurs étapes :

- si $a \geq 0$, $b \geq 0$ alors $\dfrac{a+b}{1+a+b} = \dfrac{a}{1+a+b} + \dfrac{b}{1+a+b} \leq \dfrac{a}{1+a} + \dfrac{b}{1+b}$.
- $\alpha(x) = \dfrac{x}{1+x}$ croît de 0 à 1 sur $[0, +\infty[$ donc $\dfrac{1}{2^n}\alpha(\pi_n(f)) \leq \dfrac{1}{2^n}$ ce qui permet d'assurer la définition de δ.

- $\alpha(\pi_n(f_1-f_2)) \leq \alpha(\pi_n(f_1-f_3))+\alpha(\pi_n(f_3-f_2))$ grâce à l'inégalité triangulaire sur π_n et à la première propriété. On fait alors la somme de 0 à N et comme toutes ces quantités ont une limite on obtient bien

$$\boxed{\delta(f_1 - f_2) \leq \delta(f_1 - f_3) + \delta(f_3 - f_2).}$$

b) $(i) \Rightarrow (ii)$: Comme $\alpha(\pi_n(f)) \leq 2^n\delta(f)$ (où la fonction α a été étudiée au **5.a**) alors $\lim\limits_{i\to+\infty} \delta(f_i - f) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{i\to+\infty} \alpha(\pi_n(f_i - f)) = 0$. Or $\alpha^{-1}(x) = \dfrac{x}{1-x} \to 0$ quand $x \to 0$ donc $\lim\limits_{i\to+\infty} \pi_n(f_i - f) = 0$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ f_i^{(n)} \xrightarrow[{[-1,1]}]{C.U.} f$.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Posons $a_{n,i} = \dfrac{1}{2^n}\alpha(\pi_n(f_i - f))$.

- $|a_{n,i}| \leq \dfrac{1}{2^n}$ donc la série $\sum a_{n,i}$ converge normalement par rapport à $i \in \mathbb{N}$,
- $\lim\limits_{i\to+\infty} a_{n,i} = 0$ par hypothèse,

le théorème de double limite s'applique donc et $\delta(f_i - f)$ admet une limite nulle.

c) On peut prendre par exemple $\delta_{k,\beta}(f) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} k^n\beta(\pi_n(f))$ où $k < 1$ et β est une fonction croissante définie sur $[0, +\infty[$, bornée, nulle en 0, dérivable en 0 et vérifiant la sous-additivité $\beta(a + b) \leq \beta(a) + \beta(b)$, par exemple $\beta(x) = \mathrm{Arctan}(x)$.

6. a) Comme à la question **3**, on a $\boxed{BA = \mathrm{Id}_E}$ et $\boxed{ABg(x) = g(x) - g(0)}$.

b) Cas de A :

- $\boxed{\mathrm{Im}\, A = \{f \in E \mid f(0) = 0\}}$: en effet, $f \in \mathrm{Im}\, A \Rightarrow f(0) = 0$ et si $f(0) = 0$ alors $f = ABf \in \mathrm{Im}\, A$.
- $\boxed{\ker A = \{0\}}$: en effet, si $Af = 0$ alors $BAf = f = 0$.

Cas de B :

- $\boxed{\mathrm{Im}\, B = E}$ car $BAf = f$.
- $\boxed{\ker B = C \text{ ensemble des fonctions constantes}}$: si $f \in C$ alors $Bf = 0$ et si $Bf = 0$ alors $ABf(x) = f(x) - f(0) = 0$ donc $f \in C$.

7. a) Montrons par récurrence sur n que

$$\boxed{(B^n g)(x) = \frac{1}{x^n}\left[g(x) - g(0) - xg'(0) - \cdots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}g^{(n-1)}(0)\right].}$$

Ceci est vrai si $n = 1$ d'après les formules déjà prouvées.
On suppose la propriété vraie à l'ordre n. Grâce à la formule de Taylor-Young, on a $(B^n g)(0) = \dfrac{g^{(n)}(0)}{n!}$ d'où

$$\begin{aligned}(B^{n+1}g)(x) &= \frac{1}{x}\left[\frac{1}{x^n}\left(g(x) - g(0) - \cdots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}g^{(n-1)}(0)\right) - \frac{g^{(n)}(0)}{n!}\right]\\ &= \frac{1}{x^{n+1}}\left[g(x) - g(0) - xg'(0) - \cdots - \frac{x^n}{(n)!}g^{(n)}(0)\right]\end{aligned}$$

ce qui fini de prouver la propriété.
On utilise alors la formule de Taylor avec reste intégral d'où

$$(B_n g)(x) = \frac{1}{x^n}\int_0^x \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}g^{(n)}(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}g^{(n)}(xt)\,\mathrm{d}t$$

en posant $u = xt$. On a donc $\varphi_n(t) = \dfrac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}$.

Remarque : l'énoncé s'attendait à une utilisation du théorème de Fubini mais cela ne s'imposait pas ici...

b) On vient de voir que $\boxed{(B^n g)(0) = \dfrac{g^{(n)}(0)}{n!}}$.

c) On a $(ABg)(x) = g(x) - g(0)$ ce qui assure le résultat lorsque $n = 1$.
On fait alors l'hypothèse de récurrence suivante :

$$(A^n B^n g)(x) = g(x) - g(0) - xg'(0) - \cdots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n-1)}(0).$$

On a alors

$$\begin{aligned}(A^{n+1}B^{n+1}g)(x) = (A^n ABB^n g)(x) &= (A^n B^n g)(x) - A^n \underbrace{B^n g(0)}_{=\frac{g^{(n)}(0)}{n!}} \\ &= g(x) - g(0) - xg'(0) - \cdots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n-1)}(0) - x^n \frac{g^{(n)}(0)}{n!}\end{aligned}$$

ce qui démontre la formule.

Remarque : vu la façon d'aborder les questions dans ce corrigé, il n'était pas nécessaire de faire cette démonstration !

d) Comme $(A^n f)(x) = x^n f(x)$ alors en revenant à la formule du **7.a** on a bien $(A^n B^n g)(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n)}(u)\,\mathrm{d}u$.

8. Soit $\boxed{\mathcal{K}_n = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0)\}}$, on va prouver que $\operatorname{Im} A^n = \mathcal{K}_n$.

- Si $f \in \operatorname{Im} A^n$ alors $f = X^n g$ où $g \in E$ donc, par dérivations successives, on a $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$ soit $f \in \mathcal{K}_n$.
- Si $f \in \mathcal{K}_n$ alors $(B^n f)(x) = \dfrac{1}{x^n} f(x) \in E$ car on a vu que $\operatorname{Im} B = E$ donc $\operatorname{Im} B^n = E$. On a ainsi $f \in \operatorname{Im} A^n$.

Vu l'expression de $B^n f$ on en tire immédiatement la conclusion : $\boxed{\ker B^n = \mathbb{C}_{n-1}[X]}$.

Troisième partie

9. Montrons que $\varphi \circ A \in E'$: on a $(xf_i(x))^{(n)} = xf_i^{(n)}(x) + nf_i^{(n-1)}(x)$ donc

$$\|(Af_i)^{(n)} - (Af)^{(n)}\| \leq \|f_i^{(n)} - f^{(n)}\| + n\|f_i^{(n-1)} - f^{(n-1)}\|.$$

On a ainsi $(Af_i)^{(n)} \xrightarrow[{[-1,1]}]{C.U.} (Af)^{(n)}$ et, en utilisant la question **5.b**, on a $\delta(Af_i - Af) \to 0$.

Conclusion : $\varphi(Af_i)$ tend vers $\varphi(Af)$ i.e. $\boxed{\varphi \circ A \in E'}$.

Montrons maintenant que $\varphi \circ B \in E'$:

$$\begin{aligned}|(Bf_i)^{(n)}(x) - (Bf)^{(n)}(x)| &= \left| \int_0^1 t^n (f_i^{(n+1)}(xt) - f^{(n+1)}(xt))\,\mathrm{d}t \right| \\ &\leq \int_0^1 |f_i^{(n+1)}(xt) - f^{(n+1)}(xt)|\,\mathrm{d}t \leq \|f_i^{(n+1)} - f^{(n+1)}\|\end{aligned}$$

et, là encore avec le résultat du **5.b**, $\delta(Bf_i - Bf) \to 0$.

Conclusion : $\varphi(Bf_i)$ tend vers $\varphi(Bf)$ i.e. $\boxed{\varphi \circ B \in E'}$.

10.
- Déterminons $\operatorname{Im}(A')^n$: on sait (cf. **6.a**) que $BA = \mathrm{Id}_E$ donc, par une récurrence immédiate, $B^n A^n = \mathrm{Id}_E$.

Soit $\varphi \in E'$, on a alors $\varphi = \varphi B^n A^n = (A')^n \varphi \circ B^n$ donc $\boxed{\operatorname{Im}(A')^n = E'}$.
Comme A^n est surjective alors on a

$$\forall f \in E,\ \varphi \circ B^n(f) = 0 \Rightarrow \forall g \in E,\ \varphi \circ B^n \circ A^n(g) = 0 \Rightarrow \varphi(g) = 0,$$

on déduit immédiatement que $\boxed{\ker(B')^n = \{0\}}$.
$\ker(A')^n$:

- Montrons tout d'abord que les $\varphi_{0;i}$ sont dans ce noyau : $(A')^n(\varphi_{0;i})(g) = \varphi_{0;i}(X^n g) = (X^n g(x))^{(i)} = 0$.
- La famille $(\varphi_{0;i})$ est libre : si $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \varphi_{0;i} = 0$ alors $\forall p \in [\![0, n-1]\!]$, $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (X^p)^{(i)}(0) = 0$ or le seul terme non nul parmi les $(X^p)^{(i)}(0)$ est celui qui correspond à $i = p$ donc $\lambda_p = 0$.
- La famille est génératrice : si $\varphi \in \ker(A')^n$ alors, comme $\operatorname{Im} B^n = E'$, $\forall g \in E'$, $\varphi \circ A^n B^n = 0$ donc, vu la question **7.c**, $\varphi(g - P_{n-1}) = 0$. On a ainsi, pour toute fonction $g \in E'$,

$$\varphi(g) = \varphi(P_{n-1}) = \varphi\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{X^i}{i!} g^{(i)}(0)\right)$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varphi(X^i)}{i!} \underbrace{g^{(i)}(0)}_{=\varphi_{0;i}(g)} = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \varphi_{i;0}\right)(g)$$

donc $\varphi \in \operatorname{Vect}(\varphi_{0;i})$.

Conclusion : $\boxed{\ker(A')^n = \operatorname{Vect}(\varphi_{0;i})_{i\in[\![0,n-1]\!]} \text{ et les } \varphi_{0;i} \text{ forment une base.}}$

11. On a à résoudre une équation linéaire.

- $(A')^n \left(\frac{1}{n!}\varphi_{0;n}\right)(f) = \frac{1}{n!}\varphi_{0;n}(X^n f) = \varphi_{0;0}(f)$ donc $\frac{1}{n!}\varphi_{0;n}$ est une solution particulière.
- $\ker(A')^n = \operatorname{Vect}(\varphi_{0;i})_{i\in[\![0,n-1]\!]}$.

Conclusion : l'ensemble des solutions est donné par $\boxed{\frac{1}{n!}\varphi_{0;n} + \operatorname{Vect}(\varphi_{0;i})_{i\in[\![0,n-1]\!]}}$.

12. On procède par récurrence sur r :

- $r = 2$: on a immédiatement $\ker U_1 + \ker U_2 \subset \ker(U_1 U_2)$, montrons l'inclusion dans l'autre sens :
si $x \in \ker(U_1 U_2)$ alors $U_2(x) \in \ker U_1 = U_2(\ker U_1)$ donc il existe $x_1 \in \ker U_1$ tel que $U_2(x) = U_2(x_1)$. On a alors $x - x_1 \in \ker U_2$ soit $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \ker U_1$ et $x_2 \in \ker U_2$.
- On suppose la propriété vraie à l'ordre r : on pose $V = U_1 \dots U_r$.
On a là aussi $\ker U_1 + \dots + \ker U_r + \ker U_{r+1} \subset \ker U_1 \dots U_r U_{r+1}$.
Soit $x \in \ker U_1 \dots U_r U_{r+1}$, on pose $x_1 = U_2 \dots U_{r+1}(x)$, par conséquent $x_1 \in \ker U_1$.
Or $\ker U_1 = U_j(\ker U_1)$ soit
$$\ker U_1 = U_2(\ker U_1) = U_2 U_3(\ker U_1) = \ldots = U_2 \dots U_{r+1}(\ker U_1).$$
Il existe donc $y_1 \in \ker U_1$ tel que $x_1 = U_2 \dots U_{r+1}(y_1)$ et $U_2 \dots U_{r+1}(x - y_1) = x_1 - x_1 = 0$ soit $x - y_1 \in \ker U_2 \dots U_{r+1}$. On utilise alors l'hypothèse de récurrence, il existe $y_i \in \ker U_i$ tels que $x - y_1 = y_2 + \dots + y_{r+1}$.
On a prouvé l'inclusion dans l'autre sens d'où l'égalité.

13. a) Soit $Q = b_0 + b_1 X + \dots + b_n X^n$ alors $T_Q = b_0 \operatorname{Id} + b_1 A + \dots + b_n A^n$ et $\varphi \circ T_Q = b_0\varphi + b_1 \varphi \circ A + \dots + b_n \varphi \circ A^n$ donc $\varphi \circ T_Q$ est une somme d'éléments de E' qui appartient à E'.

b) On écarte ici le cas trivial où $Q=0$, $\operatorname{Im} T_0=\{0\}$ et $\ker T_0=E'$.
Soit $Q=b_n(X-\alpha_1)^{q_1}(\cdots)(X-\alpha_r)^{q_r}$ la décomposition de Q en produit de facteurs sur $\mathbb{C}$ (les α_i sont supposés être distincts). On a alors $T'_Q=b_n(T'_{\alpha_1})^{q_1}\dots(T'_{\alpha_r})^{q_r}$.

- Si $\alpha_i\in[-1,1]$ alors d'après le résultat (ii), $(T'_{\alpha_i})^{q_i}$ est surjectif.
- Si $\alpha_i\notin[-1,1]$ alors $g=T_{\alpha_i}\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{g(x)}{x-\alpha_i}\in E$ car le dénominateur ne s'annule pas sur $[-1,1]$ donc T_{α_i} est bijectif, il en est de même de T'_{α_i} car $\varphi\circ T_{\alpha_i}=\psi\Leftrightarrow\varphi=\psi\circ(T_{\alpha_i})^{-1}$.

Conclusion : tous les T'_{α_i} sont surjectifs, il en est de même de T'_Q donc $\boxed{\operatorname{Im} T'_Q=E'}$.
Cherchons le noyau de T'_Q.

- Si Q n'a aucune racine dans $[-1,1]$ alors T'_Q est bijectif en tant que composé de bijections. Dans ce cas, on a $\ker T'_Q=\{0\}$.
- Dans le cas contraire, soit $T'_Q=b_n\displaystyle\prod_{i=1}^{p}(T'_{\alpha_i})^{q_i}\prod_{i=p+1}^{r}(T'_{\alpha_i})^{q_i}$ où on a mis en premier les racines dans $[-1,1]$ (le produit est commutatif). On utilise la question 12 avec $U_i=(T'_{\alpha_i})^{q_i}$: les $(T'_{\alpha_i})^{q_i}$ commutent 2 à 2, il reste à démontrer que $U_j(\ker U_i)=\ker U_i$ ce qui s'écrit $\boxed{(T'_{\alpha_j})^{q_j}(\ker(T'_{\alpha_i})^{q_i})=\ker(T'_{\alpha_i})^{q_i}.}$
  Or, d'après le (ii) admis, les $(\varphi_{\alpha_i;k})_{k\in[\![0,q_i-1]\!]}$, forment une base de $\ker(T'_{\alpha_i})^{q_i}$ donc $\operatorname{Vect} U_i=\operatorname{Vect}(\varphi_{\alpha_i:k})_{k\in[\![0,q_i-1]\!]}$. Calculons $T'_{\alpha_j}(\varphi_{\alpha_i;k})$:

$$\begin{aligned}\forall f\in E,\ T'_{\alpha_j}(\varphi_{\alpha_i;k})(f)&=\varphi_{\alpha_i;k}\circ T_{\alpha_j}(f)=(T_{\alpha_j}(f))^{(k)}(\alpha_i)\\&=[(X-\alpha_j)f]^{(k)}(\alpha_i)=(\alpha_i-\alpha_j)f^{(k)}(\alpha_i)+kf^{(k-1)}(\alpha_i)\end{aligned}$$

soit $T'_{\alpha_j}(\varphi_{\alpha_i;k})=(\alpha_i-\alpha_j)\varphi_{\alpha_i;k}+k\varphi_{\alpha_i;k-1}$. Comme $\alpha_i-\alpha_j\neq0$, on a

$$\operatorname{Vect}(T'_{\alpha_j}(\varphi_{\alpha_i;k}))_{k\in[\![0,\alpha_j-1]\!]}=T'_{\alpha_j}(U_i)=U_i$$

puis, par une récurrence immédiate, que $(T'_{\alpha_j})^{q_j}(U_i)=U_i$. On a donc

$$\ker T'_Q=\ker(T'_{\alpha_1})^{q_1}+\cdots+\ker(T'_{\alpha_r})^{q_r}=\ker(T'_{\alpha_1})^{q_1}+\cdots+\ker(T'_{\alpha_p})^{q_p}$$

car $\ker(T'_{\alpha_i})^{q_i}=\{0\}$ si $i\geq p+1$.
On sait qu'une base de chacun des sous-espaces vectoriels $\ker(T'_{\alpha_i})$ est donnée par les $\varphi_{\alpha_i;j}$, $j=0,\dots,q_i-1$. Il reste à prouver que les $\varphi_{\alpha_i;j}$ forment une base de $\ker T'_Q$ pour pouvoir conclure.
Soit $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=0}^{q_i-1}\lambda_{i,j}\varphi_{\alpha_i;j}\right)=0$ et $f_{p,k}=(X-\alpha_1)^{q_1}\dots(X-\alpha_{p-1})^{q_{p-1}}(X-\alpha_r)^k=g(X-\alpha_r)^k$, $k\leq q_p-1$ alors $\varphi_{\alpha_i;j}(f_{r,k})=0$ pour $i\leq p-1$ et $j\leq q_i-1$.
Pour $i=p$, c'est plus compliqué : $f_{p,k}^{(j)}=\displaystyle\sum_{h=0}^{j}\binom{j}{h}g^{(j-h)}\left[(X-\alpha_p)^k\right]^{(h)}$.
Si $j<k$ alors $f_{p,k}^{(j)}(\alpha_p)=0$, si $j\geq k$ alors, grâce à la formule ci-dessus, $f_{p,k}^{(j)}(\alpha_p)=\dbinom{j}{k}g^{(j-k)}(\alpha_p)k!=a_{j,k}$ et $a_{k,k}\neq0$.
On obtient les relations $\displaystyle\sum_{j=k}^{p-1}a_{j,k}\lambda_{p,j}=0$ pour $k\in[\![0,q_p-1]\!]$. C'est un système triangulaire et les coefficients sont tous non nuls, on en déduit que $\lambda_{p,j}=0$ pour tout j.
Comme on peut faire ceci avec les fonctions $f_{i,j}$ on en déduit que $\lambda_{i,j}=0$. La famille $(\varphi_{\alpha_i;j})$ est donc libre et $\boxed{\text{c'est bien une base de }\ker T'_Q}$.